第38卷第1期
2021年2月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 38, No. 1
February 2021

DOI:10.7511/jslx20200410003

求解大柔度梁/绳索的ANCF单元及隐式迭代格式

罗 鑫[1,2], 魏泳涛*[2]

(1.四川大学 建筑与环境学院,成都 610065;2.四川中锐信息技术有限公司,成都 610094)

摘 要:为模拟大柔度梁/绳索结构的变形和大范围运动,基于绝对节点坐标方法ANCF(Absolute nodal coordinate formulation)和HHT(Hilber-Hughes-Taylor)积分方法,建立了ANCF单元的隐式动力学迭代格式。得到了简洁的节点等效力向量,且进一步导出了切线刚度矩阵的全部公式,并基于罚方法实现了对不同ANCF单元的铰接和刚性连接。分别对弦振动、双杆摆和T字摆、柔绳进行了数值模拟,数值结果与理论解及已有结果吻合良好,验证了本文方法的正确性。

关键词:大柔度梁/绳索;绝对节点坐标方法;节点等效力;切线刚度矩阵;铰链/刚性连接

中图分类号:O302 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2021)01-0126-07

1 引 言

绳索结构应用广泛,如太空中的系留卫星系统(Tethered Satellites System)[1,2]、海洋船舶工业、核工业和机场等领域内的桥式起重机(Overhead Cranes)[3,4]以及高速列车系统中的悬链线(Pantograph/Cantenary)[5]等。弹簧-阻尼-集中质量模型[6-8]是数值模拟绳索的常用方法,但该法的绳索处理成分段折线而不再保持光滑曲线的形态,因而精度较低。有限元法在分析绳索时[9,10],通常采用具有极低抗弯刚度或大柔度的梁单元以保证其形态的光滑性。在绳索运动中,往往存在大范围刚体运动和大变形的耦合作用。但传统梁单元的节点自由度仅反映变形的挠度和转角,即单元的刚体运动和变形是解耦的。浮动坐标法[11]将绳索运动考虑成随浮动坐标系的大范围运动与相对于浮动坐标系的变形的叠加,但由此导出的科氏力和向心力等惯性力表达式十分复杂。

为克服浮动坐标法中的难点,Shabana[12]提出了以节点坐标和斜率作为节点自由度的绝对节点坐标方法ANCF(Absolute nodal coordinate formulation)。该方法的基本思想为在连续介质力学中对即时构形进行物质描述时,运动和变形本身就是耦合的。因此,若将梁/绳索的节点坐标和斜率而非节点挠度和转角设置为节点自由度,则可自动耦合大范围运动和大变形,也无需单独考虑科氏力和向心力等惯性力,且质量矩阵是常数矩阵。ANCF已有关于绳索的研究,Gerstmayr等[13]将标准梁单元的自由度减少并引入附加的形函数,构造了低阶的空间两节点绳索单元;Seo等[14]使用该单元模拟了高速列车系统接触网的三维大变形问题;Shan等[15]使用无抗弯刚度的该单元分析了太空中的系留网。

ANCF中单元的节点等效力计算远比传统有限元复杂。刘铖等[16]基于第一类Piola-Kirchhoff应力张量导出了节点等效力及雅可比矩阵的解析表达式。范纪华等[17]在节点等效力求解中引入了弹性线方法。Gerstmayr等[13]逐一计算了节点等效力各元素,特别是对应于弯曲变形的情况。Zemljaric等[18]对节点等效力计算方法进行了一定简化。Berzeri等[19]推导了小变形下欧拉-伯努利梁单元的节点等效力。这也是目前ANCF分析绳索时采用显式积分的主要原因。显式积分不需要迭代,既避免了不收敛的问题,也免去了由节点等效力导出切线刚度矩阵的繁琐过程,但必须按算法的稳定原则确定足够小的时间步长。而隐式积分在各时间步上需迭代求解以满足平衡方程,在采用较大时间步长时也能保证精度要求。

由节点等效力导出隐式积分所需的的切线刚度矩阵,目前尚无此方面完整研究的报道。此外,基于ANCF方法分析绳索时,多针对单根绳索,而对工程中常见的多根绳索系于一点的情况,还未有考虑。本文对ANCF大柔度梁/绳索单元,导出了用于平衡迭代的切线刚度矩阵的全部公式;其关键环节在于将两矢量的叉乘表示为反对称矩阵与矢

收稿日期:2020-04-10;修改稿收到日期:2020-08-17.
作者简介:魏泳涛*(1971-),男,博士,教授
(E-mail:wyt2119@scu.edu.cn).

量的点乘,以此改造 ANCF 大柔度梁/绳索单元的节点等效力公式;由此导出的节点等效力和切线刚度矩阵均为矩阵形式,也非常方便代码开发;对不同 ANCF 单元的铰接和刚性连接,引入罚方法的处理;最后结合 HHT(Hilber-Hughes-Taylor)隐式格式,对弦微幅和小幅振动、双杆摆和 T 字形杆以及柔绳进行了数值模拟。

2　基于 ANCF 的大柔度梁/绳索单元

研究细长的等截面大柔度梁/绳索,在运动/变形中始终维持光滑曲线,且横截面是正多边形,即横截面对通过形心的任何轴都具有相同的惯性矩。本文基于文献[13]提出的 2 节点 12 自由度的 ANCF 梁/绳索单元,该单元服从平截面假设,不考虑剪切变形和扭转变形。当单元具有极低或零抗弯刚度时,即可用于绳索模拟。

如图 1 所示,由节点 i 和 j 构成的单元,初始长度为 l,由初始构形运动/变形至即时构形。初始构形上物质点 P 距节点 i 弧长为 x,其在即时构形上的空间位置 $\boldsymbol{r}$ 可表示成节点位置 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 及切线矢量 $\boldsymbol{r}_x^i$ 和 $\boldsymbol{r}_x^j$ 的埃尔米特插值,即

$$\boldsymbol{r}=[\mathrm{S}_1\boldsymbol{I}\quad \mathrm{S}_2\boldsymbol{I}\quad \mathrm{S}_3\boldsymbol{I}\quad \mathrm{S}_4\boldsymbol{I}]\boldsymbol{e}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{e} \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{I}$ 为 3×3 的单位阵,$\mathrm{S}_1\sim\mathrm{S}_4$ 为埃尔米特插值基函数,$\boldsymbol{e}$ 为将节点 i 和 j 处的位置矢量和切线矢量排列而得的单元自由度向量。

$$\boldsymbol{e}=[(\boldsymbol{r}^i)^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{r}_x^i)^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{r}^j)^{\mathrm{T}}\quad (\boldsymbol{r}_x^j)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$\boldsymbol{S}_x$,$\boldsymbol{S}_{xx}$,$\boldsymbol{r}_x$ 和 $\boldsymbol{r}_{xx}$ 为相应的一阶和二阶导数。

单元惯性力在虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上的虚功为

$$\delta W=\int_0^l-\rho A\ddot{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}x=-\delta\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{e}} \tag{3}$$

式中　ρ 为单元内绳索的密度,A 为单元横截面积,$\boldsymbol{M}$ 为单元质量矩阵。

单元内 P 点的轴向应变 ε_{xx}^a 和曲率 κ 分别为

$$\varepsilon_{xx}^a=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x-1),\ \kappa=|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_{xx}|/|\boldsymbol{r}_x|^3 \tag{4}$$

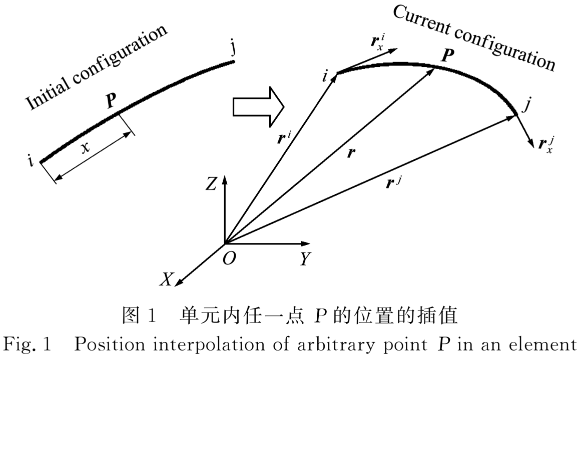

图 1　单元内任一点 P 的位置的插值

Fig. 1　Position interpolation of arbitrary point P in an element

由欧拉-伯努利梁理论,单元内力的虚功为

$$\delta W=\int_0^l A\sigma_{xx}^a\delta\varepsilon_{xx}^a\,\mathrm{d}x+\int_0^l EI\kappa\delta\kappa\,\mathrm{d}x=\delta\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{5}$$

式中　轴向应力 $\sigma_{xx}^a=F_{\mathrm{pre}}/A+E\varepsilon_{xx}^a$,$F_{\mathrm{pre}}$ 为预紧力,E 为弹性模量,$\boldsymbol{F}$ 为单元应力的节点等效力。

为简化书写,记矢量 $\mathbf{c}=\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_{xx}$。将矢量叉乘运算改写为矩阵乘积:$-\boldsymbol{r}_{xx}\times\boldsymbol{r}_x=\mathbf{G}\boldsymbol{r}_x$,$\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_{xx}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}_{xx}$,$\mathbf{c}\times\boldsymbol{r}_x=\mathbf{R}\boldsymbol{r}_x$;$\mathbf{G}$,$\boldsymbol{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 为反对称矩阵,对偶矢量分别为 $-\boldsymbol{r}_{xx}$,$\boldsymbol{r}_x$ 和 $\mathbf{c}$。

略去推导过程,节点等效力 $\mathbf{F}=\mathbf{F}^a+\mathbf{F}_1^b+\mathbf{F}_2^b$ 的具体表达式为

$$\mathbf{F}^a=\int_0^l A\sigma_{xx}^a\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_1^b=\int_0^l\frac{EI}{|\boldsymbol{r}_x|^6}(\mathbf{G}\boldsymbol{S}_x+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}_{xx})^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_2^b=\int_0^l-3EI\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\boldsymbol{r}_x|^8}\boldsymbol{S}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

轴向变形引起的节点等效力 $\mathbf{F}^a$ 为局部坐标的 8 次多项式,需要 5 点高斯积分;弯曲变形引起的弹性力 $\mathbf{F}_1^b$ 和 $\mathbf{F}_2^b$ 需要 3 点高斯积分。

3　隐式动力学迭代格式

为将隐式积分格式应用于前述建立的 ANCF 大柔度梁/绳索单元,需建立平衡迭代格式,为此应从节点等效力导出相应的切线刚度矩阵。

采用 HHT 隐式时间积分方法建立绳索的隐式动力学迭代格式,根据 HHT 方法,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}=&\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{e}}_{t+\Delta t}+(1+\alpha)\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{e}}_{t+\Delta t}-\alpha\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{e}}_t+\\&(1+\alpha)\mathbf{F}_{t+\Delta t}-\alpha\mathbf{F}_t-\mathbf{P}_{t+(1+\alpha)\Delta t}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_{t+\Delta t}=\frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{e}_t)+\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\boldsymbol{e}}_t+\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\boldsymbol{e}}_t \tag{10}$$

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_{t+\Delta t}=\frac{1}{\beta\Delta t^2}(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}-\boldsymbol{e}_t)-\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{e}}_t-\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{\boldsymbol{e}}_t \tag{11}$$

式中　$\boldsymbol{\Psi}$ 为不平衡力向量,$\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵,$\mathbf{P}$ 为等效外载荷。

当积分参数满足 $-0.3\leqslant\alpha\leqslant0$,$\beta=0.25(1-\alpha)^2$,$\gamma=0.5-\alpha$ 时,HHT 方法是无条件稳定的。其中 $\alpha=0$ 时,HHT 退化成 $\beta=0.25$,$\gamma=0.5$ 的 Newmark 法,该方法的主要缺点是无法滤掉虚假的高阶分量。

动力学切线刚度矩阵(即迭代中的雅可比矩阵)为

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t})=&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t})}{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}}=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}+\frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}+\\&(1+\alpha)[\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^a(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t})+\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^b(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t})]\end{aligned} \tag{12}$$

式中 单元的拉伸切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_T^a$ 和弯曲切线刚度矩阵 $\mathbf{K}_T^b=\mathbf{K}_{T1}^b+\mathbf{K}_{T2}^b+\mathbf{K}_{T3}^b$ 分别为

$$\mathbf{K}_T^a=\int_0^l A(E\mathbf{S}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x\boldsymbol{r}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_x+\sigma_{xx}^a\mathbf{S}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_x)\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\mathbf{K}_{T1}^b=\int_0^l -\frac{6EI}{|\boldsymbol{r}_x|^8}[(\boldsymbol{G}\mathbf{S}_x+\boldsymbol{Q}\mathbf{S}_{xx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_x+\mathbf{S}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}\mathbf{S}_x+\boldsymbol{Q}\mathbf{S}_{xx})]\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$\mathbf{K}_{T2}^b=\int_0^l \frac{EI}{|\boldsymbol{r}_x|^6}[(\boldsymbol{G}\mathbf{S}_x+\boldsymbol{Q}\mathbf{S}_{xx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}\mathbf{S}_x+\boldsymbol{Q}\mathbf{S}_{xx})+(\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathbf{S}_x)^{\mathrm{T}}+\mathbf{S}_{xx}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\mathbf{S}_x]\mathrm{d}x \tag{15}$$

$$\mathbf{K}_{T3}^b=\int_0^l 24EI\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\boldsymbol{r}_x|^{10}}\mathbf{S}_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_x\boldsymbol{r}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_x\mathrm{d}x+\int_0^l -3EI\frac{|\mathbf{c}|^2}{|\boldsymbol{r}_x|^8}\mathbf{S}_x^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_x\mathrm{d}x \tag{16}$$

此处略去切线刚度矩阵繁琐的推导过程。由此在 $t+\Delta t$ 时刻的 Newton-Raphson 迭代格式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(0)}=\boldsymbol{e}_t\\ \mathbf{K}_T^D(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n)})\Delta\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n)}=-\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n)})\\ \boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n+1)}=\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n)}+\Delta\boldsymbol{e}_{t+\Delta t}^{(n)}\end{cases} \tag{17}$$

需要注意的是，HHT 法在单元过程中要单独计算上一时刻应力的节点等效力，且外载荷是 $t+(1+\alpha)\Delta t$ 时刻的。

4 铰接和刚性连接的处理

ANCF 大柔度梁/绳索单元使用切线的斜率为自由度，在刚性连接中，连接处的节点具有不同的切线方向，因此应作特别处理。

如图 2 所示，节点 i 和节点 j 分别铰接或刚性连接，约束方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{r}^i-\boldsymbol{r}^j=\mathbf{0}\\ f_2=\boldsymbol{r}_x^i\cdot\boldsymbol{r}_x^j-|\boldsymbol{r}_x^i||\boldsymbol{r}_x^j|\cos\theta_0=0\end{cases} \tag{18}$$

式(18)分别表示节点 i 和节点 j 位置相同，以及切线夹角固定为 θ_0。本文采用罚方法施加约束，即用刚度很大的拉伸或扭转弹簧来近似铰接或刚性连接。记单位化矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}_x^i=\boldsymbol{r}_x^i/|\boldsymbol{r}_x^i|$ 和 $\hat{\boldsymbol{r}}_x^j=\boldsymbol{r}_x^j/|\boldsymbol{r}_x^j|$，略去推导过程，在铰链或刚性连接处附加的节点等效力和切线刚度矩阵为

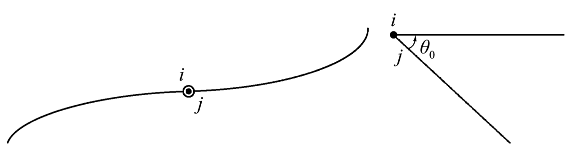

图 2 铰链和刚性连接
Fig. 2 Hinge joint and rigid joint

$$F^c=\begin{bmatrix}C_1(\boldsymbol{r}^i-\boldsymbol{r}^j)\\ C_2f_2(\boldsymbol{r}_x^j-|\boldsymbol{r}_x^j|\hat{\boldsymbol{r}}_x^i\cos\theta_0)\\ C_1(\boldsymbol{r}^j-\boldsymbol{r}^i)\\ C_2f_2(\boldsymbol{r}_x^i-|\boldsymbol{r}_x^i|\hat{\boldsymbol{r}}_x^j\cos\theta_0)\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbf{K}_T^c=C_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&-\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\ &\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ &&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}\\ sym&&&\mathbf{0}\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{r}_x^j-|\boldsymbol{r}_x^j|\hat{\boldsymbol{r}}_x^i\cos\theta_0\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{r}_x^i-|\boldsymbol{r}_x^i|\hat{\boldsymbol{r}}_x^j\cos\theta_0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{r}_x^j-|\boldsymbol{r}_x^j|\hat{\boldsymbol{r}}_x^i\cos\theta_0\\ \mathbf{0}\\ \boldsymbol{r}_x^i-|\boldsymbol{r}_x^i|\hat{\boldsymbol{r}}_x^j\cos\theta_0\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}+C_2f_2\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ &-\dfrac{|\boldsymbol{r}_x^j|}{|\boldsymbol{r}_x^i|}\boldsymbol{I}\cos\theta_0&\mathbf{0}&\boldsymbol{I}\\ &&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ sym&&&-\dfrac{|\boldsymbol{r}_x^i|}{|\boldsymbol{r}_x^j|}\boldsymbol{I}\cos\theta_0\end{bmatrix} \tag{20}$$

式中 $\mathbf{0}$ 为 3×1 的零矢量或 3×3 的零矩阵，C_1 和 C_2 是罚因子，即相应的弹簧刚度。本文算例表明，可分别取为拉伸和弯曲切线刚度矩阵最大元素的 1000 倍。切线刚度矩阵第三项的推导中考虑矢量模的倒数为常数，从而简化计算过程。

5 数值算例

5.1 弦的微幅和小幅振动

弦在张紧状态下作横向微幅振动时，内部张力可视为常数。图 3 所示的弦，长为 1 m，直径为 0.2 mm，弹性模量为 200 GPa，密度为 7800 kg/m^3，两端简支，弦的张力 $T=5$ N。初始时受外部约束而水平静置，突然撤去外部约束后，弦在重力作用下发生微幅振动，其理论解为

$$u(X,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4gL^2}{(2n-1)^3\pi^3a^2}\times\left[1-\cos\frac{(2n-1)\pi at}{L}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi X}{L} \tag{21}$$

式中 常数 $a=\sqrt{T/Ag}$。

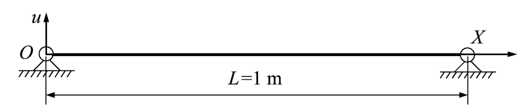

图 3 振动的弦
Fig. 3 Vibrating string

使用 20 个 ANCF 绳索单元模拟，HHT 中积分参数 α 取为 -0.005，时间步长取为 10^{-4} s。图 4 是弦中点横向位移的理论解(21)与 ANCF 数值解的对比(每 30 个时间步输出一个结果)。弦中点的最大振幅为 0.1201 mm，符合微幅振动的假设。模拟结果与理论解符合得很好。

进一步考察在弦中点受冲击载荷作用下的响应，载荷为 0 s～0.02 s 内一幅值 Q 为 1 N 或 10 N 的三角形力波。由于未有该情况下的解析解，故将 ANCF 的数值解与 ANSYS 中采用三次插值模式的 Beam188 单元的结果进行对比。将弦均分为 20 个单元，ANCF 采用 α 为 -0.005 得 HHT 格式，时间步长为 10^{-4} s；ANSYS 采用 Newmark 格式，时间步长为 10^{-5} s。

图 5 列出了在冲击载荷幅值分别是 1 N 和 10 N时，弦中点的位移时程，此时最大振幅分别超过了 30 mm 和 65 mm，已不再符合微幅振动假设。ANCF 数值结果与 ANSYS 结果符合得较好。

5.2　双杆摆和 T 字形杆摆

为考察本文算法对于大刚度梁的模拟和约束处理，模拟图 6 的直径为 2 cm 的圆截面钢梁，弹性模量为 200 GPa，密度为 7800 kg/m^3，其中图 6(a)为两根长为 0.5 m 的杆铰接而形成的双摆；图 6(b)为 T 字形摆，各段长度均为 0.5 m。均由水平位置无初速度释放，各段等分为两个单元，采用 α 为 -0.005 的 HHT 方法，时间步长均为 10^{-3} s。

图 7 为铰接的两个节点距离的时间历程，距离越小表明约束效果越好，图 7 列出了不同罚因子 C_1 水平的模拟结果。罚因子 $0.01EA/L$($L=1$ m)时，铰接节点的最大距离为 94.07 μm，约束效果好。增大罚因子能达到更好的约束效果，但罚因子增大到 $10^{13}EA/L$ 会导致不收敛。

T 字摆的模拟中，C_1 设置为 $10^3 EA/L$($L=1$ m)，C_2 参照抗弯刚度 EI/L 进行设置。图 8 为节点切线夹角 θ_0 与直角之差的时间历程。罚因子 $0.1EI/L$ 能达到较好的约束效果，θ_0 与直角相差不超过 1.5°，进一步增大罚因子至 EI/L，θ_0 与直角相差不超过 0.2°，但增大至 $100EI/L$ 不收敛。

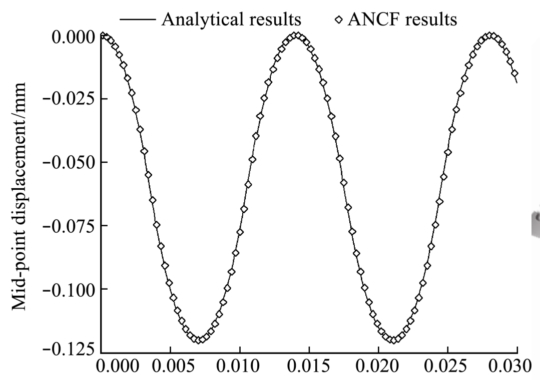

图 4　中点位移的对比

Fig. 4　Comparison of mid-point displacement

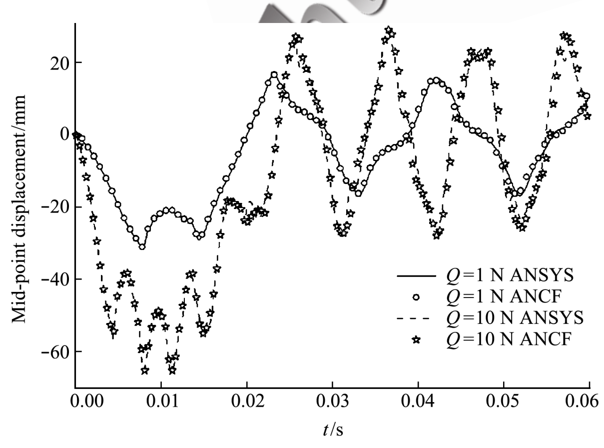

图 5　冲击载荷下中点位移的对比

Fig. 5　Comparison of mid-point displacement under impact load

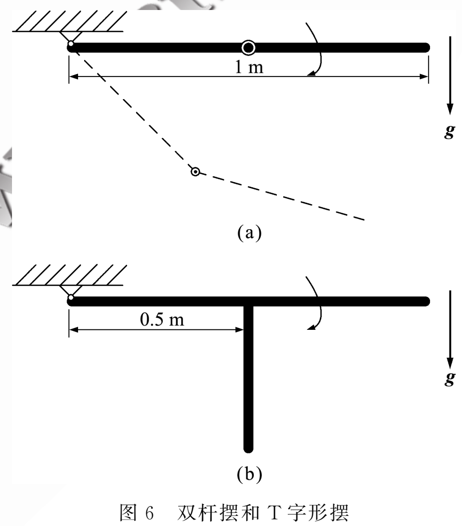

图 6　双杆摆和 T 字形摆

Fig. 6　Free swings of double-pendulum and T-Shape pendulum

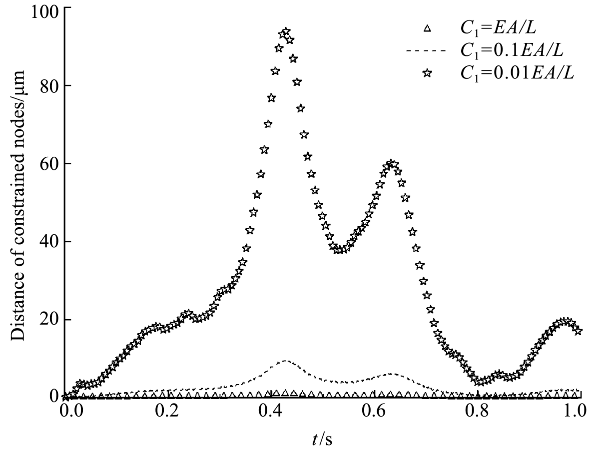

图 7　铰接节点距离的时间历程

Fig. 7　Time history of the distance of the constrained nodes

T字形摆的刚度较大，可近似为刚体，满足刚体定轴转动微分方程。图9为本文算法与理论解的对比，对比的是水平杆与水平线的夹角 φ。结果与理论解较吻合，表明了本文算法的正确性。

5.3 自由下落的柔绳

计算一根水平放置、左端铰接于地面的柔绳，无初速度释放，在重力作用下自由下落。绳长为1.2 m，圆截面面积为0.0018 m^2，截面惯性矩为 $1.215\times10^{-8}\,m^4$，密度为5540 kg/m^3，弹性模量为0.7 MPa。

将模拟结果与已有结果[18]进行比较。节点等效力分别为小变形的Model I[19]、小/大变形的Model V[18]、符号运算的Model S以及本文的公式(6～8)。此前的算例采用四阶龙格-库塔法的显式格式，本文算例采用HHT法的隐式格式，时间步长设置为 10^{-3} s。

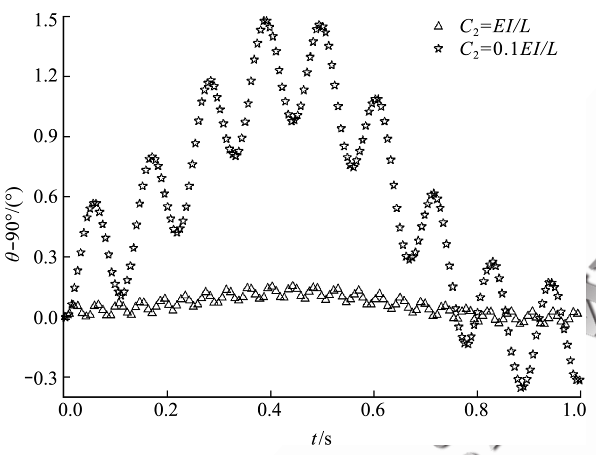

图8 θ_0和90°的对比
Fig.8 Comparison between θ_0 and 90°

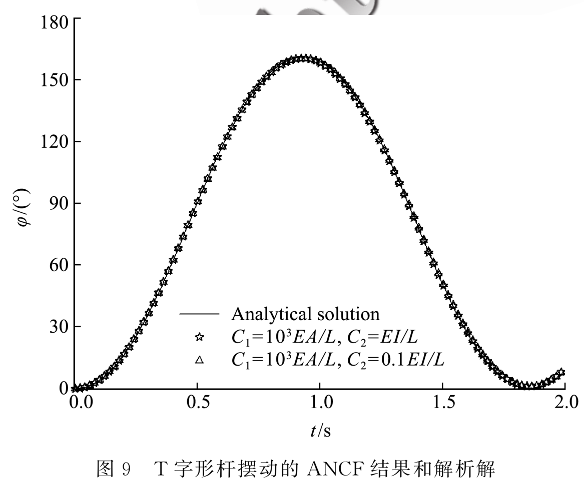

图9 T字形杆摆动的ANCF结果和解析解
Fig.9 ANCF results and analytical solution of T rod

图10是自由端铅垂位置的时程曲线。本文算法的模拟结果与已有结果符合得较好，证明了本文公式及隐式迭代格式的正确性。考虑绳索水平释放，在0.7 s时解除约束的情况，图11为柔绳各时刻的形状。

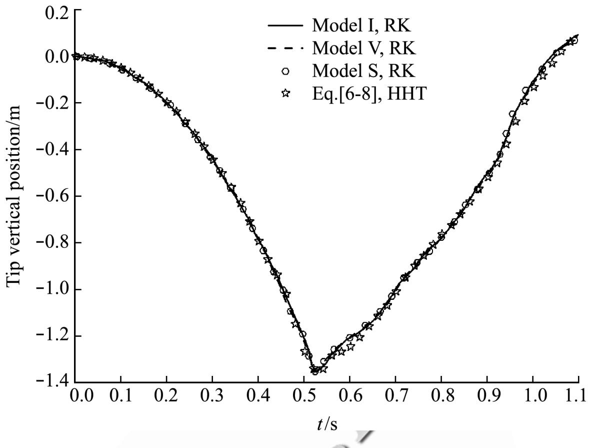

图10 自由端的铅垂位置
Fig.10 Vertical position of the free end

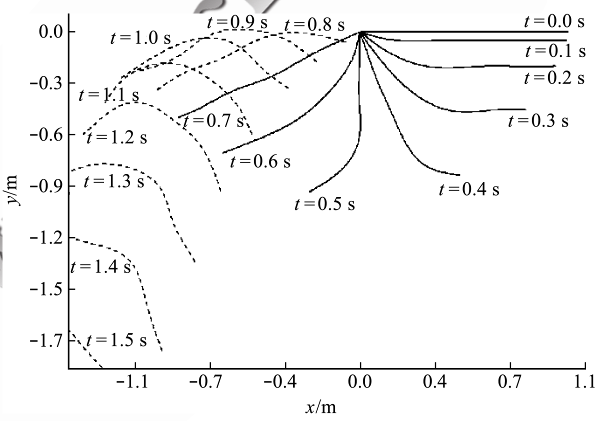

图11 绳索各时刻的形状
Fig.11 Retraced cable shapes

6 结 论

（1）为有效模拟大柔度梁/绳索结构的大范围运动和变形，针对ANCF大柔度梁/绳索单元建立了基于HHT方法的绳索隐式动力学迭代格式。

（2）将矢量叉乘改写为矩阵相乘，得到了ANCF大柔度梁/绳索单元的节点等效力公式，进一步由节点等效力导出了切线刚度矩阵的全部公式。

（3）本文算法的模拟结果与理论解及已有结果符合得较好，验证了节点等效力公式、切线刚度矩阵公式、及所建立的隐迭代格式的正确性。

（4）采用罚方法处理ANCF的约束方程，实现了梁/绳索间的铰接和刚性连接。数值模拟结果表明罚方法能够有效实施此两种约束。

参考文献(References):

[1] Chen Y,Huang R,He L P,et al. Dynamical modelling and control of space tethers:A review of space tether research[J]. *Nonlinear Dynamics*,2014,**77**(4):1077-1099.

[2] Huang P F,Zhang F,Meng Z J,et al. Adaptive control for space debris removal with uncertain kinematics,dynamics and states[J]. *Acta Astronautica*,2016,**128**:416-430.

[3] He W,Ge S S. Cooperative control of a nonuniform gantry crane with constrained tension[J]. *Automatica*,2016,**66**:146 -154.

[4] Huang J,Liang Z,Zang Q. Dynamics and swing control of double-pendulum bridge cranes with distributed-mass beams[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*,2015,**54-55**:357-366.

[5] Poetsch G,Evans J,Meisinger R,et al. Pantograph/catenary dynamics and control[J]. *Vehicle System Dynamics*,1997,**28**(2-3):159-195.

[6] 杜晓旭,张小链.拖缆对水下航行器的操纵性能影响[J].兵工学报,2019,**40**(7):1476-1484.(DU Xiao-xu,ZHANG Xiao-lian. Influence of towed cable on maneuverability of underwater vehicle[J]. *Acta Armamentarii*,2019,**40**(7):1476-1484.(in Chinese))

[7] 王　飞,黄国樑,邓德衡.水下拖缆接触海底时的数值模拟[J].上海交通大学学报,2006,**40**(6):1055-1058,1063.(WANG Fei,HUANG Guo-liang,DENG De-heng. The numerical simulation of towed cable concerning seabed interaction[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*,2006,**40**(6):1055-1058,1063.(in Chinese))

[8] Benvenuto R,Lavagna M,Salvi S. Multibody dynamics driving GNC and system design in tethered nets for active debris removal[J]. *Advances in Space Research*,2016,**58**(1):45-63.

[9] Bathe K J. *Finite Element Procedures*[M]. Prentice-Hall:Englewood Cliffs,1995.

[10] Zhu Z H,Meguid S A,Ong L S. *Dynamic Multiscale Simulation of Towed Cable and Body*[M]. Amsterdam:Elsevier,2003.

[11] 赵国威,吴志刚.大范围运动细长柔性空间结构动力学特性分析[J].计算力学学报,2015,**32**(4):512-517.(ZHAO Guo-wei,WU Zhi-gang. Dynamic characteristics analysis of slender flexible space structure undergoing large overall motions[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2015,**32**(4):512-517.(in Chinese))

[12] Shabana A A. An Absolute Nodal Coordinate Formulation for the Large Rotation and Deformation Analysis of Flexible Bodies[R]. Technical Report no. MBS96-1-UIC,1996.

[13] Gerstmayr J,Shabana A A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Nonlinear Dynamics*,2006,**45**(1-2):109-130.

[14] Seo J H,Sugiyama H,Shabana A A. Three-dimensional large deformation analysis of the multibody pantograph/catenary systems[J]. *Nonlinear Dynamics*,2005,**42**(2):199-215.

[15] Shan M H,Guo J,Gill E. Deployment dynamics of tethered-net for space debris removal[J]. *Acta Astronautica*,2017,**132**:293-302.

[16] 刘　铖,田　强,胡海岩.基于绝对节点坐标的多柔体系统动力学高效计算方法[J].力学学报,2010,**42**(6):1197-1205.(LIU Cheng,TIAN Qiang,HU Haiyan. Efficient computational method for dynamics of flexible multibody systems based on absolute nodal coordinate[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2010,**42**(6):1197-1205.(in Chinese))

[17] 范纪华,章定国,谌　宏.基于绝对节点坐标法的弹性线方法研究[J].力学学报,2019,**51**(5):1455-1465.(FAN Ji-hua,ZHANG Ding-guo,SHEN Hong. Research on elastic line method based on absolute nodal coordinate method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2019,**51**(5):1455-1465.(in Chinese))

[18] Zemljarič B,Ažbe V. Analytically derived matrix end-form elastic-forces equations for a low-order cable element using the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*,2019,**446**:263-272.

[19] Berzeri M,Shabana A A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*,2000,**235**(4):539-565.

The ANCF element and implicit iterative formulation for highly flexible beam/cable

LUO Xin[1], WEI Yong-tao*[2]
(1. College of Architecture and Environment, Sichuan University, Chengdu 610065, China;
2. Sichuan Zhongrui Information Technology Co. Ltd., Chengdu 610094, China)

Abstract: To simulate deformation and large overall motion for highly flexible beam/cable structures, an implicit dynamic iteration formulation for cables is presented based on ANCF (Absolute nodal coordinate formulation) and HHT (Hilber-Hughes-Taylor) integration method. Concise expressions of nodal equivalent forces are obtained, and all tangent stiffness matrices are derived further. Hinge joints and rigid connections are handled by employing the penalty method. A vibrating string, a double pendulum, a T-shape pendulum and a flexible cable are simulated. Numerical results are in good agreement with the analytical solutions and the reported data, which verifies the validity of the presented method.

Key words: highly flexible beam/cable; absolute nodal coordinate formulation; nodal equivalent force; tangent stiffness matrix; hinge/rigid connection

《计算力学学报》2015 年－2019 年高影响力论文

1. 高影响力论文评选结果将在本刊网站、本刊微信公众号和本刊 2021 年第 1 期纸刊上公布。

2. 影响力论文的第一作者 2021 年在本刊投稿可以免交评审费，稿件一经录用，如果外审评价较高，可以享有一篇优先发表。

3.《计算力学学报》编辑部保留最终解释权。

发表时间	题　名	作　者	工作单位
201510	高速铁路碎石道砟振动的离散元模拟	赵春发，张　徐，翟婉明	西南交通大学
201512	层状反倾边坡变形特征及影响因素分析	李明霞，董联杰	华北水利水电大学
201602	液滴撞击超疏水壁面反弹及破碎行为研究	刘冬薇，宁　智，吕　明，阎　凯，孙春华	北京交通大学
201608	页岩水力压裂中多簇裂缝扩展的全耦合模拟	曾庆磊，庄　茁，柳占立，王　涛，高　岳	清华大学
201608	粘滞阻尼器减震结构非线性随机振动的时域显式降维迭代随机模拟法	苏　成，李保木，陈太聪，梁　雄，代希华	华南理工大学
201706	混凝土复合型裂纹扩展的非局部近场动力学建模分析	秦洪远，黄　丹，章　青	河海大学
201708	近场动力学与有限元的混合建模方法	章　青，郁杨天，顾　鑫	河海大学
201710	气固两相流介尺度 LBM-DEM 模型	王利民，邱小平，李静海	中国科学院
201804	基于算法复杂度理论的拟力法计算效率评价	李　钢，贾　硕，李宏男	大连理工大学
201902	加筋薄壳结构分析与优化设计研究进展	王　博，郝　鹏，田　阔	大连理工大学

引用本文/Cite this paper:
罗　鑫，魏泳涛. 求解大柔度梁/绳索的 ANCF 单元及隐式迭代格式[J]. 计算力学学报，2021，**38**(1)：126-132.
LUO Xin, WEI Yong-tao. The ANCF element and implicit iterative formulation for highly flexible beam/cable[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(1): 126-132.