October 2020

DOI: 10.7511/jslx20190714001

# 隔震结构方程的一种压缩解法

田志昌, 孙欣欣\*, 李 娟, 李 革, 杨志军, 陈 明

(内蒙古科技大学 土木工程学院,包头 014010)

摘 要:基础隔振体系中,隔震器的刚度远小于上部结构的刚度,如果未知量数目比较大,则经常导致总刚度矩阵病态。本文利用上部结构本身的振型叠加压缩未知数,然后与隔震器构建混合方程,此时形成的方程为非对称方程。大量压缩未知量后,减轻了总刚度矩阵的病态。以四层隔震框架结构分析为例,结果表明,压缩解法和正常解法的静力结果十分吻合,但用 Newmark 逐步积分计算时,正常直接解法累积误差引起发散,而压缩解法计算不发散。

关键词:基础隔震;压缩解法;振型叠加;小刚度问题;病态方程

中图分类号:TU312;O328

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2020)05-0651-04

# 1 引 言

基础隔震<sup>[1]</sup>能够有效提高结构的抗震性能,为了达到理想减震效果,一般隔震设计中支座滑动时的刚度非常小。利用有限元软件解决大规模的代数方程计算问题,方程能否得到可靠的解取决于刚度矩阵的正定性条件。在基础固定结构体系中,通常采用逐步积分,如 Newmark 法,基本不存在问题。但在基础隔震的情况下,上部结构的刚度矩阵在遇到隔震支座较小的刚度时,总刚度矩阵正定性条件变差,会出现病态方程<sup>[1-4]</sup>。病态方程的解常偏离真值<sup>[2]</sup>。根据文献[2],解决这个问题的办法有两种,一种是保证刚度矩阵中的元素差异不要太大,这显然违背了物理原理;第二种是降低矩阵规模,减缓病态。

针对此现象,本文提出利用上部结构本身的振型叠加来压缩未知量,进而减少刚度矩阵的规模。将振型叠加后的方程与隔震器参数联合形成新的不对称混合方程组。无论上部结构有多大规模,未知数目有多少,都能通过振型叠加法压缩至几十个未知数之内。根据隔震结构的特点,隔振器增加不到10个未知参数即够用。一个1万自由度的中型结构,可以用15个振型和3个支座刚体位移描述。可见压缩量达10000:18。一个18阶的方程即使

收稿日期:2019-07-14;修改稿收到日期:2020-04-30.

基金项目:内蒙古自然科学基金(2018LH05022)资助项目. 作者简介:田志昌(1961-),男,博士,教授;

孙欣欣\*(1994-),女,硕士生

(E-mail: 1668790595@qq. com).

系数不均匀,但计算收敛也是可靠的;而1万阶的 大型刚度矩阵中,若出现非常小的刚度就会引起方 程解相对误差很大的病态问题。

# 2 基础隔震结构体系运动方程求解

#### 2.1 计算模型

以底部带有基础隔震器的 n 层框架结构为计算模型,如图 1 所示。

根据结构体系的模型,可写出该模型的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵,阻尼采用 Rayleigh 阻尼,即  $C=\alpha M+\beta K$ 。无隔震器结构的总未知量为n,加入隔震器支座后增加了一个未知量,即结构的质量矩阵和刚度矩阵等的阶数增加为n+1。对隔震与上部主结构体系进行分块,矩阵可表示为

$$[M]_{n+1\times n+1} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & m_n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{n\times n} & 0 \\ 0 & m_0 \end{bmatrix}$$
 (1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix}_{n+1\times n+1} = \begin{bmatrix} k_{11} & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & -k_0 \\ & & k_{nn} & \vdots \\ \hline \cdots & -k_0 & \cdots & k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{n\times n} & \overline{\mathbf{K}}_{n\times 1} \\ -\overline{\mathbf{K}}_{1\times n} & k_0 \end{bmatrix}$$

(2)

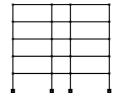


图 1 n层框架结构模型

Fig. 1 Simplified model of the *n*-layer frame structure

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix}_{n+1 \times n+1} = \begin{bmatrix} c_{11} & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & -c_{0} \\ & & \vdots & \vdots \\ \hline \cdots & -c_{0} & \cdots & c_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n \times n} & \overline{C}_{n \times 1} \\ \overline{C}_{1 \times n} & c_{0} \end{bmatrix}$$

$$(3)$$

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_{n \times 1} + 1_{n \times 1} y_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}_{n+1}$$

$$\tag{4}$$

$$\{A\} = \begin{cases} a_1 \\ \vdots \\ \frac{a_n}{a_0} \end{cases} = \begin{pmatrix} A_n \\ a_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

式中  $M_{n\times n}$ ,  $C_{n\times n}$ ,  $K_{n\times n}$  和  $y_n$  分别为上部主体结构 的质量、阻尼、刚度和位移,  $m_0$ ,  $c_0$ ,  $k_0$  和  $y_0$  分别为 基础隔震器质量、阻尼、刚度和位移, $Y_{n\times 1}$  为结构 相对基础的位移。

综上所述,一个 n+1 自由度的隔震结构模型 在地震作用下的运动方程为

$$\lceil M \rceil \langle \dot{\mathbf{Y}} \rangle + \lceil C \rceil \langle \dot{\mathbf{Y}} \rangle + \lceil K \rceil \langle \mathbf{Y} \rangle = -\lceil M \rceil \langle \mathbf{A} \rangle \quad (6)$$

#### 2.2 压缩未知数

方程按照上部体与基础隔器分块表示为

$$\begin{bmatrix}
M_{n\times n} & 0 \\
0 & m_0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
\ddot{Y}_n + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_n \ddot{y}_0 \\
\ddot{y}_0
\end{pmatrix} + \\
\begin{bmatrix}
C_{n\times n} & \overline{C}_{n\times 1} \\
\overline{C}_{1\times n} & c_0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
\dot{Y}_n + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_n \dot{y}_0 \\
\dot{y}_0
\end{pmatrix} + \\
\begin{bmatrix}
K_{n\times n} & \overline{K}_{n\times 1} \\
\overline{K}_{1\times n} & k_0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
Y_n + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_n y_0 \\
y_0
\end{pmatrix} = \\
-\begin{bmatrix}M_{n\times n} & 0 \\
0 & m_0
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix}
A_n \\
a_0
\end{pmatrix} (7)$$

示为

$$\begin{cases}
M_{n\times n}\ddot{Y}_{n} + M_{n\times n}[1]_{n}\ddot{y}_{0} + C_{n\times n}\dot{Y}_{n} + \\
C_{n\times n}[1]_{n}\dot{y}_{0} + \overline{C}_{n\times 1}\dot{y}_{0} + K_{n\times n}Y_{n} + \\
K_{n\times n}[1]_{n}y_{0} + \overline{K}_{1\times n}y_{0} = -M_{n\times n}A_{n} \\
m_{0}\ddot{y}_{0} + \overline{C}_{1\times n}\dot{Y}_{n} + \overline{C}_{1\times n}[1]_{n}\dot{y}_{0} + c_{0}\dot{y}_{0} + \\
\overline{K}_{1\times n}Y_{n} + \overline{K}_{1\times n}[1]_{n}y_{0} + k_{0}y_{0} = -m_{0}a_{0}
\end{cases} \tag{8}$$

主体结构的自由程通常能得到前 m 阶频率 ω 和模 态 {ø},根据模态叠加的原理<sup>[5,6]</sup>,有

$$\{ y_0 \} = \phi \{ \eta(t) \} \tag{9}$$

将式(9)代入式(8),并使用 $\{\phi\}^T$ 同时左乘式(8)得

$$\begin{cases} \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{n \times n} \phi \{ \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) \} + \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{n \times n} [1]_{n} \ddot{\boldsymbol{y}}_{0} + \\ \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{n \times n} \phi \{ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \} + \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{n \times n} [1]_{n} \dot{\boldsymbol{y}}_{0} + \\ \phi^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{C}}_{n \times 1} \dot{\boldsymbol{y}}_{0} + \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{n \times n} \phi \{ \boldsymbol{\eta}(t) \} + \\ \phi^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{n \times n} [1]_{n} \boldsymbol{y}_{0} + \phi^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{K}}_{1 \times n} \boldsymbol{y}_{0} = -\phi^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{n \times n} \mathbf{A}_{n} \\ m_{0} \ddot{\boldsymbol{y}}_{0} + \overline{\mathbf{C}}_{1 \times n} \phi \{ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \} + \overline{\mathbf{C}}_{1 \times n} [1]_{n} \dot{\boldsymbol{y}}_{0} + c_{0} \dot{\boldsymbol{y}}_{0} + \\ \overline{\mathbf{K}}_{1 \times n} \phi \{ \boldsymbol{\eta}(t) \} + \overline{\mathbf{K}}_{1 \times n} [1]_{n} \boldsymbol{y}_{0} + k_{0} \boldsymbol{y}_{0} = -m_{0} a_{0} \end{cases}$$

$$(10)$$

结构处于弹性阶段的振型矩阵,即

$$\phi^{\mathrm{T}} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m]$$

由模态的正交性<sup>[4]</sup>可知,在  $i \neq i$  时,有

$$\begin{cases}
\{\phi\}_{i}^{\mathrm{T}}[M]\{\phi\}_{j} = 0 \\
\{\phi\}_{i}^{\mathrm{T}}[C]\{\phi\}_{j} = 0 \\
\{\phi\}_{i}^{\mathrm{T}}[K]\{\phi\}_{i} = 0
\end{cases} (11)$$

则式(10)可写成

|武(10) 可与成
$$\begin{pmatrix}
M_{m}^{*}\ddot{z}_{i} + \phi^{T}M_{n\times n}[1]_{n\times 1}\ddot{y}_{0} + (C_{m}^{*}\dot{z}_{i} + \phi^{T}C_{n\times n}[1]_{n\times 1}\dot{y}_{0} + \phi^{T}\overline{C}_{n\times 1}\dot{y}_{0} + K_{m}^{*}z_{i} + \phi^{T}K_{n\times n}[1]_{n\times 1}\dot{y}_{0} + \phi^{T}\overline{K}_{n\times 1}y_{0} = -\phi^{T}M_{n\times n}A_{n}$$

$$\begin{pmatrix}
m_{0}\ddot{y}_{0} + \overline{C}_{1\times n}\sum_{i=1}^{m}\phi\dot{z}_{i} + \overline{C}_{1\times n}[1]_{n\times 1}\dot{y}_{0} + c_{0}\dot{y}_{0} + \overline{K}_{1\times n}\sum_{i=1}^{n}\phi\dot{z}_{i} + \overline{K}_{1\times n}[1]_{n\times 1}y_{0} + k_{0}y_{0} = -m_{0}a_{0}
\end{pmatrix}$$
(12)

式(13)即为结构在 m个模态广义坐标下添加隔震 器的运动方程,其共有 m+1 个方程 (m 为结构的 模态数量)。与用振型叠加法压缩未知数的式(7) 相比,方程数量明显减少,刚度矩阵规模也减小,此 时组合方程包含已压缩未知量的上部结构方程和 基础隔震器结构方程。

# 3 算法的正确性验证

#### 3.1 计算模型基本参数

该结构为四层框架结构教学楼,层高均为3.9 m,房屋总高度为15.6 m,场地类别为二类,抗震设防类别为乙类,设防烈度为8度,柱截面尺寸为500 mm×500 mm,梁截面尺寸均为300 mm×600 mm,楼板厚度为120 mm,采用C30混凝土,结构标准层平面如图2所示。

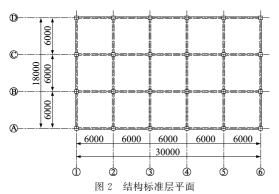
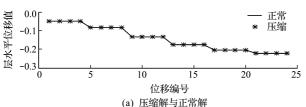
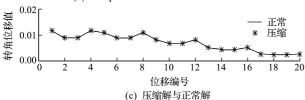


Fig. 2 Structure standard floor plan



(a) Compression solution and normal solution



(c) Compression solution and normal solution

#### 图 3 压缩解法和正常解法结果比较 ig. 3 Comparison of compression solution and normal solution results

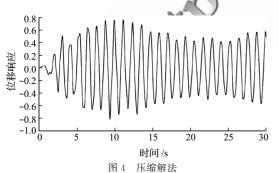


Fig. 4 Compression solution map

#### 4 结 论

本文提出了适用于大型结构和高层建筑隔震体系的压缩解法,通过一个框架算例,比较了正常解法和压缩解法的计算结果,得出如下结论。

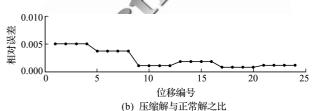
#### 3.2 地震波数据

本文选用典型的II类场地的 EI Centre 地震记录,取 0 s $\sim$ 30 s 的地震波进行研究,并将地震波划分为 1500 步,每 0.02 s 为一个步长[9]。

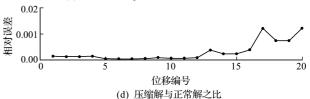
#### 3.3 分析结果对比

如图 3 所示,对框架结构进行静力分析时,在相同结点位移处的位移,用正常解法和压缩解法分别求解方程,比较两种解法结果,一次求解两种算法结果基本一致,如图 3(a)所示,水平位移误差在 0.5%以下,如图 3(b)所示;在转角处的位移值基本一致,如图 3(c)所示,算法误差比值在 1%左右,如图 3(d) 所示。

如图 4 所示, NewMark 时程计算压缩方法在30 s内的方程求解是收敛的;如图 5 所示,在同等条件下,正常解法和压缩解法在 ② 38 s 以前的位移响应保持同步,但 0.4 s 以后正常解法的位移开始出现异常,后续累积发散。



(b) Ratio of compression solution to normal solution



(d) Ratio of compression solution to normal solution

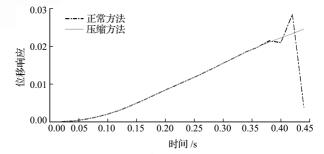


图 5 正常解与压缩解比较

Fig. 5 Comparison of normal solution and compression solution

- (1) 两种算法在相同结点处的若干次解的位移 值基本吻合,尤其是在地震波横波作用时,误差比值 在 0.5%以下,证实了压缩解法在框架结构静力分 析中的准确性与有效性。
  - (2) 在逐步积分法中,正常解法累积误差可导

致结果发散,而压缩解法则不会出现发散。

## 参考文献(References):

- [1] 田志昌,张瑞雪. 振型降阶法解决被动控制中小刚度 引起的病态问题[J]. 应用力学学报,2018,35(6): 1295-1299,1422. (TIAN Zhi-chang, ZHANG Ruixue. Reduction of the number of equations by modesuperposition for solving the illness[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics,2018,35(6):1295-1299, 1422. (in Chinese))
- [2] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析(第 5 版)[M]. 北京:清华大学出版社,2008. (LI Qing-yang, WANG Neng-chao, YI Da-yi. Numerical Analysis (5<sup>th</sup> Edition)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese))
- [3] 富明慧,李勇息,张文志.求解病态线性方程的一种精细格式及迭代终止准则[J].应用力学学报,2018,35(2):346-350,454. (FU Ming-hui, LI Yong-xi, ZHANG Wen-zhi. A precise form for solving ill-conditioned algebraic equations and its iteration stopping criterion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2018,35(2):346-350,454. (in Chinese))
- [4] 李宏男,李忠献,祁 凯,等. 结构振动与控制[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2005. (LI Hong-nan, LI Zhong-xian, QI Kai. Structural Vibration Control [M]. Beijing: Chinese Building Industry Press, 2005. (in Chinese))
- [5] 克拉夫,彭 津.结构动力学[M].北京:科学出版社, 1981. (CLOUGH R W, PENG Jin. Structural Dynamics[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))
- [6] 李创第,陈欧阳,葛新广,等. 多层隔震结构地震作用

- 取值的解析分析法[J]. 应用力学学报,2014,31(3): 326-331,485. (LI Chuang-di, CHEN Ou-yang, GE Xin-guang, et al. Analytic method of earthquake action calculation for multistory isolated structure [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2014, 31(3): 326-331,485. (in Chinese))
- [7] 郭天德,段碧霞.建筑基础隔震的动力分析法[J].应用力学学报,1992,9(3):124-127,148. (GUO Tian-de, DUAN Bi-xia. The dynamic analysis method of isolation seism for building base[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics,1992,9(3):124-127,148. (in Chinese))
- [8] 孙东奇. 大型框架隔振结构地震响应分析[J]. 土木建筑与环境工程,2013,35(s1):66-69,80. (SUN Dongqi. Large frame vibration isolation structure seismic response analysis[J]. Journal of Civil, Architectural & Environmental Engineering, 2013, 35(s1):66-69,80. (in Chinese))
- [9] 卞建宾,张黎明,田志昌,等. 振动控制应用于抗震设计[J]. 内蒙古科技太学学报,2011,30(1):78-80. (BIAN Jian-bin, ZHANG Li-ming, TIAN Zhi-chang, et al. Vibration control application on seismic design [J]. Journal of Inner Mongolia University of Science and Technology, 2011, 30(1):78-80. (in Chinese))
- [10] 孙敦本,梁 路. 多层框架结构基础隔震地震反应分析[J]. 工程建设与设计,2007(2):25-27. (SUN Dunben, LIANG Lu. Analysis of seismic responses of base isolated multistory frame structure[J]. Architectural and Structural Design,2007(2):25-27. (in Chinese))

## A compressed solution method for the equation of isolated structure

TIAN Zhi-chang, SUN Xin-xin, LI Juan, LI Ge, YANG Zhi-jun, CHEN Ming (School of Civil Engineering, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou 014010, China)

Abstract: In the vibration isolation system of a foundation, the stiffness of the isolator is very small compared with the stiffness of the upper structure. If the number of the unknowns is great, the stiff matrix often becomes ill-conditioned. In this paper, we propose to use the vibration mode superposition of the upper structure to reduce the number of unknowns, and then combine the isolator's parameters to form a set of mixed simultaneous equations, which are asymmetrical. After the large number of unknowns is reduced, the cumulative error is reduced and the ill-condition is relieved. The analysis of a four-story isolated frame is taken as an example in this paper. It shows that the static results of the reduced solution and the original solution are in good agreement, but the step by step integration by means of Newmark method shows that the normal direct solution is divergent, while the reduced solution is convergent.

Key words: base isolation; compression solution; mode superposition; small stiffness; matrix illness

引用本文/Cite this paper:

田志昌,孙欣欣,李 娟,等. 隔震结构方程的一种压缩解法[J]. 计算力学学报,2020,37(5):651-654.

TIAN Zhi-chang, SUN Xin-xin, LI Juan, et al. A compressed solution method for the equation of isolated structure [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2020, 37(5):651-654.