

全应变梯度挠曲电纳米梁有限单元法研究

陈玲玲, 杨旭, 刘洋, 王炳雷*

(山东大学 土建与水利学院工程力学系, 济南 250061)

摘要: 挠曲电效应是一种存在于所有电介质材料中的特殊的力电耦合效应, 本质上是应变梯度与电极化之间的线性耦合。然而, 应变梯度会引入位移的高阶偏量, 常给挠曲电问题的理论求解带来困难。且已有研究表明应变梯度弹性项会影响纳米结构中的力电耦合响应, 但是现有的挠曲电研究大多忽略了应变梯度弹性的影响。因此, 本文提出了一种既考虑应变梯度弹性, 又考虑挠曲电效应的有效数值方法。基于全应变梯度弹性理论, 建立了包含3个独立材料尺度参数的纳米欧拉梁的理论模型和有限元模型, 提出了满足 C_2 弱连续的两节点六自由度单元。基于本文的有限单元法, 以简支欧拉梁为例, 通过分析讨论挠度、电势和能量效率, 得到了挠曲电效应和应变梯度弹性项对梁的力电响应的影响。结果表明, 挠曲电效应存在尺寸依赖性, 且应变梯度弹性项在纳米电介质结构的挠曲电研究中的影响不可忽略。

关键词: 挠曲电效应; 全应变梯度弹性理论; 有限单元法; 欧拉梁; 尺寸依赖性

中图分类号: O242.21

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2020)05-0545-08

1 引言

压电效应是最常见的力电耦合效应, 是应变 ϵ 和电极化 P 之间的线性耦合^[1]。虽然在生活中有着广泛的应用, 但压电效应不是普遍存在的。因为它只存在于非中心对称介电材料中, 并且其激发还受限于居里温度 T_c 。

不同于压电效应, 挠曲电效应是一种普遍存在的力电耦合效应, 是应变梯度 $\partial\epsilon/\partial x$ 与电极化 P 之间的线性耦合。理论上, 挠曲电效应存在于所有的电介质材料中, 如液晶、聚合物和脂质双层膜等^[2-4]。它在能量收集、传感和驱动、高级显微镜、人工肌肉和微创手术方面有广泛的应用前景^[5,6]。挠曲电效应的激发没有温度限制, 并且其在纳米尺度下会变得更加显著(即存在尺寸依赖性), 这是因为随着结构尺寸的减小, 应变梯度会相应地增大。

近些年, 挠曲电效应引起了人们的广泛关注, 主要原因有两个。(1) 铁电陶瓷的挠曲电效应试验表明, 一些高介电常数的材料可以获得比预期更强的挠曲电特性^[7]; (2) 随着先进的纳米技术和小

型化趋势的发展, 纳米结构材料得到了广泛的开发。挠曲电效应最重要的应用之一就是利用其尺寸依赖性而制成的俘能器^[8]。同时, 挠曲电效应还可以显著提高纳米梁的压电性, 这为在微纳机电系统中的应用提供了新的途径。

Kogan^[9]为了在理论上解释电介质中的挠曲电效应, 首次提出了挠曲电理论, 并估计了挠曲电系数的取值范围。申胜平等^[10]从电焓学的角度出发, 同时考虑了挠曲电效应、表面效应和静电效应, 严格推导出了纳米电介质的控制方程。周亚荣等^[11]给出了考虑挠曲电效应的纳米欧拉梁的理论框架。王炳雷等^[12]研究了考虑挠曲电效应的挠曲电介质薄膜的能量俘获机制。

应变梯度是引起挠曲电效应的直接原因, 为了准确地描述微构件中的挠曲电效应, 必然要引入应变梯度理论。应变梯度理论的发展已有半个多世纪, 应变梯度理论最先由Mindlin^[13]提出, 除了2个Lamé常数之外, 对于各向同性材料还需要额外的16个独立的材料尺度参数。Mindlin等^[14]对其之前的理论进行了简化, 使材料尺度参数从16个减少到了5个, 但仍很难通过实验确定。周慎杰等^[15]提出了全应变梯度弹性理论, 通过对两组应变梯度张量进行正交分解, 严格证明了只有3个材料尺度参数是独立的。这3个材料尺度参数 l_0 , l_1 和 l_2 分别与膨胀梯度张量、拉伸梯度张量和转动梯度张量相关。

收稿日期: 2019-11-04; 修改稿收到日期: 2020-01-14.

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB0703500); 山东省重点研发计划(2019GSF109022); 山东省自然科学基金(ZR2017MA037); 江苏省自然科学基金(SBK2020041645)资助项目.

作者简介: 王炳雷*(1980-), 男, 博士, 副教授
(E-mail: bwang@sdu.edu.cn).

另一方面,在挠曲电理论模型中必须考虑电极化 P 和应变梯度 $\nabla \nabla u$ 之间的耦合,然而对于总能量来说,应变梯度弹性项 ($U \sim \nabla \nabla u \cdot g \nabla \nabla u / 2$) 也是至关重要的一项。但有些研究并未考虑这一项的影响。邓谦^[16]的研究表明,以往的研究低估了应变梯度弹性项的影响。纳米尺度下,其影响是不可忽视的。挠曲电的尺寸效应只表明了随着结构的特征尺寸减小,其挠曲电响应会增强,却没有给出在什么条件下这种增强现象会减弱,而应变梯度弹性项可以抑制这种现象。因此,为了考虑应变梯度弹性项的影响,本文采用全应变梯度弹性理论^[15]。

然而,挠曲电问题中的高阶偏微分方程常给理论求解带来困难。为此,人们开始寻求有效的数值方法。其中,有限单元法一直是解决边值问题的有效方法。王凯等^[17]建立了考虑应变梯度理论的二维及三维问题的自然邻近混合伽辽金法。邓峰等^[18]提出了四种二维混合有限单元来研究挠曲电效应,随后又创建了三维混合有限单元法,用来模拟挠曲电球壳和截棱锥的机电耦合行为^[19]。与理论研究和实验分析相比,有关挠曲电效应的数值研究相对较少,并且挠曲电效应的有限单元法也需要高阶的有限单元来满足其连续性。

因此,为了求解纳米欧拉梁的挠曲电问题,本文提出了一种基于全应变梯度弹性理论的包含 3 个独立材料尺度参数的有限单元法,并通过一个简单的欧拉简支梁算例,来研究挠曲电效应和应变梯度弹性项在挠曲电问题中的影响。

2 基本理论

根据全应变梯度弹性理论,在本构关系中,除了 2 个经典的拉梅常数外,还引入了 3 个独立的材料尺度参数^[15]。因此,考虑挠曲电效应的线弹性材料的内能密度函数可以表示为

$$U = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} a_{kl} P_k P_l + d_{ijk} \epsilon_{ij} P_k + f_{ijkl} u_{i,jk} P_l + \mu l_0^2 \epsilon_{nn,i}^2 + \mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + \mu (l_2^2 + \frac{9}{5} l_0^2) \chi'_{ij}{}^2 + \mu (l_2^2 - \frac{9}{5} l_0^2) \chi'_{ij} \chi'_{ji} \quad (1)$$

式中 $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ 为应变张量分量, P_i 为电极化密度张量分量, u_i 为位移张量分量。 c_{ijkl} , a_{kl} , d_{ijk} 和 f_{ijkl} 为材料常数张量分量,分别表示弹性系数张量分量、介电互异常数张量分量、压电系数张量分量和挠曲电系数张量分量, μ 为材料的剪切模量。 $\epsilon_{nn,i}$, $\eta_{ijk}^{(1)}$ 和 χ'_{ij} 分别为膨胀梯度张量分量、拉伸

梯度张量分量以及转动梯度张量分量,而与之对应的材料尺度参数分别为 l_0 , l_1 和 l_2 。

在传统的电焓密度中引入挠曲电理论,则得到新的电焓密度 H 的表达式为^[20]

$$H = U - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} P_z \quad (2)$$

式中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m 为真空介电常数, Φ 为电势, z 为梁的厚度方向。

在整个电介质结构中,考虑挠曲电效应的哈密顿变分原理为

$$-\delta \int_{\Omega} H d\Omega + \delta W = 0 \quad (3)$$

式中 δW 为外力功的变分。

3 纳米欧拉梁的理论模型

考虑一个长度为 L 、厚度为 h 、宽度为 b 的压电纳米简支梁中的机电耦合响应,如图 1 所示。以梁未变形前的中心轴为 x 轴,建立笛卡尔坐标系, z 轴沿着梁的厚度方向。在梁的上下表面 ($z = \pm h/2$) 施加一个外加电压 ΔV ,在梁的中点处 ($x = L/2$) 施加一个集中力 F 。当施加电压 ΔV 时,简支梁会在 z 方向产生机械变形;当施加集中力 F 时,简支梁会在 z 方向产生电极化。在下面的推导中,坐标 (x, y, z) 由 $(1, 2, 3)$ 表示。

设弯曲梁的 z 向位移为 $w(x)$,则欧拉梁中任意一点的位移可以表示为

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= -z(\partial w(x)/\partial x) \\ u_2(x, z) &= 0 \\ u_3(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (4)$$

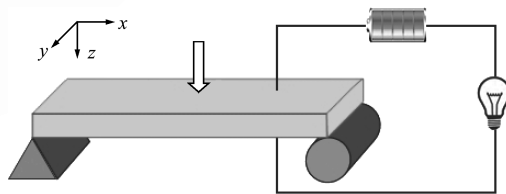


图 1 简支梁力电耦合响应
Fig. 1 Electromechanical coupling response of the simply supported beam

从图 1 可以看出,简支梁的模型和载荷关于 $x = L/2$ 对称,故可取梁的一半 ($0 < x < L/2$) 进行计算。根据全应变梯度弹性理论,将非 0 的应变、应变梯度、高阶的应变梯度、应力以及高阶应力代入内能密度函数的表达式(1),再采用能量法,将内能密度函数代入式(3)分别对 w , P_3 和 Φ 进行变分,便可以得到如下的控制方程和在 $x = 0$ 和 $x = L/2$ 处的边界条件^[21]:

$$\left\{ \begin{aligned} & - \left[c_{1111} I + \mu A \left(\frac{12}{5} l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + 2 l_2^2 \right) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ & \mu I \left(\frac{18}{5} l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \\ & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_S (d_{311} z + f_{1133}) P_3 dS \right] - \\ & \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\int_S f_{1113} z P_3 dS \right) + q(x) = 0 \\ & (d_{311} z + f_{1133}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{1113} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ & \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial z} - a_{33} P_3 \right) = 0 \\ & - e_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial P_3}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[c_{1111} I + \mu A \left(\frac{12}{5} l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + 2 l_2^2 \right) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\ & \mu I \left(\frac{18}{5} l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} - \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_S (d_{311} z + f_{1133}) P_3 dS \right] + \\ & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_S f_{1113} z P_3 dS \right) + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{or} \quad \delta w = 0 \\ & \int_S (d_{311} z + f_{1133}) P_3 dS + \mu I \left(\frac{18}{5} l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ & \left[c_{1111} I + \mu A \left(\frac{12}{5} l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + 2 l_2^2 \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_S f_{1113} z P_3 dS \right) = 0 \quad \text{or} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ & \int_S f_{1113} z P_3 dS - \mu I \left(\frac{18}{5} l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ & \text{or} \quad \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ & \iint_{xy} \left(e_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - P_3 \right) dx dy = 0 \\ & \text{or} \quad \delta \Phi(z=-h/2) = 0, \delta \Phi(z=h/2) = \Delta V \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中 I 和 A 分别为梁的极惯性矩和横截面积。

考虑到电极化和电势只存在于 z 方向,并结合式(5)的后两个式子以及式(6)的最后一个边界条件,可得电极化和电势的表达式为

$$P_3 = \frac{e_0 d_{311}}{e_0 a_{33} + 1} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{e_0 f_{1113}}{e_0 a_{33} + 1} z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{f_{1133}}{a_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\Delta V}{a_{33} h} \quad (7)$$

$$\Phi = \frac{4 z^2 - h^2}{8(e_0 a_{33} + 1)} \left(d_{311} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{1113} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \Delta V \left[\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right] \quad (8)$$

将式(7)代入式(5)的第一个式子,可得压电纳

米简支梁的挠度控制方程以及在 $x=0$ 和 $x=L/2$ 处的边界条件

$$k_1 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + k_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & k_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + k_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{F}{2} = 0 \quad \text{or} \quad \delta w = 0 \\ & k_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{f_{1133} \Delta V}{a_{33} h} A = 0 \quad \text{or} \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ & -k_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{e_0 f_{1113} d_{311}}{e_0 a_{33} + 1} I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{or} \quad \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\text{式中} \quad k_1 = \mu I (\lambda_1 l_0^2 + \lambda_2 l_1^2) - \frac{e_0 f_{1113}^2}{e_0 a_{33} + 1} I$$

$$k_2 = \frac{f_{1133}^2}{a_{33}} A + \frac{e_0 d_{311}^2}{e_0 a_{33} + 1} I - c_{11} I - \mu A (\lambda_3 l_0^2 + \lambda_4 l_1^2 + \lambda_5 l_2^2) \quad (11)$$

$$\text{并且} \quad \lambda_1 = \frac{18}{5}, \lambda_2 = \frac{4}{5}, \lambda_3 = \frac{12}{5}, \lambda_4 = \frac{8}{15}, \lambda_5 = 2。$$

由挠度控制方程及边界条件求解得到挠度的表达式为

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{S_0 x} + C_6 e^{-S_0 x} \quad (12)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} & S_0 = \sqrt{-k_2/k_1}, M^* = -[f_{1133} \Delta V / (a_{33} h)] A \\ & C_1 = \frac{M^*}{k_1 S_0^4}, C_2 = (M^* L + \frac{1}{8} F L^2 + F / S_0^2) / (2 k_2) \\ & C_3 = -M^* / (2 k_2), C_4 = -F / (12 k_2) \\ & C_5 = \frac{e^{S_0 L/2}}{k_1 S_0^4 (1 + e^{S_0 L})} \left(-\frac{F}{2 S_0} + M^* e^{-S_0 L/2} \right) \\ & C_6 = \frac{e^{S_0 L/2}}{k_1 S_0^4 (1 + e^{S_0 L})} \left(\frac{F}{2 S_0} - M^* e^{S_0 L/2} \right) \end{aligned} \right. \quad (13)$$

令控制方程(9)和边界条件(10)有关电学的项为0,即令 $f_{1133} = f_{1113} = 0, d_{311} = 0, \Delta V = 0$,再令 $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_5 = 1$,便可以得到基于Lam等^[22]的应变梯度理论的简支梁挠度表达式

$$w_L = \left(\frac{F L^2}{16 k_2} + \frac{F}{2 k_2 S_0^2} \right) x - \frac{F}{12 k_2} x^3 - \frac{e^{S_0 L/2} e^{S_0 x} F}{2 k_1 S_0^5 (1 + e^{S_0 L})} + \frac{e^{S_0 L/2} e^{-S_0 x} F}{2 k_1 S_0^5 (1 + e^{S_0 L})} \quad (14)$$

4 纳米欧拉梁的有限元模型

基于有限单元法理论,建立纳米欧拉梁的有限元模型以研究纳米梁的力电耦合特性。首先根据有限元理论,将简支梁的控制方程(9)变换为弱形式方程

$$\int_0^L \left[-k_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w''' + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w'' \right] dx + M^* \delta w' \Big|_0^L = 0 \quad (15)$$

式中 $M^* = -[f_{1133} \Delta V / (a_{33} h)] A$ 相当于作用在梁两端的等效弯矩。

由式(15)可以看出,弱形式方程包含 w 的三阶导数,因此,本文将欧拉纳米梁离散成两节点六自由度,满足 C_2 弱连续的新欧拉梁单元,该单元包含三个独立的材料尺度参数,可以表征尺寸效应。

欧拉纳米梁的挠度 w 可以由一组含有待定参数的试函数表示为

$$w = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{a} = [w_1 \ w_1' \ w_1'' \ w_2 \ w_2' \ w_2'']^T$ 为待定参数, $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6]$ 为形状函数矩阵,由二阶埃尔米特多项式插值给出

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 10(x/L)^3 + 15(x/L)^4 - 6(x/L)^5 \\ N_2 &= [x/L - 6(x/L)^3 + 8(x/L)^4 - 3(x/L)^5]L \\ N_3 &= \frac{1}{2}[(x/L)^2 - 3(x/L)^3 + 3(x/L)^4 - (x/L)^5]L^2 \\ N_4 &= 10(x/L)^3 - 15(x/L)^4 + 6(x/L)^5 \\ N_5 &= [-4(x/L)^3 + 7(x/L)^4 - 3(x/L)^5]L \\ N_6 &= \frac{1}{2}[3(x/L)^3 - 2(x/L)^4 + (x/L)^5]L^2 \end{aligned} \quad (17)$$

将挠度试函数(16)代入弱形式方程(15),就可以得到新的纳米欧拉梁单元的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$,

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{l_e} \left[-k_1 \left(\frac{\partial^3 \mathbf{N}}{\partial x^3} \right)^T \frac{\partial^3 \mathbf{N}}{\partial x^3} + k_2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \right] dx \quad (18)$$

式中 l_e 为每个单元的长度。

集合单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 形成结构的总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 最终得到有限元的求解方程

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别为整体刚度矩阵、整体载荷向量和整体位移向量。

由式(18)可知,不同于传统的欧拉梁单元,新的欧拉梁单元包含 3 个独立的材料尺度参数,因此它可以表征尺寸效应。并且,传统的欧拉梁单元只满足 C_0 连续,而新的欧拉梁单元可以满足 C_1 连续和 C_2 弱连续。

5 算例分析

5.1 参数设置

以纳米欧拉简支梁为例,分析和讨论其挠曲电响应。所选材料为 BaTiO_3 。梁的几何形状设定为 $L = 20h$ 和 $b = 3h$ 。悬臂梁自由端的集中力为 $F = 3 \text{ nN}$, 梁上下表面的外加电压为 $\Delta V = -0.2 \text{ V}$ 。3

个独立的材料尺度参数设定为 $l_0 = l_1 = l_2 = 10 \text{ nm}$ 。其他详细参数设置列入表 1。

5.2 收敛性分析

无量纲化的挠度、转角和弯矩表示如下

$$\bar{w} = \frac{c_{11} I w}{FL^3} \times 10^2, \quad \bar{\theta} = \frac{c_{11} I w'}{FL^2} \times 10^2, \quad \bar{M} = \frac{c_{11} I w''}{FL} \times 10^2 \quad (20)$$

为确保本文研究方法的收敛性,下面利用新的欧拉梁单元进行有限元计算。在 $x = L/3$ 处的无量纲化的挠度、转角和弯矩的理论计算结果分别为 3.279707, 5.226900 和 -29.795157, 表 2 给出了相应的有限元计算结果。可以看出,本文计算方法收敛且收敛速度非常快。再对比理论计算结果和有限元计算结果可以看出,有限元计算结果最大误差为 0.09%, 说明本有限单元法的计算精度足够高。由表 2 可知,30 个单元已经足以满足本文的精度要求,因此在本文将采用 30 个单元进行计算以及结果分析。

5.3 方法验证

为了验证本文有限单元法的精确度,图 2 给出两种模型的理论及数值结果对比。一种是基于 Lam 等的应变梯度理论的简支梁模型,式(14)给出了其理论结果。一种是基于全应变梯度理论的简支梁模型,即为不考虑电学相关项($f_{1133} = f_{1113} = 0, d_{311} = 0, \Delta V = 0$)的本文研究模型。从图 2 可以

表 1 梁的材料参数和几何尺寸

Tab. 1 Material parameters and geometric dimensions of the beam

参数	数值
h	20 nm
c_{11}	131 GPa
d_{31}	$1.87 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
a_{33}	$0.79 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-1}$
f_{1133}	5 V
f_{1113}	0
Poisson's ratio ν	0.38
Young's modulus E	42.9 GPa

表 2 $x = L/3$ 处的无量纲化挠度和转角

Tab. 2 Dimensionless deflection and rotation at point $x = L/3$

单元数	$\bar{w}$	$\bar{\theta}$	$\bar{M}$
6	3.278209	5.220639	-29.697134
12	3.278197	5.222370	-29.795079
18	3.278197	5.222369	-29.795157
30	3.278197	5.222369	-29.795157
60	3.278197	5.222369	-29.795157

看出,数值结果与理论结果相拟合,本文有限单元法具有很高的精度。对比两种模型的数值发现,以往的应变梯度理论模型可能低估了梁的等效刚度。

5.4 结果讨论

为了方便讨论,在接下来的结果分析中将给出4种模型。(1) SF 模型,同时考虑挠曲电效应和应变梯度弹性项,此为当前的研究模型;(2) FL 模型,只考虑挠曲电效应;(3) SG 模型,只考虑应变梯度弹性项。(4) NF 模型:既不考虑挠曲电效应,也不考虑应变梯度弹性项。

图3为四种模型的挠度曲线。首先对比 FL, SG 和 NF 模型的挠度值,可以看出挠曲电效应可以明显地增大梁的挠度,即考虑挠曲电效应后梁的等效弯曲刚度减小,而考虑应变梯度弹性项后,梁的挠度减小,即梁的等效刚度增加。在当前结构尺寸设定下,挠曲电效应和应变梯度弹性项对梁的变形的影响是相反的。这一点可以从梁的等效弯曲刚度 k_2 看出,挠曲电效应会减小梁的等效弯曲刚度,而应变梯度弹性项则会增大梁的等效弯曲刚度。同时,因为挠曲电效应,外加电压相当于在梁

的两端施加了等效弯矩 M^* ,这相当于增加了外加载荷,从而使梁的挠度增大。再来看 SF 模型,相比挠曲电效应和应变梯度弹性项皆不考虑的 NF 模型, SF 模型梁的挠度有所增大,但挠度值还是小于 FL 模型,这说明应变梯度弹性项对挠曲电效应存在一定的抑制效果,但在当前模型尺寸下挠曲电效应还是起主导作用的。最后,图3的数值结果与理论结果拟合良好,再次验证了本文有限单元法的有效性。

令简支梁的材料参数不变,几何尺寸和外加集中力 F 进行等比例缩放,计算可得四种模型归一化的最大挠度,如图4所示。 w_{NF} 为 NF 模型下梁的最大挠度。可以看出, SF 模型归一化的最大挠度值随着结构尺寸的减小先增大后减小,存在极值点。而 FL 模型和 SG 模型归一化的最大挠度值则分别随着结构尺寸的减小单调递增和单调递减。对于传统的 NF 模型,随着尺寸的减小,其归一化的最大挠度值不变。从图4可以看出与图3一致的结论,即考虑挠曲电效应之后,梁的挠度会增大,而考虑应变梯度弹性项后,梁的挠度会减小。同时图4还可以看出,挠曲电效应和应变梯度效应都存在尺寸效应,结构尺寸越小,其作用越明显。而对于 SF 和 FL 模型,当结构尺寸比较大时, SF 模型的归一化的最大挠度值是趋向于 FL 模型的,说明此时挠曲电效应起主导作用,应变梯度弹性项的作用不明显。随着几何尺寸减小, FL 模型的挠度值会迅速增大,而 SF 模型会出现拐点,说明此时应变梯度弹性项对挠曲电效应的抑制作用增强。当几何尺寸与材料尺度参数相当时,两者的作用几乎相互抵消,所以此时 SF 模型梁的最大挠度趋近 NF 模型。

改变外加电压的大小及正负,外力 F 随梁的

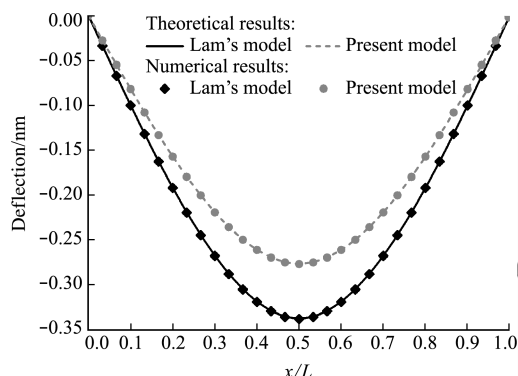


图2 两种模型的理论及数值结果对比
Fig. 2 Comparison of theoretical and numerical results of the two models

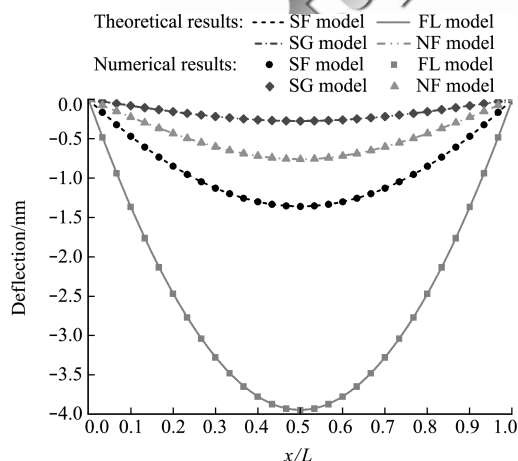


图3 四种模型的简支梁的挠度
Fig. 3 Deflection of simply supported beams of four models

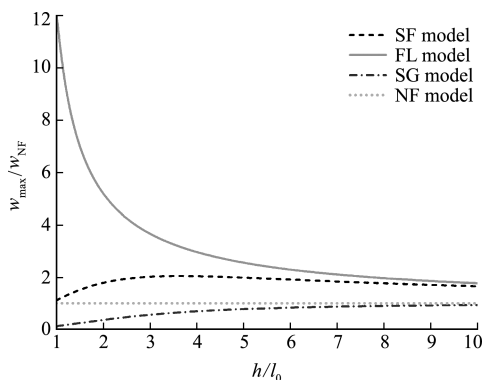


图4 四种模型简支梁的最大归一化挠度
Fig. 4 Maximum normalized deflection of simply supported beams of four models

尺寸缩放,得到如图5所示的SF模型的最大挠度。因为外加电压以等效弯矩的形式作用在梁的两端,从等效弯矩的表达式 $M^* = -\frac{f_{1133}\Delta V}{a_{33}h}A$ 可以看出,电压的正负会影响弯矩的方向,所以电压由负到正的过程中,等效弯矩的作用与集中力的作用逐渐相互抵消,简支梁的挠度也由负变正。当电压 $\Delta V < 0$ 时,随着梁尺寸的减小,最大挠度都是先增大后减小,存在极值点,这与图4的结果一致,应变梯度弹性项会抑制挠曲电效应,也就是梁的等效刚度会增大。当电压 $\Delta V > 0$ 时,因为外加力与外加电压作用方向相反,所以梁的挠度由负变正,也存在极值点。而当电压 $\Delta V = 0$ 时,等效弯矩为0,仅有集中力作用在梁上,此时简支梁的最大挠度表达式为 $w_{\max} = \frac{FL^3}{48k_2} + \frac{FL}{4k_2S_0^2} + \frac{F(1-e^{S_0L})}{2k_1S_0^5(1+e^{S_0L})}$ 。随着梁尺寸的减小,梁的最大挠度随之增大,与图4曲线相吻合。

图3~图5为纳米简支梁的力学响应,接下来将讨论其电学响应。图6为外加电压为0,仅有外加集中力作用下时,SF模型在 $x=L/3$ 处沿厚度方向的电势。由电势的表达式(8)可知,沿梁厚度方向的电势为二次函数,外加电压为0时,梁的上下表面的电势为0,与图6曲线一致。如图6所示,随着挠曲电系数的增大,梁中产生的电势也会随之增大。 $f_{1133}=5\text{ V}$ 时的电势相较于 $f_{1133}=0$ 时增大了2.6%, $f_{1133}=15\text{ V}$ 时的电势相较于 $f_{1133}=10\text{ V}$ 时增大了17.4%,这说明挠曲电系数越大,电势增长越快。因此在挠曲电效应的应用中,应当优先选择挠曲电系数大的材料,以保证获得更高的能量转化效率。

最后,图7给出了在只施加集中力时,SF,FL和NF三种模型在不同挠曲电系数情况下的归一化的能量效率 d^{eff}/d^B 。能量效率定义为施加在梁

上的每单位力载荷产生的电荷量,表示为 $d^{\text{eff}} = Q/F$,其中 $Q = \iint P(x)dx dy$ 为产生的电荷量, F 为外加的集中力。 $d^B = 1.05 \times 10^{-12}$ 为 NF 模型的能量效率。如图7所示,随着梁几何尺寸的减小,FL模型的能量效率持续增高,这验证了挠曲电效应存在尺寸依赖性,而 SF 模型的能量效率则是先增大后减小,也存在与图4和图5中相似的极值点,这再次说明应变梯度弹性项对挠曲电效应具有抑制作用,并且尺寸越小,其抑制作用越明显。因此,在纳米尺度的研究中,应变梯度弹性项的影响非常显著,不可忽略。当梁的尺寸足够大时,SF 和 FL 模型的能量效率趋于相同。此外,对比不同挠曲电系数的能量效率曲线可以发现,更大的挠曲电系数有助于获得更高的能量效率,与图6的结论一致。

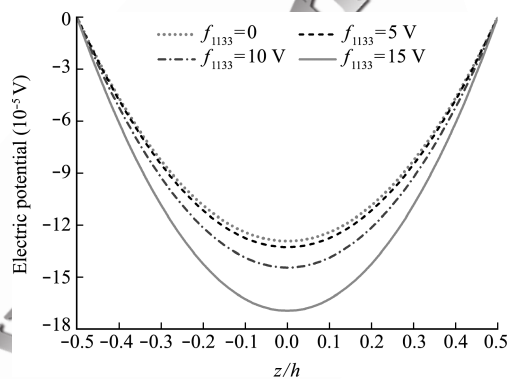


图6 $x=L/3$ 处不同挠曲电系数的电势
Fig. 6 Electrical potential at different flexoelectric coefficients at $x=L/3$

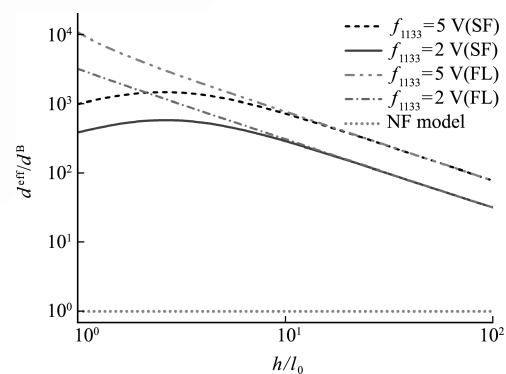


图7 不同模型的能量效率
Fig. 7 Energy efficiency of different models

6 结 论

本文基于全应变梯度弹性理论,利用能量法推得了考虑高阶项的纳米欧拉梁的控制方程和边界条件。并且在传统欧拉梁单元的基础上,创建了一种新的满足 C_2 弱连续的欧拉纳米梁单元。这种新的梁单元包含三个独立的材料尺度参数,有2个节

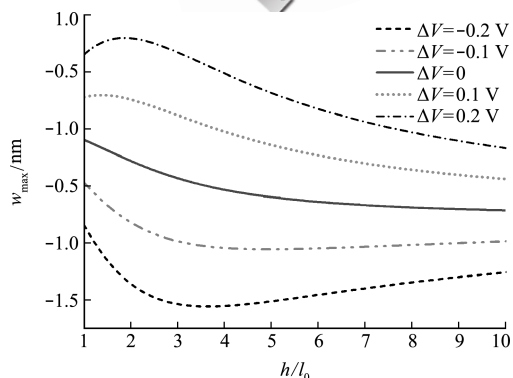


图5 不同电压下 SF 模型的最大挠度
Fig. 5 Maximum deflection of SF models with different voltage

点,6个自由度。而后,从新的欧拉梁控制方程出发,根据有限元理论推得弱形式方程,继而推得梁的刚度方程。最后,用有限单元法求解本文算例简支梁的力电响应。通过分析挠度、电势和能量效率,得出如下结论。(1) 挠曲电效应和应变梯度弹性都存在尺寸依赖性,尤其是当结构的特征尺寸接近材料尺度参数时,二者的作用效果都将变得非常显著。(2) 外加电压相当于在梁的两端施加等效弯矩,电压的正负决定等效弯矩的方向。(3) 应变梯度弹性项对挠曲电效应以及能量的转化存在一定的抑制作用,因此在挠曲电问题中,其影响不可忽略。

参考文献(References):

- [1] Zubko P, Catalan G, Tagantsev A K. Flexoelectric effect in solids[J]. *Annual Review of Materials Research*, 2013, **43**(1):387-421.
- [2] Prost J, Pershan P S. Flexoelectricity in nematic and smectic—A liquid crystals[J]. *Journal of Applied Physics*, 1976, **47**(6):2298-2312.
- [3] Nguyen T D, Mao S, Yeh Y W, et al. Nanoscale Flexoelectricity[J]. *Advanced Materials*, 2013, **25**(7):946-974.
- [4] Petrov A G. Flexoelectricity of model and living membranes[J]. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Biomembranes*, 2002, **1561**(1):1-25.
- [5] Gautschi G. Piezoelectric sensorics: Force, strain, pressure, acceleration and acoustic emission sensors, materials and amplifiers[J]. *Sensor Review*, 2002, **22**(4):363-364.
- [6] Wang X B, Song J H, Zhang F, et al. Electricity generation based on one-dimensional group-III nitride nanomaterials [J]. *Advanced Materials*, 2010, **22**(19):2155-2158.
- [7] Ma W H, Cross L E. Flexoelectricity of barium titanate [J]. *Applied Physics Letters*, 2006, **88**(23):232902.
- [8] Deng Q, Kammoun M, Erturk A, et al. Nanoscale flexoelectric energy harvesting [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(18):3218-3225.
- [9] Kogan S M. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals[J]. *Soviet Physics-Solid State*, 1964, **5**(10):2069-2070.
- [10] Shen S P, Hu S L. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, **58**(5):665-677.
- [11] Zhou Y R, Yang X, Pan D M, et al. Improved incorporation of strain gradient elasticity in the flexoelectricity based energy harvesting from nanobeams [J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2018, **98**:148-158.
- [12] Wang B L, Yang S Y, Sharma P. Flexoelectricity as a universal mechanism for energy harvesting from crumpling of thin sheets [J]. *Physical Review B*, 2019, **100**(3):035438.
- [13] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1):51-78.
- [14] Mindlin R D, Eshel N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, **4**(1):109-124.
- [15] Zhou S J, Li A Q, Wang B L. A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **80**:28-37.
- [16] Deng Q. Size-dependent flexoelectric response of a truncated cone and the consequent ramifications for the experimental measurement of flexoelectric properties [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(10):101007.
- [17] 王凯, 周慎杰, 聂志峰. 应变梯度理论自然邻近混合伽辽金法[J]. 计算力学学报, 2013, **30**(4):543-548. (WANG Kai, ZHOU Shen-jie, NIE Zhi-feng. Mixed natural neighbour Galerkin method for the strain gradient elasticity [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, **30**(4):543-548. (in Chinese))
- [18] Deng F, Deng Q, Yu W S, et al. Mixed finite elements for flexoelectric solids[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(8):081004.
- [19] Deng F, Deng Q, Shen S P. A three-dimensional mixed finite element for flexoelectricity[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2018, **85**(3):031009.
- [20] Toupin R A. The elastic dielectric[J]. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 1956, **5**(6):849-915.
- [21] 杨旭, 周亚荣, 陈玲玲, 等. 基于广义应变梯度理论的纳米梁挠曲电效应研究[J]. 固体力学学报, 2019, **40**(1):21-29. (YANG Xu, ZHOU Ya-rong, CHEN Ling-ling, et al. The flexoelectric response of nanobeam based on the general strain gradient elasticity theory [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2019, **40**(1):21-29. (in Chinese))
- [22] Kong S L, Zhou S J, Nie Z F, et al. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, **47**(4):487-498.

Research on finite element method of nanobeam considering flexoelectricity based on general strain gradient elasticity theory

CHEN Ling-ling, YANG Xu, LIU Yang, WANG Bing-lei*

(School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: Flexoelectricity is a special electromechanical coupling that exists in all dielectrics. It is essentially a linear coupling between strain gradient and polarization. However, the strain gradient introduces high-order partial derivative of displacements, which often make it difficult to solve the flexoelectric problem theoretically. Moreover, studies have shown that the strain gradient elastic term affects the electromechanical coupling responses in nanostructures, but the effect of strain gradient elasticity was mostly ignored in the existing research. Therefore, this paper proposed an effective numerical method that considered both strain gradient elasticity and flexoelectricity. Based on the general strain gradient elasticity theory, this paper established a theoretical model and a finite element model of nano-Euler beams. Three independent material length scale parameters were included in the two models. And an element with two nodes and six degrees of freedom was proposed, which satisfied C_2 weak continuity. Based on the finite element method proposed in this study, a simply supported Euler beam was studied. By analyzing the deflection, electrical potential and energy efficiency, the effects of flexoelectricity and strain gradient elasticity on the electromechanical coupling responses were studied. The results show that the flexoelectricity is size-dependent, and the influence of the strain gradient elasticity on the flexoelectric response of nano-dielectric structures cannot be ignored.

Key words: flexoelectricity; general strain gradient elasticity theory; finite element method; Euler beam; size dependence

引用本文/Cite this paper:

陈玲玲, 杨旭, 刘洋, 等. 全应变梯度挠曲电纳米梁有限单元法研究[J]. 计算力学学报, 2020, 37(5): 545-552.

CHEN Ling-ling, YANG Xu, LIU Yang, et al. Research on finite element method of nanobeam considering flexoelectricity based on general strain gradient elasticity theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, 37(5): 545-552.