第37卷第5期　　计 算 力 学 学 报　　Vol. 37, No. 5
2020年10月　　Chinese Journal of Computational Mechanics　　October 2020

DOI: 10.7511/jslx20191104001

多变量单元结构共振解耦动力优化设计方法

黄海新*[1]，　李　涛[1]，　程寿山[2]

（1.河北工业大学 土木与交通学院，天津 300401；2.交通运输部公路科学研究所，北京 100080）

摘　要：针对截面多变量单元结构的动力优化问题，建立了带频率约束的结构动力优化设计模型，对隐式非线性频率约束函数进行 Taylor 近似展开，给出了截面多变量单元频率梯度函数显式表达式，基于 Kuhn-Tucker 条件构建迭代算法，其中拉格朗日乘子通过建立联合方程组求解，形成了含多变量单元共振解耦优化设计方法。以矩形截面单元结构为算例的结果表明，所给单元多变量算法具有良好的准确性；截面变量对频率的贡献存在主次之分，区分指标可采用梯度值；次要变量的修正因子迭代中可采用定值，且其下限应尽可能降低，利于节约成本。本文工作对多变量复杂截面结构动力优化设计可提供理论指导，提高结构动力优化方法的适用性。

关键词：多变量单元；梯度函数；频率约束；优化设计；拉格朗日乘子

中图分类号：TU318.1；O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1007-4708(2020)05-0530-05

1　引　言

共振引发的剧烈振动对工程结构的危害是巨大的，布劳顿吊桥因士兵齐步走突然断裂[1]、旧塔科马海峡大桥风振摧毁[2]、伏尔加桥因风激和负载蛇形共振[3]以及百花大桥在地震下第5联整体倒塌[4]均表明，将结构自振频率与外载激振的卓越频带这一引发共振的内外部谐同条件纳入初始或加固设计阶段并加以解耦是十分必要的。带频率约束的结构动力优化设计通过管控结构的自振频率，对规避共振、减轻结构振动、提升结构安全性及经济性方面已初显成效[5-9]。其中，与有限元结构模型相结合的优化准则法，工程适用性佳，在迭代求解中采用频率梯度解析式，更凸显其搜索方向明确和求解效率高的优势。

林家浩[5,6]应用优化准则法分别对以直径和截面积为单元变量的钢轴和桁架结构进行了动力优化设计，获得了能避开指定频率禁区的结构造型；王刚[7]综合满应力和固有频率约束优化准则法，以天线伸展臂结构中各个杆件的截面面积为单元设计变量，通过结构尺寸优化获得了最佳结构参数。孙国钧等[8]应用准则法对具有频率约束的复合材料圆柱壳以层厚为变量进行了最轻重量设计；倪长辉等[9]对受基频约束的框架结构就杆件面积进行了设计优化。

上述研究主要局限于仅需单变量即可表征单元重量和刚度特性的杆或膜结构，对梁或壳单元仅考虑梁高、直径或层厚一个截面设计变量，回避了难度更大的双变量或多变量截面单元动力优化设计。究其原因，结构频率对设计变量呈高度非线性且为隐式函数，在多变量频率梯度理论推导和数值实现上较为困难。后期对梁、壳等多变量非线性单元结构的动力优化，频率梯度的求解不得不转向寻求差分法、有限摄动法和遗传算法等[10-15]工作量大、耗时多的数值解法，而基于梯度解析式的优化研究却有些停滞。

为此，本文针对截面多变量单元结构的动力优化设计，建立了结构动力优化设计模型，并结合 Kuhn-Tucker 条件和 Taylor 展开式给出采用梯度理论表达式的优化求解方法。以矩形截面单元结构为算例进行了验证，发现单元截面参数对动力优化设计的贡献度不同，据此提出了几点简化设计措施并加以验证。本文工作有助于结构动力优化设计从单变量简单截面向多变量复杂截面的拓展，扩大结构动力优化方法的应用范围。

2　多变量单元结构动力优化模型

设结构的拓扑构型给定且离散为 N 个单元，单元截面尺寸为待优化设计变量 $X=\{X_1, X_2, \cdots, X_N\}^{\mathrm{T}}$，其中含 Q 个尺寸变量的第 i 单元设计向量为 $\mathbf{X}_i=\{x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{Qi}\}^{\mathrm{T}}$。结构的任意阶自振频率

收稿日期：2019-11-04；修改稿收到日期：2019-12-24.
基金项目：国家重点研发计划(2017YFE0103000)；天津市交通运输科技发展计划(2018-35)；河北省交通运输厅科技项目(TH-201916)资助项目.
作者简介：黄海新*(1976-)，男，博士，教授(E-mail: hhxhebut@126.com).

须规避外部激励对应的高能频带区间 $(\underline{\omega}^2, \overline{\omega}^2)$，且设计变量应在给定的区间内。满足上述约束条件下以结构总质量为极值的结构动力优化设计模型为

目标函数 $$\min.W(x)=\sum_{i=1}^{N}W_i(X_i) \tag{1}$$

约束条件 $$\omega_d^2 \leqslant \underline{\omega}^2 \tag{2}$$

$$\omega_m^2 \geqslant \overline{\omega}^2 \tag{3}$$

$$X_i^{(l)} \leqslant X_i \leqslant X_i^{(u)} \tag{4}$$

式中 W_i 为各单元质量，ω_d 和 ω_m 分别为结构第 d 和 $m(m=d+1)$ 阶圆频率，$X_i^{(u)}$ 和 $X_i^{(l)}$ 是设计变量的上下界。

优化模型中，圆频率由结构自由振动方程获得

$$[K]\{u\}=\omega^2[M]\{u\} \tag{5}$$

式中 $\{u\}$为振型向量，$[K]$ 和 $[M]$ 分别为总刚度矩阵和总质量矩阵，其由单元阵 $[k_i]$ 和 $[M_i]$ 集成。

$$[k_i]=\sum_{r=0}^{r_k}\cdots\sum_{R=0}^{R_k}\cdots\sum_{S=0}^{S_k}[k_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}]x_{1i}^r\cdots x_{ji}^R\cdots x_{Qi}^s \tag{6}$$

$$[M_i]=\sum_{r=0}^{r_M}\cdots\sum_{R=0}^{R_M}\cdots\sum_{S=0}^{S_M}[M_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}]x_{1i}^r\cdots x_{ji}^R\cdots x_{Qi}^s \tag{7}$$

同理，单元质量亦可表达为

$$W_i(X_i)=\sum_{r=0}^{r_M}\cdots\sum_{R=0}^{R_M}\cdots\sum_{S=0}^{S_M}L_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}x_{1i}^r\cdots x_{ji}^R\cdots x_{Qi}^s \tag{8}$$

式中 $[k_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}]$ 与 $[M_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}]$ 是不变的常量阵，r,R 和 s 为与常量阵对应变量的幂指数，$L_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}$ 是常量。

3　多变量单元优化模型迭代算法

结合式(1～4)和式(8)，依据优化模型可构造拉格朗日函数：

$$\begin{aligned}\overline{W}=&\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{r_M}\cdots\sum_{R=0}^{R_M}\cdots\sum_{S=0}^{S_M}L_i^{(r,\cdots,R,\cdots,s)}x_{1i}^r\cdots x_{ji}^R\cdots x_{Qi}^s+\\&\mu_1(\omega_d^2-\underline{\omega}^2)-\mu_2(\omega_m^2-\overline{\omega}^2)-\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{Q}\xi_{ji}(x_{ji}-x_{ji}^{(l)})+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{Q}\eta_{ji}(x_{ji}-x_{ji}^{(u)})\end{aligned} \tag{9}$$

式中 u_1，u_2，ξ 和 η 为拉格朗日乘子。

对任意单元变量 $x_{ji}(j=1,Q;i=1,N)$，其最优解应满足 Kuhn-Tucker 条件[5,6]。引入变量修改因子 λ_j，可构造出 i 单元第 j 个设计变量的域内迭代式为

$$x_{ji}^{k+1}=f_{ji}\cdot x_{ji}^k，当\ x_{ji}^{(l)}<f_{ji}\cdot x_{ji}^k<x_{ji}^{(u)} \tag{10}$$

式中 x_{ji}^k 和 x_{ji}^{k+1} 分别为第 k 和 $k+1$ 步设计变量值，f_{ji} 为对应的修正系数

$$f_{ji}=\lambda_j+\frac{1-\lambda_j}{\partial W_i/\partial x_{ji}}\left[\mu_2\frac{\partial\omega_m^2}{\partial x_{ji}}-\mu_1\frac{\partial\omega_d^2}{\partial x_{ji}}\right] \tag{11}$$

自振频率 ω_d^2 对单元变量 x_{ji} 的梯度解析式为[5]

$$\frac{\partial\omega_d^2}{\partial x_{ji}}=\{\mu_d\}^{\mathrm T}\frac{\partial[K]}{\partial x_{ji}}\{\mu_d\}-\omega_d^2\{\mu_d\}^{\mathrm T}\frac{\partial[M]}{\partial x_{ji}}\{\mu_d\} \tag{12}$$

对隐式频率函数在当前第 k 步迭代点 X_i^k 的邻域内做 Taylor 一次近似展开，同时为进一步提升收敛性，引入频率修正因子 β[6]，有

$$\beta(\underline{\omega}^2-\omega_d^2)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\omega_d^2}{\partial x_{ji}}(x_{ji}^{k+1}-x_{ji}^k) \tag{13}$$

$$\beta(\overline{\omega}^2-\omega_m^2)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial\omega_m^2}{\partial x_{ji}}(x_{ji}^{k+1}-x_{ji}^k) \tag{14}$$

联立方程(13,14)可求解 u_1 和 u_2 的数值，从而获得对应的结构全部变量值 $X_i^{k+1}(i=1,N)$。求解中，称每次迭代后越出约束界限内的变量为被动变量，其对应的频率变化量要做分类处理。

4　算例分析

选取矩形截面双变量单元结构进行动力优化设计。钢筋混凝土矩形截面梁全长 10 m，等分为 10 段，两端固结，单元序号从左到右依次为 1～10，如图 1 所示。取每段梁高 h 和梁宽 b 为设计变量，初值 $h=1$ m，变化区间为[0.5 m，2 m]，$b=0.7$ m，变化区间为[0.5 m，0.9 m]。弹性模量 $E=2.4\times10^8\ \mathrm{t/m^2}$，密度为 $2.45\ \mathrm{t/m^3}$。跨中有非结构质量，占初始结构总重量的 1/10。要求基频小于 $\underline{\omega}=100/\mathrm{s}$，第 2 阶频率大于 $\overline{\omega}=300/\mathrm{s}$。下面各表中质量均为未乘 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 的相对质量。

4.1　优化结果及准确性检验

计算中对由被动变量引起的结构频率变化量划分为仅宽度变量出界、仅高度变量出界和宽度高度变量均出界 3 类加以处理。表 1 给出了各单元双变量的最终迭代结果。

可见，在宽度和高度 2 个变量的结构动力优化过程中，截面宽度变量全部优化到变量约束下限，此时优化结果与文献[5]的算例 3 截面宽度取下限值 0.5 m 时仅对高度进行单变量优化的结果完全相同，这验证了本文单元多变量优化算法的准确性。

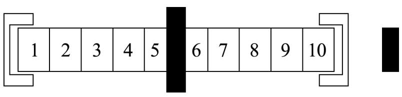

图 1　混凝土矩形截面梁及其截面

Fig. 1　Concrete beam with rectangular cross section

图2和图3给出了单元1和单元5的截面高度、宽度和第2阶频率梯度迭代过程曲线。

4.2 优化结果影响因素探究

4.2.1 单元截面宽度变量对优化影响

由图2单元1和单元5变量的迭代曲线可知，宽度变量均很早就达到下限，此后仅高度变量不断迭代更新，直至收敛，且其他单元亦符合这一特征。姑且将对结构频率和工程经济性影响较弱的截面宽度称为次要变量，而截面高度称为主要变量。此种次要变量达到下限，双变量优化问题转化为单变量优化问题的现象对工程设计是利好，主次区分对提升结构优化设计的效率能给予有效指导，即一旦某变量确定为次要变量，则可直接先将其压到下限，这可大大简化优化工作量。但如何区分主次变量，依据的区分指标是什么值得探究。通过观察迭代修正式(10,11)，初步推断是频率梯度对变量起主导作用，再结合图3可以看出，各单元高度变量对应的梯度值均远大于宽度变量对应的梯度值，是影响结构频率修正最主要的变量，其最终优化结果必然导致宽度变量均压至变量约束下限。

为进一步分析次要变量对结构频率、工程经济性及主要变量的影响，本文基于算例又选取3种宽度变量约束工况进行探究。工况一，各单元宽度变量下限均为0.2 m；工况二，各单元宽度变量下限均为0.3 m；工况三，单元5和单元6的宽度变量下限为0.5 m，其余单元宽度变量下限为0.3 m。3种工况的最终优化结果列入表2。

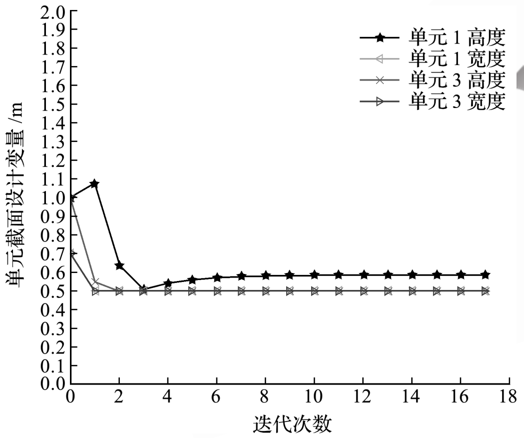

图2 单元高度和宽度变量迭代曲线

Fig.2 Iterative curve of height and width

表1 单元最终高度、宽度和相对质量

Tab.1 Final height, width and relative mass

单元号	1	2	3	4	5
高度/m	0.5873	0.5	0.5	0.5	0.5
文献[6]高度/m	0.587	0.5	0.5	0.5	0.5
宽度/m	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
相对质量			0.6468		
文献[6]相对质量			0.647		

由表2可知，对结构中所有单元宽度变量下限均相等的工况一和工况二而言，结构最终优化结果是宽度变量均优化到约束下限，并且截面高度基本无变化。但观察工况三发现，虽然各单元宽度变量亦达到约束下限，但是截面高度的最终优化值与工况一和工况二不同，表现为随着部分单元宽度变量下限的调高(单元5和单元6由0.3 m变到0.5 m)，部分单元高度的最终优化结果也随之增加(单元1由0.5873 m升到0.5990 m)，结构质量整体也增加了13.3%。

依据上述分析，建议在确定宽度变量约束范围并且高度变量能满足频率改变要求时，基于满足静力和构造要求的前提下可尽量将宽度变量约束下限值设为较小的数值，这利于节约工程成本。

4.2.2 单元多变量修改因子的缩并简化

文献研究表明[5,6]，变量修正因子对结构变量收敛性至关重要，迭代过程中需不断调整，本算例

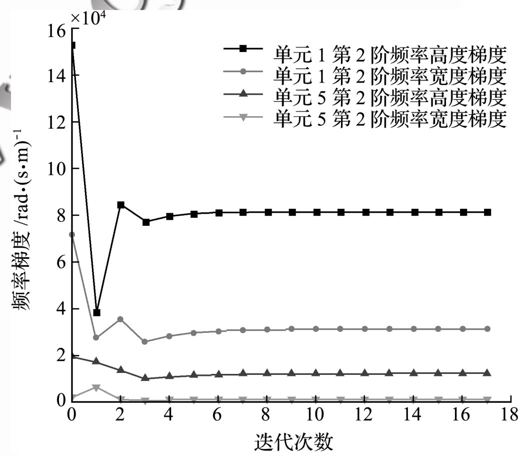

图3 单元频率梯度迭代曲线

Fig.3 Iteration curve of frequency gradient

表2 不同宽度变量下优化结果

Tab.2 Optimum results under different widths

	单元编号	1	2	3	4	5
工况一	截面宽度/m	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	截面高度/m	0.5873	0.5	0.5	0.5	0.5
	相对质量			0.2587		
工况二	截面宽度/m	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
	截面高度/m	0.5873	0.5	0.5	0.5	0.5
	相对质量			0.3881		
工况三	截面宽度/m	0.3	0.3	0.3	0.3	0.5
	截面高度/m	0.5990	0.5	0.5	0.5	0.5
	相对质量			0.4399		

计算过程中即采用初期取小值、后期取大值的方式来确保收敛稳定性。但受矩形截面次要变量分析的启示，本文设想是否可将次要变量修改因子加以简化，即迭代中取恒定的数值。为检验这一想法对优化结果的影响，表 3 给出了迭代中 $\lambda_2=0.4$ 定值时的工况二与 λ_2 前后取不同数值时工况一的优化结果。

由表 3 可知，相比于宽度和高度修改因子设置为前后变化的相同数值，当次要变量宽度修改因子改为定值时，两者最终优化结果完全相同。据此初步建议，在迭代优化中可将次要变量取不变的修改因子，以降低编程的难度和计算成本。

表 3　次要变量修改因子取值对优化结果影响

Tab. 3　Effect of secondary correction factor on results

迭代次数		1	2	3	4	5	6	7	8～16
工况一	λ_2	0.3	0.5	0.8	0.8	0.85	0.85	0.9	0.9
	相对质量					0.6468			
工况二	λ_2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	相对质量					0.6468			

5　结　论

（1）基于有限元技术和优化准则法，对截面多变量单元结构建立了带频率约束的动力优化设计模型，对隐式非线性频率函数采用 Taylor 展开，给出了多变量单元频率梯度显式表达式，基于 Kuhn-Tucker 条件构建迭代算法，形成含多变量单元共振解耦优化设计方法，为多变量复杂截面结构的动力优化提供了理论依据和方法指导。

（2）通过建立方程组求解与频率约束条件相关的拉格朗日乘子，迭代计算中变量更新式具体，搜索方向明确，通过算例验证了所提方法的准确性，算法执行中应注意对被动变量的分类处理。

（3）以矩形截面单元结构为算例，发现截面多个变量对频率的贡献存在主次之分，并可依据梯度值来加以区分，次要变量的修正因子迭代中可采用定值，且其约束下限应尽可能降低，这利于节约计算和工程成本。

参考文献（References）：

[1]　冯　鹏，金飞飞，叶列平，等. 人行天桥结构振动舒适度定量化与振动特性实测研究[J]. 振动工程学报，2013，**26**(4)：545-553.（FENG Peng, JIN Fei-fei, YE Lie-ping, et al. Quantification of pedestrian's comfort level and dynamic properties of footbridge vibration based on insitu measurement[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, **26**(4): 545-553. (in Chinese))

[2]　项海帆，葛耀君. 现代桥梁抗风理论及其应用[J]. 力学与实践，2007，**29**(1)：1-13.（XIANG Hai-fan, GE Yao-jun. Modern theory for wind resistant bridge and its application[J]. *Mechanics and Engineering*, 2007, **29**(1): 1-13. (in Chinese))

[3]　杨詠昕，周　锐，罗东伟，等. 不同槽宽分体箱梁桥梁的涡振及其控制措施[J]. 工程力学，2017，**34**(7)：30-40.（YANG Yong-xin, ZHOU Rui, LUO Dong-wei, et al. Vortex-induced vibration and its control for twin box girder bridges with various slot widths[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(7): 30-40. (in Chinese))

[4]　宋　飞，李建中，管仲国. 汶川地震百花大桥震害分析[J]. 振动与冲击，2015，**34**(8)：121-128.（SONG Fei, LI Jian-zhong, GUAN Zhong-guo. Seismic damage analysis of Baihua Bridge under Wenchuan earthquake[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, **34**(8), 121-128. (in Chinese))

[5]　林家浩. 有频率禁区的结构优化设计[J]. 大连工学院学报，1981，**20**(1)：27-37.（LIN Jia-hao. Optimum design of structures with specified non-frequency-band[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1981, **20**(1): 27-37. (in Chinese))

[6]　林家浩. 优化准则设计中的双因子算法[J]. 大连工学院学报，1984，**23**(2)：105-112.（LIN Jia-hao. A bi-factor algorithm for adjusting structural parameters[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1984, **23**(2): 105-112. (in Chinese))

[7]　王　刚. 大型空间天线伸展臂的结构优化设计[D]. 西北工业大学，2006.（WANG Gang. Optimization Design of Large-Scale Space Antenna Deployable Truss[D]. Northwestern Polytechnical University, 2006. (in Chinese))

[8]　孙国钧，茅人杰. 频率约束下复合材料圆柱壳的最轻重量设计[J]. 振动工程学报，1997，**10**(4)：470-473.（SUN Guo-jun, MAO Ren-jie. Minimum weight design of composite circular cylinder under frequency constraint[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1997, **10**(4): 470-473. (in Chinese))

[9]　倪长辉，阎　军，程耿东. 精确频率约束下框架结构的尺寸优化[J]. 固体力学学报，2010，**31**(s1)：223-231.（NI Chang-hui, YAN Jun, CHENG Geng-dong. Size optimization of 2D framework with exact frequency constraint[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(s1): 223-231. (in Chinese))

[10] Lofrano E, Paolone A, Vasta M. Identification of uncertain vibrating beams through a perturbation approach[J]. *Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems*, 2016, **2**(2): C4015006.

[11] 张 鹏,李宏男,宋钢兵,等. 基于 H_∞ 范数的输电塔结构动力优化[J]. 计算力学学报, 2015, **32**(5): 608-612. (ZHANG Peng, LI Hong-nan, SONG Gang-bin, et al. Dynamic optimization of transmission tower based on H_∞ norm[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(5): 608-612. (in Chinese))

[12] Luo B, Ding M M, Han L F, et al. Structural optimization of spoke single-layer cable-net structures based on a genetic algorithm[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2018, **31**(3): 04018012.

[13] Sharafil P, Hadi M N S, Teh L H. Geometric design optimization for dynamic response problems of continuous reinforced concrete beams[J]. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 2014, **28**(2): 202-209.

[14] Zuo W J, Bai J T, Li B. A hybrid OC-GA approach for fast and global truss optimization with frequency constraints[J]. *Applied Soft Computing*, 2014, **14**: 528-535.

[15] Kaveh A, Zolghadr A. Comparison of nine meta-heuristic algorithms for optimal design of truss structures with frequency constraints[J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, **76**: 9-30.

Optimal method of resonance decoupling design for multivariable cross-sectional structure

HUANG Hai-xin*[1], LI Tao[1], CHENG Shou-shan[2]

(1. School of Civil and Transportation Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China;
2. Research Institute of Highway Ministry of Transport, Beijing 100080, China)

Abstract: Dynamic optimization design model for multivariable cross-sectional structures with frequency constraints is studied. The implicit nonlinear frequency constraint function is approximately obtained by Taylor's expansion formulation, and the explicit expression of the gradient function of frequency to cross-sectional design variables is given. Based on the Kuhn-Tucker condition, an iteration algorithm consisting of the constraints and the objective function gradient and Lagrange multipliers is derived by solving a set of simultaneous equations is deduced, which constitutes the optimization method of resonance decoupling design for multivariable cross-sectional structures. The results show that the accuracy of the algorithm is satisfied in terms of calculation of rectangular section structure. It is found that the contribution of cross-sectional variables to frequency is different, frequency gradient values can be taken as an indicator to distinguish dominant and inferior variables. The modified factors of inferior variables may be constant in the iteration solution, and its lower limit should be reduced as much as possible, which is good for cost savings. The work done here can provide theoretical guidance and improve applicability for structural dynamic optimization design of complex cross sections.

Key words: multivariate element; gradient function; frequency constraints; optimization design; Lagrange multiplier

引用本文/Cite this paper:
黄海新,李 涛,程寿山. 多变量单元结构共振解耦动力优化设计方法[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(5): 530-534.
HUANG Hai-xin, LI Tao, CHENG Shou-shan. Optimal method of resonance decoupling design for multivariable cross-sectional structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5): 530-534.