

DOI: 10.7511/jslx20181024001

基于 Hopf-Cole 变换的 Burgers 方程 初边值问题的 Sinc-Galerkin 法

杨 梅*, 赵凤群, 郭 冲

(西安理工大学 理学院, 西安 710054)

摘 要:利用 Sinc-Galerkin 法数值求解 Burgers 方程的初边值问题。首先,用 Hopf-Cole 变换将二阶非线性的 Burgers 方程变换为二阶线性方程,同时把第一类边界条件变为第二类边界条件。时间上的导数采用 θ 加权格式离散,空间导数采用 Sinc-Galerkin 法离散,端点处分别引入权函数处理变换后的第二类边界条件。最后,通过数值算例验证了 Sinc-Galerkin 法的指数收敛性,与精确解相比,本文构造的数值格式精度高,能够有效捕捉激波等物理现象。

关键词:Burgers 方程;Sinc-Galerkin 法;Hopf-Cole 变换;第二类边界条件

中图分类号:O241.82 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2019)06-0807-06

1 引 言

在自然科学和社会科学中存在很多非线性方程,孤立子、混沌和分形等现象都可以归结为非线性现象,描述它们的数学模型都是非线性方程。Burgers 方程就是一个典型的非线性方程,其一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\alpha > 0) \quad (1)$$

方程(1)通常也称为非线性的耗散(热传导、扩散和粘性)方程^[1],其中, μ 为粘性(耗散)系数,在流体力学中,式(1)常作为 Navier-Stokes 方程的简化模型,同时也应用在水流环境、冶金、生物以及大气等方面^[2],具有广泛的物理意义,因此求解 Burgers 方程具有重要的实际意义。

文献[3]将 Burgers 方程转化为二阶非线性常微分方程来求解,但转换后的非线性方程并没有实现降阶,求解其精确解依然十分困难。因此,寻求数值求解 Burgers 方程的高精度方法成为一个重要的课题,引起了学者们的关注。Sharan 等^[4]基于多重网格数值求解了 Burgers 方程,采用 C-N 格式离散空间导数,建立了一个无条件稳定的离散格式,但该数值格式精度不够高。项利峰等^[5]用

MPS-MAFL 数值方法求解了 Burgers 方程,该方法虽然计算过程较简单,但精度也不够高。Sahyoun 等^[6,7]将聚类 POD(正交分解)方法应用到 Burgers 方程中,简化了模型,实现了降阶,比传统的 POD 有显著的改进。Kattiyapirak 等^[8]用同伦分析法来求解 Burgers 方程的近似解析解,该方法可以通过调整辅助参数和辅助函数的值退化为 Adomian 方法^[9],因此,同伦分析方法更通用,更灵活,在比以前获得的更大的域上获得更准确的结果。

Stenger^[10]用 Sinc 方法求解微分方程边值问题,着重研究了线性和非线性二阶常微分方程,以及平面上一些线性椭圆和抛物线型偏微分方程的数值解,这种方法假设解在区间的内部是解析的,忽略了区间端点处可能出现的奇异性。Smith 等^[11]用 Sinc 方法求解了四阶微分方程,指出该方法的指数收敛速度为 $O(e^{-k\sqrt{m}})$ 。El-Gamel 等^[12]用 Sinc 方法求解了六阶线性微分方程边值问题,指出 Sinc-Galerkin 方法是数值求解这类问题的一个非常有效的工具。Zarebnia 等^[13]用 Sinc 方法求解了 Troesch 问题,对该方法的收敛性进行了分析,证明该方法是呈指数收敛的,同时实现了一些数值例子,并将所得的数值结果与同伦摄动法、拉普拉斯法、摄动法和样条法做了对比。El-Gamel 等^[14]提出了求解双调和问题的 Sinc 方法,表明 Sinc 方法是数值求解这个方程的一个非常有效的工具,即使奇异点出现在边界上,Sinc 方法也能得到很好

收稿日期:2018-10-24;修改稿收到日期:2018-12-19.

基金项目:陕西省科技攻关(2015GY004)资助项目.

作者简介:杨 梅*(1993-),女,硕士生
(E-mail:mathyangm@163.com);
赵凤群(1963-),女,博士,教授.

的结果。通过对比在同一网格点处解的最大模误差,发现 Sinc 方法比与拉普拉斯 LM, LGSM, DM 和 BSM 方法更精确^[15]。

本文用 Sinc 方法求解了 Burgers 方程初边值问题。介绍了 Burgers 方程的应用背景和研究进展。用 Hopf-Cole 变换^[16]将 Burgers 方程转化成含第二类边界条件的二阶线性偏微分方程,采用 θ 加权格式得到了关于时间的半离散格式。介绍了 Sinc 函数数值逼近基本原理,对空间变量使用 Sinc-Galerkin 方法,得到 Burgers 方程的全离散格式。通过数值算例验证了该数值格式的有效性。

2 Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换及关于时间的半离散格式

考虑如下 Burgers 方程,

$$u_t + uu_{xx} = \mu u_{xx} \quad (x \in (a, b), t \in (0, T]) \quad (2)$$

满足初值条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in (a, b)) \quad (3)$$

及边界条件

$$u(a, t) = 0 \quad (u(b, t) = 0, t \in (0, T]) \quad (4)$$

式中 粘性系数 $\mu > 0$, $u_0(x)$ 是关于变量 x 的给定函数。

通过使用 Hopf-Cole 变换^[16]

$$u(x, t) = -2\mu \frac{v_x(x, t)}{v(x, t)} \quad (5)$$

方程(2)可转换成线性扩散方程

$$v_t = \mu v_{xx}(x, t) \quad (6)$$

初值条件为

$$v(x, 0) = v_0(x) = \exp \left[-\int_a^x \frac{u_0(s)}{2\mu} ds \right] \quad (7)$$

边界条件(3)变成了 Neumann 边界条件

$$v_x(a, t) = 0, \quad v_x(b, t) = 0 \quad (8)$$

于是将求解问题(2~4)转化为求解问题(6~8)。

首先,对方程(6)关于时间 t 用 θ 加权格式离散,

$$[v(x, t_{n+1}) - v(x, t_n)]/\tau = \mu[\theta v_{xx}(x, t_{n+1}) + (1-\theta)v_{xx}(x, t_n)] + r_{t,n} \quad (9)$$

式中 $\theta \in [0, 1]$, $t_n = n\tau$ ($n=0, 1, \dots, [T/\tau]$), τ 是时间步长。记 $v(x, t_n) \approx v^n(x)$, 舍去截断误差 $R_{t,n} = \tau r_{t,n}$, 可得问题(6~8)关于时间 t 的半离散格式

$$v^{n+1}(x) = v^n(x) + \mu\tau[\theta v_{xx}^{n+1}(x) + (1-\theta)v_{xx}^n(x)] \quad (10)$$

$$v_x^n(a) = 0, \quad v_x^n(b) = 0 \quad (n=0, 1, \dots, [T/\tau] - 1) \quad (11)$$

$$v^0(x) = v_0(x) \quad (12)$$

3 Burgers 方程的 Sinc-Galerkin 离散格式

3.1 Sinc 函数及其数值逼近基本原理

Sinc 函数及其数值逼近的基本原理可参考文献[17]。

在整个实轴 R 上, Sinc 函数定义为

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \quad (13)$$

对于步长 h 和整数 k , Sinc 函数的第 k 次平移和伸缩定义为

$$S(k, h)(x) = \text{sinc} \left[\frac{x - kh}{h} \right] \quad (14)$$

对于整个实轴上的函数 $f(x)$, 其 Whittaker 基展开式定义为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \text{sinc} \left[\frac{x - kh}{h} \right] \quad (15)$$

且有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \quad (16)$$

为了在有限区间 (a, b) 上得到如上结果, 将区间 (a, b) 映射到实轴 R 上, 令

$$\phi(x) = \ln \left[\frac{x-a}{b-x} \right] \quad (17)$$

则 (a, b) 上的基函数是

$$S_k(x) = S(k, h) \circ \phi(x) = \text{sinc} \left[\frac{\phi(x) - kh}{h} \right] \quad (k \in Z) \quad (18)$$

并且对 (a, b) 上的函数有如下结论。

定理 1^[17] 记 $B(D)$ 为区域 D 上的解析函数类, 若 $\phi' f \in B(D)$, 则有

$$\left| f(x) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k) S_k(x) \right| \leq \frac{N(\phi' f, D)}{2\pi d \sinh(\pi d/h)} \leq \frac{N(\phi' f, D)}{2\pi d} e^{-\pi d/h} \quad (19)$$

式中 $x_k = \phi^{-1}(kh) = \frac{a + be^{kh}}{1 + e^{kh}}$ ($x_k \in (a, b)$)。若存在正的常数 α, β 和 C , 使得

$$|f(x)| \leq C \begin{cases} e^{-\alpha|\phi(x)|} & (x \in \Gamma_a, \\ \Gamma_a = \{x \in (a, b) : \phi(x) \in (-\infty, 0)\}) \\ e^{-\beta|\phi(x)|} & (x \in \Gamma_b, \\ \Gamma_b = \{x \in (a, b) : \phi(x) \in (0, +\infty)\}) \end{cases} \quad (20)$$

且取 $N = \left[\frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right]$, $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha M}} \leq \frac{2\pi d}{\ln 2}$, 则有

$$\left| f(x) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_k) S_k(x) \right| \leq C_1 \sqrt{M} e^{-\sqrt{\pi d a M}} \quad (21)$$

式中 C_1 由 f, d, ϕ 和 D 确定。

定理 2^[17] 若函数 f/ϕ' 满足式(20), 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=-M}^N \frac{f(x_k)}{\phi'(x_k)} \right| \leq C_2 e^{-\sqrt{\pi d a M}} \quad (22)$$

式中 N 和 h 取值如定理 1, C_2 由 f, d, ϕ 和 D 确定。

定理 1 和定理 2 表明, Sinc 数值方法是指数收敛的。

可知 Sinc 函数 $S_j(x) = S(j, h) \circ \phi(x)$ 在 $x_k = \phi^{-1}(kh)$ 处的函数值和一阶和二阶导数值满足

$$\delta_{jk}^{(0)} \equiv [S(j, h) \circ \phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases} 1 & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \quad (23)$$

$$\delta_{jk}^{(1)} \equiv h \frac{d}{d\phi} [S(j, h) \circ \phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases} 0 & (j=k) \\ (-1)^{k-j}/(k-j) & (j \neq k) \end{cases} \quad (24)$$

$$\delta_{jk}^{(2)} \equiv h^2 \frac{d^2}{d\phi^2} [S(j, h) \circ \phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases} -\pi^2/3 & (j=k) \\ -2(-1)^{k-j}/(k-j)^2 & (j \neq k) \end{cases} \quad (25)$$

3.2 Burgers 方程的 Sinc-Galerkin 离散格式

选取 Sinc 函数(18)作为基函数, 对式(10)使用 Galerkin 法^[18], 有

$$\begin{aligned} (v^{n+1}(x), S_j(x)) &= (v^n(x), S_j(x)) + \\ &\mu \tau \theta (v_{xx}^{n+1}(x), S_j(x)) + \\ &\mu \tau (1 - \theta) (v_{xx}^n(x), S_j(x)) \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $S_j(x) = S(j, h) \circ \phi(x) (j = -M-1, -M, \dots, N, N+1)$ 。

考虑 Neumann 边界条件(11), 在左右端点处引入基函数, 分别为

$$\omega_a(x) = \frac{(2x+b-3a)(b-x)^2}{(b-a)^3}$$

$$\omega_b(x) = \frac{(-2x+3b-a)(x-a)^2}{(b-a)^3}$$

设 $v^n(x) = c_{-M-1}^n \omega_a(x) + \sum_{k=-M}^N c_k^n \xi_k(x) + c_{N+1}^n \omega_b(x)$ (27)

式中 $\xi_k(x) = S(k, h) \circ \phi(x) [g(x)/\phi'(x)]$

其中 $g(x)$ 起调整权重的作用。

内积定义为

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$$

$\omega(x)$ 为内积权函数。利用

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^N \frac{f(x_k)}{\phi'(x_k)}$$

以及式(23~25), 有

$$(v^n(x), S_j(x)) = h \frac{g(x_j) \omega(x_j)}{(\phi'(x_j))^2} \left[\omega_a(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \times c_{-M-1}^n + \sum_{k=-M}^N \delta_{k,j}^{(0)} c_k^n + \omega_b(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} c_{N+1}^n \right] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (v_{xx}^n(x), S_j(x)) &= h \frac{g(x_j) \omega(x_j)}{(\phi'(x_j))^2} \left\{ \omega_a''(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \times \right. \\ &c_{-M-1}^n + \sum_{k=-M}^N \left\{ \frac{1}{h^2} \delta_{k,j}^{(2)} (\phi'(x_j))^2 + \frac{1}{h} \delta_{k,j}^{(1)} \times \right. \\ &\left. \left[\phi''(x_j) + 2\phi'(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \left(\frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} \right)' \right] + \right. \\ &\left. \left. \delta_{k,j}^{(0)} \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \left(\frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} \right)'' \right\} c_k^n + \omega_b''(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} c_{N+1}^n \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

记 $(a1)_j = \omega_a(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)}$, $(a2)_j = \omega_a''(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)}$

$$(b1)_j = \frac{1}{h^2} (\phi'(x_j))^2$$

$$(b2)_j = \frac{1}{h} \left[\phi''(x_j) + 2\phi'(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \left(\frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} \right)' \right]$$

$$(b3)_j = \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)} \left(\frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} \right)''$$

$$(c1)_j = \omega_b(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)}$$

$$(c2)_j = \omega_b''(x_j) \frac{\phi'(x_j)}{g(x_j)}$$

$(j = -M-1, -M, \dots, N, N+1)$

于是, 由式(28,29)得式(10,11)的离散格式为

$$AC^{n+1} = BC^n \quad (30)$$

式中

$$C^n = [c_{-M-1}^n, c_{-M}^n, \dots, c_N^n, c_{N+1}^n]^T$$

$$A_{ij} = \begin{cases} (a1)_{j-M-2} - \tau\mu\theta(a2)_{j-M-2} & (i=1; j=1, \dots, m) \\ -\tau\mu\theta[(b1)_{j-M-2} \delta_{k,j}^{(2)} + (b2)_{j-M-2} \delta_{k,j}^{(1)} + (1 - \tau\mu\theta(b3)_{j-M-2}) \delta_{k,j}^{(0)}] & (i=2, \dots, m-1; j=1, \dots, m) \\ (c1)_{j-M-2} - \tau\mu\theta(c2)_{j-M-2} & (i=m; j=1, \dots, m) \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} (a1)_{j-M-2} - \tau\mu(1-\theta)(a2)_{j-M-2} & (i=1; j=1, \dots, m) \\ -\tau\mu(1-\theta)[(b1)_{j-M-2} \delta_{k,j}^{(2)} + (b2)_{j-M-2} \delta_{k,j}^{(1)} + (1 - \tau\mu(1-\theta)(b3)_{j-M-2}) \delta_{k,j}^{(0)}] & (i=2, \dots, m-1; j=1, \dots, m) \\ (c1)_{j-M-2} - \tau\mu(1-\theta)(c2)_{j-M-2} & (i=m; j=1, \dots, m) \end{cases}$$

$$m = M + N + 3$$

初值 C^0 可由方程 $QC^0 = V^0$ 获得, 其中

$$V^0 = [v^0(x_{-M-1}), v^0(x_{-M}), \dots, v^0(x_N), v^0(x_{N+1})]^T$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \omega_a(x_{j-M-2}) & (i=1; j=1, \dots, m) \\ \delta_{k,j}^{(0)} [g(x_{j-M-2})/\phi'(x_{j-M-2})] & (i=2, \dots, m-1; j=1, \dots, m) \\ \omega_b(x_{j-M-2}) & (i=m; j=1, \dots, m) \end{cases}$$

求解式(30)可得 Burgers 方程的初边值问题(10~12)的半离散解为

$$v(x, t_n) \approx c_{-M-1}^n \omega_a(x) + \sum_{k=-M}^N c_k^n \xi_k(x) + c_{N+1}^n \omega_b(x) \quad (a \leq x \leq b, t_n = n\tau, n = 1, 2, \dots) \quad (31)$$

数值解为

$$v(x_j, t_n) \approx c_{-M-1}^n \omega_a(x_j) + c_j^n \frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} + c_{N+1}^n \omega_b(x_j) \quad (j = -M-1, \dots, N+1; n = 1, 2, \dots) \quad (32)$$

而原问题的半离散解为

$$u(x, t_n) = -2\mu \frac{v_x(x, t_n)}{v(x, t_n)} \quad (33)$$

式中

$$v_x(x, t_n) \approx c_{-M-1}^n \omega'_a(x) + \sum_{k=-M}^N c_k^n \xi'_k(x) + c_{N+1}^n \omega'_b(x) \quad (a \leq x \leq b, t_n = n\tau, n = 1, 2, \dots) \quad (34)$$

数值解为 $u(x_j, t_n) = -2\mu \frac{v_x(x_j, t_n)}{v(x_j, t_n)}$

式中

$$v(x_j, t_n) \approx c_{-M-1}^n \omega_a(x_j) + c_j^n \frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} + c_{N+1}^n \omega_b(x_j) \quad (35)$$

$$v_x(x_j, t_n) \approx c_{-M-1}^n \omega'_a(x_j) + \sum_{k=-M}^N c_k^n \left[\frac{1}{h} \delta_{k,j}^{(1)} g(x_j) + \delta_{k,j}^{(0)} \left[\frac{g(x_j)}{\phi'(x_j)} \right]' \right] + c_{N+1}^n \omega'_b(x_j) \quad (j = -M-1, \dots, N+1; n = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

4 数值算例

算例 1 求解下列问题^[49]

$$\begin{cases} u_t + uu_x = \mu u_{xx} & (x \in (0, 1), t \in (0, T]) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t \in (0, T]) \\ u(x, 0) = 2\mu \frac{\pi \sin(\pi x)}{\sigma + \cos(\pi x)} & (x \in (0, 1)) \end{cases} \quad (37)$$

其精确解为 $u(x, t) = 2\mu \frac{\pi e^{-\frac{2}{\sigma} \pi^2 \mu t} \sin(\pi x)}{\sigma + e^{-\frac{2}{\sigma} \pi^2 \mu t} \cos(\pi x)}$

式中 $\sigma > 1$ 是一个参数。

由 Hopf-Cole 变换, 该问题化为

$$\begin{cases} v_t = \mu v_{xx} & (x \in (0, 1), t \in (0, 1]) \\ v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0 & (t \in (0, 1]) \\ v(x, 0) = \sigma + \cos(\pi x) & (x \in (0, 1)) \end{cases} \quad (38)$$

数值计算时取 $g(x) = \omega(x) = 1, \phi(x) = \ln[x/(1-x)]$, 数值解的相对误差用 $E(h) = \|u_h - u_{\text{exact}}\|_{\infty} / \|u_{\text{exact}}\|_{\infty}$ 表示。

表 1 给出了本文算法在 $T=1$, 各参数取值分别为 $N=3M/2, \tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2, \mu=0.01$ 时的数值解误差。可以看出, 随着 M 取值的增大, 网格加细, 数值解的误差也越来越小, 并且从图 1 可以看出呈指数收敛, 与理论分析一致。

表 2 分别给出了参数 μ 和 σ 取不同值时的数值解误差。可以看出, 在相同网格下, 当 $\sigma=2$ 时, μ 值越小, 数值解的误差也越小; 而当 $\mu=0.01$ 不变时, 误差随着 σ 取值的增大而增大。

图 2 给出了 $T=1, M=32, N=48, h=\pi/\sqrt{3M}$, $\tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2$, 分别取 $\mu=1.0e-6$ 和 $1.0e-8$ 时的数值解与精确解。可以看出, 当粘性系数 μ 取很小值时, 计算结果精度也很高, 表明了该算法的有效性。

表 1 M 取不同值时的数值解误差
($T=1, N=3M/2, \tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2, \mu=0.01$)

Tab. 1 Numerical solution error when M takes different values
($T=1, N=3M/2, \tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2, \mu=0.01$)

M	N	$h=\pi/\sqrt{3M}$	$E(h)$
8	12	0.6413	2.0000e-3
16	24	0.4534	1.6234e-4
32	48	0.3206	9.7499e-6
64	96	0.2267	3.5326e-7

表 2 σ 和 μ 取不同值时的数值解误差
($T=1, M=32, N=48, h=\pi/\sqrt{3M}, \tau=h^2/2, \theta=0.5$)

Tab. 2 Numerical solution error when σ and μ take different values
($T=1, M=32, N=48, h=\pi/\sqrt{3M}, \tau=h^2/2, \theta=0.5$)

$\mu(\sigma=2)$	$E(h)$	$\sigma(\mu=0.01)$	$E(h)$
0.1	2.2257e-4	2	9.7499e-6
0.01	9.7499e-6	2.5	1.0954e-5
0.001	9.1892e-6	3	1.1652e-5
0.0001	9.0774e-6	4	1.2621e-5
1.0e-6	9.4877e-6		
1.0e-8	8.8733e-6		

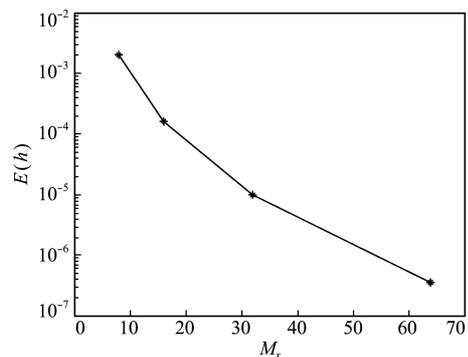
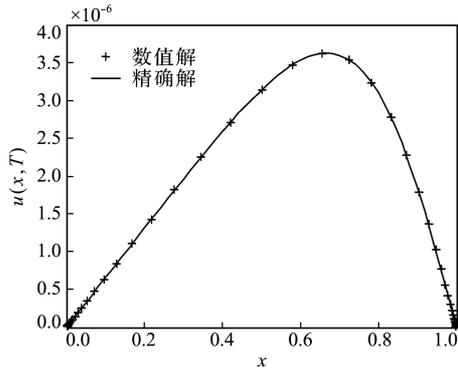
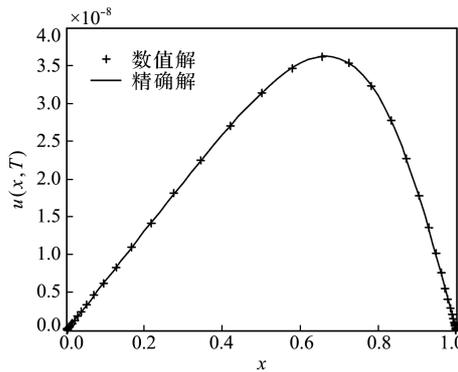


图 1 M 取不同值时的相对误差的指数收敛趋势
Fig. 1 Exponential convergence state of relative error when M takes different values



(a) $\mu = 1.0e-6$



(b) $\mu = 1.0e-8$

图2 $T=1, M=32, N=48, h=\pi/\sqrt{3M}, \tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2$ 时的数值解

Fig. 2 Exact solution and numerical solution when $T=1, M=32, N=48, h=\pi/\sqrt{3M}, \tau=h^2/2, \theta=0.5, \sigma=2$

算例2 若问题(37)的初值条件为

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (x \in (0, 1)) \quad (39)$$

则问题的精确解为

$$u(x, t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \mu t} n \sin(n \pi x)}{c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \mu t} \cos(n \pi x)} \quad (40)$$

$$\text{式中 } c_0 = \int_0^1 e^{-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi\mu}} dx, \quad c_n = 2 \int_0^1 e^{-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi\mu}} \cos(n \pi x) dx \quad (41)$$

由 Hopf-Cole 变换, 该问题化为

$$\begin{cases} v_t = \mu v_{xx} & (x \in (0, 1), t \in (0, T]) \\ v_x(0, t) = v_x(1, t) = 0 & (t \in (0, T]) \\ v(x, 0) = e^{-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\pi\mu}} & (x \in (0, 1)) \end{cases} \quad (42)$$

图3给出了 $M=32, \mu=0.1, \theta=0.5, \tau=0.00001$, T 取不同值时的数值解与精确解。可见, 数值解非常接近精确解, 表明本文的算法在不同时刻都能准确地描述物理现象。

图4给出了 $M=32, T=1, \theta=0.5, \tau=0.00001$, μ 取不同值时的数值解与精确解。 μ 越小时, 在右端形成激波。可见本文方法能够准确捕捉到激波。同样表明了本文方法的有效性。

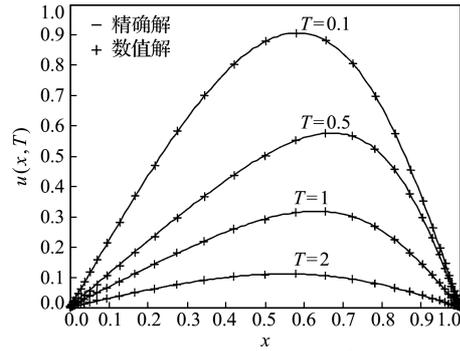


图3 T 取不同值时的数值解与精确解的比较

Fig. 3 The comparison between exact solution and numerical solution when T takes different values

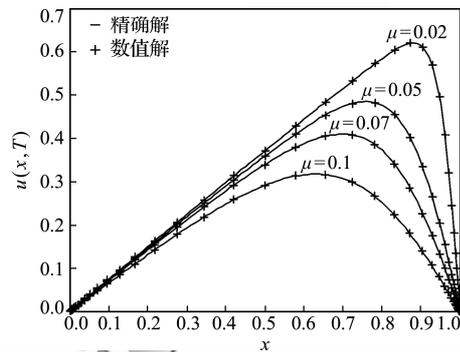


图4 μ 取不同值时的数值解与精确解

Fig. 4 The comparison between exact solution and numerical solution when μ takes different values

5 结论

本文用 Hopf-Cole 变换, 实现了非线性方程的线性化, 使得方程变得简单, 但边界条件由第一类变成了第二类。基于 Hermite 插值构造边界点处的基函数, 提出了该问题的 Sinc-Galerkin 数值方法, 从而获得了非线性 Burgers 方程的数值解。通过两个数值实验发现, 随着空间节点的增加, 数值误差呈指数形式减小, 并且计算结果精度高, 能够有效捕捉激波等物理现象而不出现数值震荡。因此该方法在数值求解非线性偏微分方程方面具有巨大的潜力, 值得今后进一步探索。

参考文献 (References):

[1] 杨先林. Burgers 方程的精确解[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(4): 308-311. (YANG Xian-lin. Exact solutions of Burgers equation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 308-311. (in Chinese))

[2] 韩庆书, 龚霄雁. 用特征型 Galerkin 方法求解 Burgers 方程[J]. 水动力学研究与进展, 1988, 3(1): 36-45. (HAN Qing-shu, GONG Xiao-yan. Using the characteristic Galerkin method solve the Burgers equation [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 1988, 3(1): 36-45. (in Chinese))

[3] 谢元喜, 唐驾时. 对“求一类非线性偏微分方程解析解

- 的一种简洁方法”一文的一点注记[J]. 物理学报, 2005, **54**(3): 1036-1038. (XIE Yuan-xi, TANG Jia-shi. A note on paper “a simple fast method in finding the analytical solutions to a class of nonlinear partial differential equations” [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(3): 1036-1038. (in Chinese))
- [4] Sharan M, Pradhan D. A numerical solution of Burgers' equation based on Multigrid method[A]. International Conference on Recent Trends in Computing and Communication Engineering-RTCCE[C]. 2013.
- [5] 项利峰, 席光, 孙中国. Burgers 方程的 MPS-MAFL 数值解法[J]. 工程热物理学报, 2007, **28**(1): 52-54. (XIANG Li-feng, XI Guang, SUN Zhong-guo. Numerical solution of burgers equation by MPS-MAFL method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2007, **28**(1): 52-54. (in Chinese))
- [6] Sahyoun S, Djouadi S M. Nonlinear model reduction using Space Vectors Clustering POD with application to the Burgers' equation [A]. American Control Conference[C]. IEEE, 2014.
- [7] Sahyoun S, Djouadi S M. Time, space, and space-time hybrid clustering POD with application to the Burgers' equation[A]. 53rd IEEE Conference on Decision and Control[C]. 2014.
- [8] Kattiyapirak C, Khovidhungij W. An approximate analytical solution of the two-dimensional KdV-burgers equation by the homotopy analysis method[A]. 2018 Chinese Control and Decision Conference (CCDC) [C]. 2018.
- [9] Liao S J, Sherif S A F. Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, **57**(5): 25.
- [10] Stenger F. A “Sinc-Galerkin” method of solution of boundary value problems[J]. *Mathematics of Computation*, 1979, **33**(145): 85-109.
- [11] Smith R C, Bogar G A, Bowers K L, et al. The Sinc-Galerkin method for fourth-order differential equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1991, **28**(3): 760-788.
- [12] El-Gamel M, Cannon J R, Zayed A I. Sinc-Galerkin method for solving linear sixth-order boundary-value problems[J]. *Mathematics of Computation*, 2004, **73**(247): 1325-1344.
- [13] Zarebnia M, Sajjadian M. The sinc-Galerkin method for solving Troesch's problem [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, **56**(9-10): 218-228.
- [14] El-Gamel M, Mohsen A. Sinc-Galerkin method for solving biharmonic problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **247**: 386-396.
- [15] Zarebnia M, Sajjadian M. Convergence of the Sinc-Galerkin method for the Bratu Equation[J]. *Chiang Mai Journal of Science*, 2014, **4**(3): 714-723.
- [16] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$ [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1950, **3**(3): 201-230.
- [17] Lund J, Bowers K L. *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations* [M]. SIAM, 1992.
- [18] Stenger F. *Handbook of Sinc Numerical Methods* [M]. CRC Press, Inc, 2010.
- [19] Wood W L. An exact solution for Burger's equation [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2006, **22**(7): 797-798.

The Sinc-Galerkin methods of the Burgers' equation based on the Hopf-Cole transformation

YANG Mei*, ZHAO Feng-qun, GUO Chong

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In this paper, the Sinc-Galerkin method is used to solve the initial boundary value problem of the Burgers equation. Firstly, the Hopf-Cole transform is used to transform the second-order nonlinear Burgers equation into a second-order linear equation, while the first type of boundary condition is changed into the second type of boundary condition. Then the time derivative is discretized in θ -weighted scheme, and the spatial derivative is discretized by the Sinc-Galerkin method. For the second type of boundary condition, the basis functions are introduced at the ends based on Hermite interpolation method. Finally, the validity and exponential convergence of the Sinc-Galerkin method is verified by numerical examples. A comparison between the numerical solution and the exact solution shows that numerical scheme constructed in this paper has high accuracy, and can effectively capture physical phenomena such as shock waves.

Key words: Burgers's equation; Sinc-Galerkin methods; Hopf-Cole transformation; Second boundary condition

引用本文/Cite this paper:

杨 梅, 赵凤群, 郭 冲. 基于 Hopf-Cole 变换的 Burgers 方程初边值问题的 Sinc-Galerkin 法[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(6): 807-812.
YANG Mei, ZHAO Feng-qun, GUO Chong. The Sinc-Galerkin methods of the Burgers' equation based on the Hopf-Cole transformation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(6): 807-812.