

一种新型三角形裂尖单元及其在结构裂纹分析中的应用

周枫林^{1,2}, 谢贵重¹, 张见明^{*1}, 李落星¹

(1. 湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082; 2. 湖南工业大学 机械工程学院, 株洲 412007)

摘要:构造了一种适合边界元分析裂纹问题的三角形单元,该单元中的形函数包含两部分,主要部分用于捕捉裂纹尖端上位移分布的陡峭特性(性质),另一部分为常规的拟合函数,体现裂纹尖端位置附近的物理量在其他方向上的连续分布。形函数主要部分的构造充分利用了已有理论研究获得的结论,在裂纹表面,随着距离远离尖端,位移分布与 $\sqrt{r}$ 函数保持同阶变化。在传统形函数的基础上,通过先乘以一项同阶于 $\sqrt{r}$ 的变量项,再在系数中将其在形函数所在点上的值除去,便得到新型的用于拟合裂纹尖端附近位移和面力分布的形函数。新的形函数能够满足形函数的 delta 性质,但归一性不再满足,因此,新的形函数只用于物理量的拟合,而几何量的拟合依然采用传统方案。通过对偶边界元方法计算裂纹尖端的张开位移后,利用一种位移外插方法计算获得应力强度因子。数值算例关注了一种无限域内的圆盘裂纹,应用新构造的三角形单元于对偶边界元中计算结构在受到斜拉力时裂纹尖端的三种应力强度因子。通过与参考解进行对比,验证了该插值方案用于对偶边界元分析裂纹问题时的正确性和高精度。

关键词:裂纹尖端单元;裂纹问题;对偶边界元法;边界积分方程;形函数

中图分类号:O346.1

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2019)05-0656-08

1 引言

在使用有限单元法 FEM 和边界单元法 BEM 分析断裂力学问题^[1-7]时,为了获取更高的计算效率和计算精度,常采用一些特殊的形函数以更准确地拟合物理变量在单元内的分布。不同于 FEM 中常用的等参元(单元内几何量和物理量都采用同一套形函数),在分析裂纹问题时,单元内用以拟合物理量变化的形函数通常本身就具有与物理量的精确分布函数相同或者相近的变化规律。

对偶边界元法 DBEM(dual boundary element method)是基于边界积分方程 BIE 理论发展起来的一种数值计算方法,由于其继承了 BIE 的大部分优势,如采用了物理问题的基本解和纯边界积分等,是一种分析裂纹问题非常有效的工程数值方法。三维情况下,裂纹本身往往近似地以面的形式嵌入域内,因此,裂纹问题在结构拓扑上是奇异的。DBEM 中,将裂纹视为一对相互重合的边界表面,

将裂纹面分为两侧,在不同的侧上分别配置位移边界积分方程和面力边界积分方程,进而有效地避免了使用单一 BIE 时,由于边界重合而导致的矩阵奇异性^[6-10]。

为了更好地模拟裂纹尖端附近奇异的位移和应力场分布,构建了许多类型的奇异单元。Blackburn^[11]在三角形单元的基础上构造了三节点、四节点和六节点的奇异三角形单元,在这些单元中,通过特殊构造的形函数能够很好地捕捉到裂纹尖端附近位移场的分布规律。构造八节点的特殊四边形单元以拟合裂尖附近位移场的分布^[12]。此外,还构造了基于四边形等参元的边退化理论的六节点三角形单元,并得到了运用^[13]。以上这些单元用于弹塑性结构裂纹问题的分析,均获得了较好的计算结果。然而在这些单元中,只能较好地捕捉到单元的某个顶点附近位移场分布的 $\sqrt{r}$ 渐进。在一般分析过程中,如在三维的 BEM 离散过程中,总会有部分网格的一整条边位于裂纹尖端上,因此,在裂纹尖端所在网格边附近都需要很好地模拟位移 $\sqrt{r}$ 渐进分布。本文将在三角形网格的基础上,利用裂尖附近位移场的 $\sqrt{r}$ 渐进分布特点,构造一种整条边都位于裂纹尖端的特殊裂尖单元。

收稿日期:2018-08-21;修改稿收到日期:2018-11-14.

基金项目:国家自然科学基金(11602082);中国博士后基金(2016M602403)资助项目.

作者简介:张见明*(1965-),男,博士,教授
(E-mail: zhangjm@hnu.edu.cn);
周枫林(1986-),男,博士,讲师.

在 DBEM 分析中所使用的奇异单元,其构造思路都是源于 FEM 中的奇异单元构造,如 1/4 节点单元^[14,15]。Mi 等^[7]构造了一组八节点非连续四边形裂尖单元,并成功将其应用于三维对偶边界元的裂纹分析。Kebir 等^[16]构造了一种三节点三角形裂尖单元。Pan 等^[17]通过在形函数中增加权系数,构造了一种九节点裂尖单元。李俊等^[18]提出了一类三节点和九节点裂尖单元的构造方法,并用于对偶边界元裂纹分析,取得了很好的计算结果。Xie 等^[19,20]在文献[9]工作的基础上进一步发展了一种九节点裂尖单元。

由于三角形网格的灵活性,本文将进一步构造一种六节点的三角形裂尖单元。为保持几何量的连续性和光滑性,在所构造的六节点的三角形裂尖单元中,几何变量和物理变量的拟合分别采用不同的插值点以及不同的形函数。该单元的构造可以分两个步骤,第一步,确定裂纹尖端所在边对应参数空间的位置,结合该裂纹尖端附近位移场的渐进分布特性,以参数坐标为变量构造一种与该渐进分布同阶的特性函数;第二步,将单元内所有节点上的形函数乘以该特性函数作为新的形函数,为保证形函数的 delta 性质,需要将每个节点对应形函数再除以特性函数在该节点上的值。值得注意的是,通过以上方法构造的形函数,一般不能满足归一性,然而由于裂尖附近的位移分布并不是均匀的,因此该类形函数用于单元内位移拟合是合适的,但不建议用作几何量的插值拟合,本文算例中,该单元为一种非等参单元。

为验证该六节点非连续三角形裂尖单元的正确性和高精度,将其应用到 DBEM 中,设计了一个无限域内圆盘形裂纹的算例。通过与参考解进行对比,发现新构造的六节点三角形裂尖单元能够较好地模拟裂尖附近位移场的分布情况,再通过一种位移外插方法计算三种应力强度因子 SIFs,得到良好的计算精度。

2 非连续六节点三角形单元

在三角形连续单元(图 1)中,内部任意一点上的位移都通过六个节点上的位移乘以相应形函数计算得到。一般三角形单元中六个顶点对应的形函数为

$$\begin{aligned} N_0 &= \xi(2\xi - 1), N_1 = \eta(2\eta - 1) \\ N_2 &= (1 - \xi - \eta)[2(1 - \xi - \eta) - 1] \\ N_3 &= 4\xi\eta, N_4 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \\ N_5 &= 4\xi(1 - \xi - \eta) \end{aligned} \quad (1)$$

在一般等参元中,图 1 所示点即为计算节点,物理变量和几何量的插值拟合都使用同一套形函数(1)。然而,在 DBEM 分析裂纹问题时,由于面力边界积分方程中存在超奇异积分,需要计算其 Cauchy 主值积分和 Hadamard 主值积分,而这两类积分的计算对节点领域内的表面光滑性有较高要求。因此,在 DBEM 分析裂纹问题的案例中,通常采用非连续单元(图 2)进行计算,因为节点位于单元内部,能够有效避免节点同时属于不同单元时产生的几何量光滑性不佳的问题。在非连续单元中,节点的布置往往是通过将网格顶点向内偏移来实现,如图 2 所示,其中 s 为节点偏移参数。在参数空间中,六个节点的坐标列表 1。

标准的非连续单元节点上所定义的形函数为

$$N_s^0 = -\frac{[\xi - (0.5 - 0.25s)](\xi - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \quad (2)$$

$$N_s^1 = -\frac{[\eta - (0.5 - 0.25s)](\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \quad (3)$$

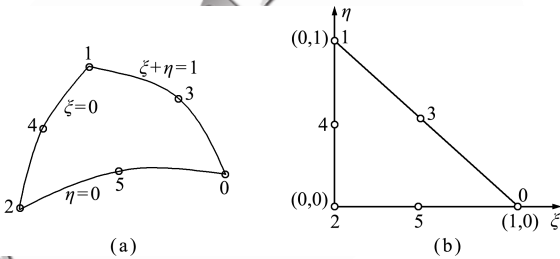


图 1 六节点三角形连续单元
Fig. 1 Continuous triangular element with six nodes

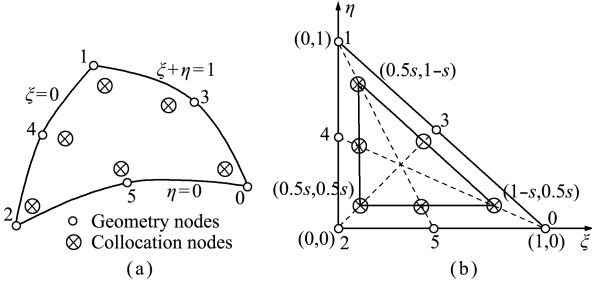


图 2 六节点三角形非连续单元
Fig. 2 Discontinuous triangular element with six nodes

表 1 非连续单元节点坐标

Tab. 1 Local coordinates of the nodes in discontinuous triangular element

节点序号	局部坐标
0	$(1-s, 0.5s)$
1	$(0.5s, 1-s)$
2	$(0.5s, 0.5s)$
3	$(0.5-0.25s, 0.5-0.25s)$
4	$(0.5s, 0.5-0.25s)$
5	$(0.5-0.25s, 0.5s)$

$$N_s^2 = \frac{(1.0 - 0.5s - \xi - \eta)(0.5 + 0.25s - \xi - \eta)}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \quad (4)$$

$$N_s^3 = \frac{(\xi - 0.5s)(\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \quad (5)$$

$$N_s^4 = \frac{(1.0 - 0.5s - \xi - \eta)(\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \quad (6)$$

$$N_s^5 = \frac{(1.0 - 0.5s - \xi - \eta)(\xi - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \quad (7)$$

上述六节点三角形非连续单元可用于边界变量上物理量的常规拟合,但是在裂纹尖端附近,位移场和应力应变场都带有奇异性。常规的单元难以模拟此类带有奇异性分布的物理量,需要根据奇异性分布的特点,特殊构造单元以实现较少数量的单元模拟急剧变化的物理量。

3 六节点三角形裂尖单元

在 BEM 中,单元定义于网格上,在网格区域内通过插值函数实现对单元内部物理量和几何量的拟合。

3.1 用于几何量拟合的形函数

在 BEM 中,计算边界上的积分需要用到边界上点的坐标和点的切向量、法向量及雅克比矩阵等几何信息。离散后,单元内部的这些几何量都是通过插值计算得到。现有网格离散过程中,网格节点上的几何信息已知,因此,在本方案中,几何量的插值依然采用连续单元(图 1)中所定义的形函数,并且直接使用网格节点(图 2 中 $V_0 \sim V_5$)作为单元内部几何量的插值点。

3.2 用于物理量插值拟合的形函数的构造

理论分析表明,裂纹尖端附近位移分布与 $\sqrt{r}$ 函数类似。 $\sqrt{r}$ 为无理函数,用传统的多项式函数逼近或拟合,效率较低。因此,在形函数中加入类似的衰减项,可以有效提高拟合效率。假设裂纹尖端所在边为参数空间中 $\xi + \eta = 1$ 方程所表示的边(事实上,在参数空间定义时总能实现),新型形函数的构造方法如下。

裂纹尖端所在的边为参数空间中 $\xi + \eta = 1$ 方程所表示的边,也即图 2(b)中的斜边。这种情况下,考察单元内任意一点,其参数坐标为 (ξ, η) 。在参数空间中,该点到裂纹尖端边的距离总可表示为

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \xi - \eta) \quad (8)$$

如果是线性单元,则其实际空间中的距离 r 与 D 同阶变化。理论分析表明,裂纹尖端附近位移场和应力场变化规律与 $\sqrt{r}$ 大致相同,因此,可以在形函数(2)中每一项乘上衰减特性函数,即

$$N_d(\xi, \eta) = \sqrt{D} = \sqrt{1 - \xi - \eta} \quad (9)$$

为保证形函数的 delta 性质,在乘上衰减特性函数之后,每个形函数需要除以衰减特性函数在该形函数对应点上的值。即新的形函数为

$$\tilde{N}_s^i(\xi, \eta) = N_s^i(\xi, \eta) \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{N_d(P_i)} \quad (i=0, 1, \dots, 5) \quad (10)$$

对于图 2 所示非连续六节点三角形单元而言,新的形函数表达式为

$$\tilde{N}_s^0(\xi, \eta) = \frac{[\xi - (0.5 - 0.25s)](\xi - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{0.5s}} \quad (11)$$

$$\tilde{N}_s^1(\xi, \eta) = \frac{[\eta - (0.5 - 0.25s)](\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{0.5s}} \quad (12)$$

$$\tilde{N}_s^2(\xi, \eta) = \frac{[(1.0 - 0.5s - \xi - \eta) \times (0.5 + 0.25s - \xi - \eta)]}{(0.5 - 0.75s)(1 - 1.5s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{1 - s}} \quad (13)$$

$$\tilde{N}_s^3(\xi, \eta) = \frac{(\xi - 0.5s)(\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{0.5s}} \quad (14)$$

$$\tilde{N}_s^4(\xi, \eta) = \frac{(1.0 - 0.5s - \xi - \eta)(\eta - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{0.5 - 0.25s}} \quad (15)$$

$$\tilde{N}_s^5(\xi, \eta) = \frac{(1.0 - 0.5s - \xi - \eta)(\xi - 0.5s)}{(0.5 - 0.75s)(0.5 - 0.75s)} \times \frac{\sqrt{1 - \xi - \eta}}{\sqrt{0.5 - 0.25s}} \quad (16)$$

可见,新的形函数中包含了衰减特性项,能够较好地拟合 $\sqrt{r}$ 的变化规律。

4 裂纹尖端应力强度因子的计算

将新型奇异单元应用至 DBEM 中,直接计算得到的是裂纹面上所有节点的位移值。由于是非连续单元,裂纹尖端上张开位移为 0,无法通过公式换算出应力强度因子,因此,以上应力强度因子必须根据理论研究结果,从单元内部点上的应力强度因子出发,外推计算得到。

以裂纹尖端上一点(所关注位置)为原点,构建

一个局部坐标系如图3所示。 t 为 O 点位置在尖端上的切向量, b 为 O 点所处裂纹面的外法向量, $n = b \times t / |b \times t|$ 为通过右手法则定义的第三个方向的单位向量。 O 点上的SIFs一般是通过单元内部点特别是单元内部垂直于 t 的直线上点的SIFs外推计算获得。

通过以上局部坐标系,单元内部一点(暂记为 P 点)上三个类型的SIFs计算公式如下,

$$K_I = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2r \cos(\phi)}} (u_b^{P^+} - u_b^{P^-}) \quad (17)$$

$$K_{II} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2r \cos(\phi)}} (u_n^{P^+} - u_n^{P^-}) \quad (18)$$

$$K_{III} = \frac{E}{4(1+\nu)} \sqrt{\frac{\pi}{2r \cos(\phi)}} (u_t^{P^+} - u_t^{P^-}) \quad (19)$$

式中 $u_b^{P^+} = u^{P^+} \cdot b$, $u_n^{P^+} = u^{P^+} \cdot n$, $u_t^{P^+} = u^{P^+} \cdot t$ 以及 $u_b^{P^-} = u^{P^-} \cdot b$, $u_n^{P^-} = u^{P^-} \cdot n$, $u_t^{P^-} = u^{P^-} \cdot t$, E 和 ν 分别为材料的杨氏模量和泊松比。在DBEM分析计算过程中,由于使用的是非连续单元,故直接计算得到的是单元内部节点上的位移。

以 O 点的SIFs计算为例来说明裂尖应力强度因子的计算过程。首先,在单元内寻找直线垂直于尖端(一般情况下,直接在参数空间找垂线,尽量保持实际空间中也近似垂直),且垂足为 O 点,如图4所示。为实现外推,在该直线上取两点记为 P_1 和 P_2 。首先通过单元形函数插值,计算 P_1 和 P_2 两点的张开位移,然后通过式(26)计算三个方向的

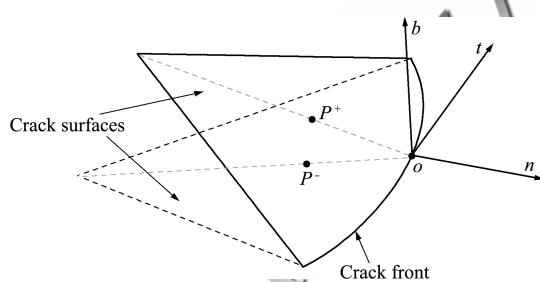


图3 裂纹尖端的局部坐标系

Fig. 3 Local coordinate system defined on the crack front

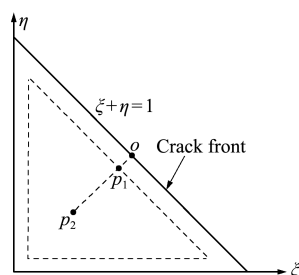


图4 裂纹尖端 O 点的SIFs外推计算

Fig. 4 SIFs at point O computed through extrapolation

SIFs,最后计算 P_1O 和 P_2O 的长度 r_1 和 r_2 ,并应用式(20)外推计算 O 点的SIFs。

$$K^O = (r_2 K^{P_1} - r_1 K^{P_2}) / (r_2 - r_1) \quad (20)$$

5 算例

为检验新型三角形裂尖单元的正确性和计算精度,设计两个验证算例,算例1关注无限域上的圆盘裂纹受斜拉力时的力学问题,并应用DBEM求解裂尖的应力强度因子;算例2关注一个长方体内部存在一个矩形贯穿裂纹,该结构在受正拉力时裂纹上的应力强度因子情况。

算例1 圆盘裂纹受斜拉力

裂纹 A 位于无限域内,其形状为半径为 a 的圆盘,在无穷远边界上受到倾斜于裂纹面方向的拉力 σ (图5),方向与 X 轴夹角为 γ 。

该问题的裂纹尖端为圆,其上的SIFs有解析表达式如下^[21]。

$$K_I = \frac{2}{\pi} (\sigma \sin^2 \gamma) \sqrt{\pi a} \quad (21)$$

$$K_{II} = \frac{4}{\pi(2-\nu)} (\sigma \sin \gamma \cos \gamma) \sqrt{\pi a} \cos \omega \quad (22)$$

$$K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{\pi(2-\nu)} (\sigma \sin \gamma \cos \gamma) \sqrt{\pi a} \sin \omega \quad (23)$$

在该算例中,泊松比 $\nu = 0.25$,裂纹半径 $a = 1$,拉力 $\sigma = 1$,拉力倾角 $\gamma = \pi/4$, ω 为计算点所处裂尖环向位置的角度坐标。

为验证算法正确性,将新型三角形裂纹尖端单元应用到DBEM求解SIFs中。通过加密网格数量,分别采用48个单元、162个单元以及244个单元,如图6所示,考察算法的收敛性,应用DBEM计算得到裂尖上SIFs分布如图7~图9所示,取样点位于裂纹尖端上。

为更加精确地表示计算结果与精确解的差距,在裂纹尖端上取7个取样点,表2~表4分别列出了7个取样点上不同类型应力强度因子的计算结果。

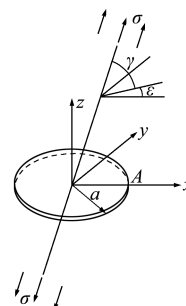


图5 受斜向拉力的圆盘裂纹

Fig. 5 Circle disk shaped crack in diagonal tension

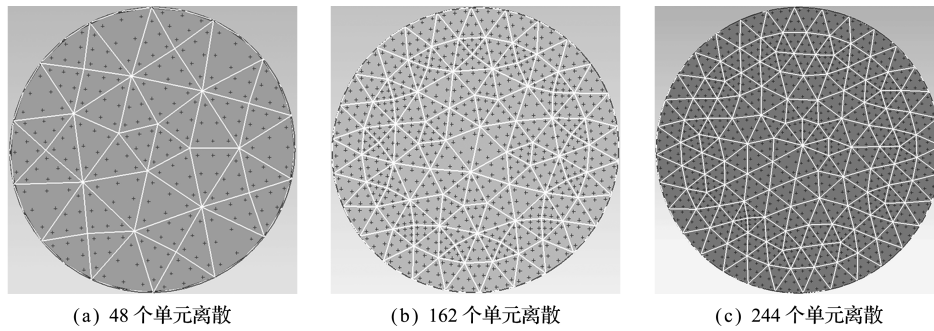
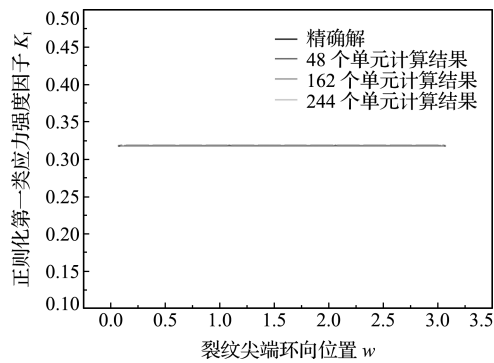
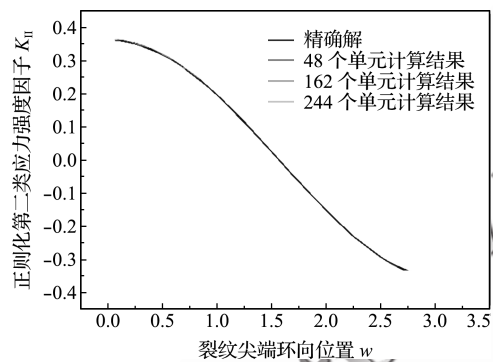
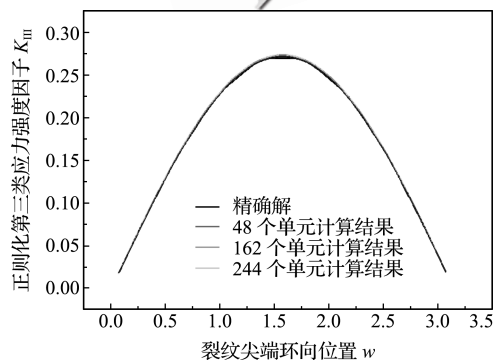


图6 裂纹面上的网格离散

Fig. 6 Mesh on the crack surface

图7 正归化第一类应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ Fig. 6 Normalized SIF $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ 图8 正归化第二类应力强度因子 $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$ Fig. 8 Normalized SIF $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$ 图9 正归化第三类应力强度因子 $K_{III} / \sigma \sqrt{\pi a}$ Fig. 9 Normalized SIF $K_{III} / \sigma \sqrt{\pi a}$ 表2 正归化第一类应力强度因子 $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$
计算结果与精确解比较Tab. 2 Comparison between the numerical results
and exact results on normalized SIF $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$

取样点 编号	取样点 位置 w	48个 单元	162个 单元	244个 单元	精确解
1	0.13097	0.31951	0.31913	0.31927	0.31831
2	0.58966	0.31927	0.31918	0.31937	0.31831
3	1.04772	0.31941	0.31951	0.31939	0.31831
4	1.70339	0.31971	0.31952	0.31939	0.31831
5	2.16193	0.31916	0.31950	0.31941	0.31831
6	2.61309	0.32002	0.31950	0.31930	0.31831
7	3.00843	0.31978	0.31925	0.31941	0.31831

表3 正归化第二类应力强度因子 $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$
计算结果与精确解比较Tab. 3 Comparison between the numerical results
and exact results on normalized SIF $K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$

取样点 编号	取样点 位置 w	48个 单元	162个 单元	244个 单元	精确解
1	0.13097	0.36138	0.36100	0.36093	0.36067
2	0.58966	0.30277	0.30262	0.30207	0.30235
3	1.04772	0.18220	0.18176	0.18174	0.18173
4	1.70339	0.04828	0.04788	0.04799	0.04809
5	2.16193	0.20302	0.20611	0.20263	0.20274
6	2.61309	0.31509	0.31390	0.31426	0.31415
7	3.00843	0.36148	0.36091	0.36043	0.36056

表4 正归化第三类应力强度因子 $K_{III} / \sigma \sqrt{\pi a}$
计算结果与精确解比较Tab. 4 Comparison between the numerical results
and exact results on normalized SIF $K_{III} / \sigma \sqrt{\pi a}$

取样点 编号	取样点 位置 w	48个 单元	162个 单元	244个 单元	精确解
1	0.13097	0.03566	0.03587	0.03562	0.03563
2	0.58966	0.15250	0.15239	0.15243	0.15172
3	1.04772	0.23776	0.23782	0.23793	0.23635
4	1.70339	0.27231	0.27131	0.27225	0.27044
5	2.16193	0.22761	0.22725	0.22762	0.22654
6	2.61309	0.13834	0.13797	0.13857	0.13758
7	3.00843	0.03635	0.03635	0.03665	0.03622

图7~图9的横轴表示计算点半径与OX轴的夹角,可以看出,应用新型三角形裂尖单元计算的SIFs结果与准确解吻合很好,表明了该单元在DBEM计算SIFs过程中应用的正确性。同时,应用48个单元计算所得正则化SIFs分布曲线与解析解吻合较好,说明新型单元能够较好地拟合裂纹尖端附近位移和应力的分布情况,能够使用较少的单元达到较高的计算精度。从表2~表4所列具体数值以及表5所列不同单元数量的情况下裂纹尖端正则化SIFs的最大相对误差情况来看,随着网格进一步加密,最大相对误差在减小,计算所得SIFs更加接近精确解,充分说明了该类型单元在计算过程中的稳定性和收敛性。

算例2 长方体内贯穿裂纹

关注结构如图10所示,长方体内中心位置包含矩形裂纹,裂纹面与上下断面平行并延伸至前后端面,称为贯穿裂纹。

图10长方体的长宽高分别为 $2a$ 、 t 和 $2h$,裂纹长为 $2c$,宽为 t ,裂纹位于长方体中心位置且与上下端面平行。结构顶面和底面分别受到大小为 σ 的正拉力,其余表面为自由状态。Raju等^[22]应用有限元法对该问题进行了分析,本算例应用本文算法对裂纹前沿的应力强度因子进行相同计算,并将计算结果与Raju等^[22]的计算结果进行对比。在该算例中使用了两种不同的相对尺寸。

$$h/b = 0.875, c/b = 0.5, t/c = 3$$
$$h/b = 3, c/b = 0.5, t/c = 3$$

表5 不同单元情况下正则化SIFs的最大相对误差
Tab.5 Maximum relative error of normalized SIFs obtained by different numbers of elements

单元数量	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi a}$
48	0.5377%	0.9668%	1.42%
162	0.3986%	0.5%	1.105%
244	0.3503%	0.3%	0.85%

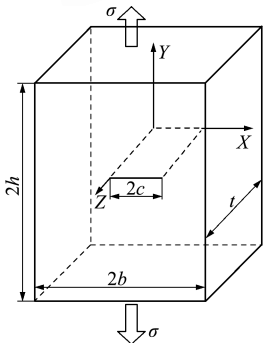


图10 长方体内矩形贯穿裂纹
Fig.10 A cuboid with a rectangle crack

裂纹面上分别使用两种数量的裂纹单元进行计算,分别是110个(包含16个奇异单元,如图11所示)和142个非连续三角形单元(包含20个奇异单元,如图12所示),上下端面所受拉力 σ 假设为单位力。

计算裂纹左右两侧前沿上的应力强度因子。图13给出了左右两侧前沿上不同位置处的应力强度因子分布情况。

为进一步比较两种方法的计算结果,表6列出了在长方体的高长比为0.875时的计算结果对比。

图13的横轴表示前沿相对位置,由对称性只需计算前半段或者后半段前沿的应力强度因子即可。由图13和表6可以看出,对于两种长高比的长方体,本文算法所得计算结果与Raju等^[22]用有限元方法获得的计算结果非常接近。进一步验证了本文方法的正确性。

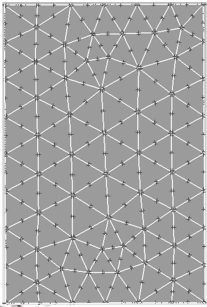


图11 110个单元
Fig.11 110 elements

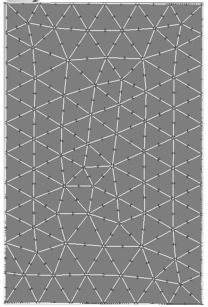


图12 142个单元
Fig.12 142 elements

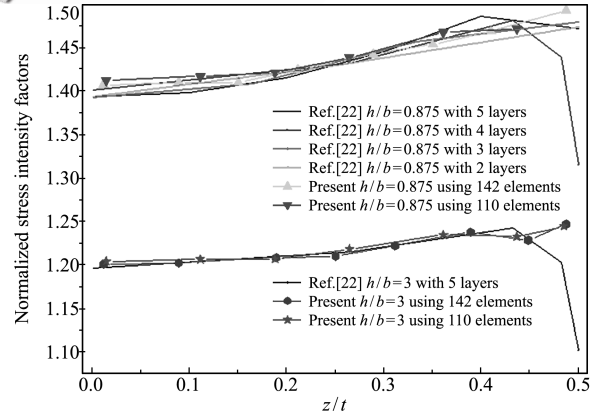


图13 左右两侧前沿上的应力强度因子计算结果对比
Fig.13 Comparisons on the SIFs results at the crack-front on the left side of the crack

表6 应力强度因子计算结果对比

Tab.6 Comparison on SIFs results

z/t	Raju 方法 (4层)	Raju 方法 (5层)	本文方法 (110单元)	本文方法 (142单元)
0.1	1.402	1.399	1.417	1.410
0.25	1.429	1.430	1.439	1.424
0.4	1.482	1.486	1.472	1.469
0.483	1.439	1.472	1.492	1.493

6 结 论

构造了一种新型的用于 DBEM 计算分析裂纹问题的非连续三角形裂纹尖端单元。在该单元中,几何量分布的拟合仍然采用连续单元中类似的拟合方案。而对物理量分布的拟合,则结合裂纹尖端附近位移场和应力场分布近似服从 $\sqrt{r}$ 分布的特点,设计了一种新型的专门用于裂纹尖端附近物理量分布拟合的插值形函数。算例表明,新型单元能够正确应用于 DBEM 分析裂纹问题中,而且可以较好地拟合裂纹尖端附近位移分布,在计算过程中表现出较好的稳定性和收敛性。

参考文献(References):

- [1] Hibbitt H D. Some properties of singular isoparametric elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, **11**(1): 180-184.
- [2] 马文涛,许 艳,马海龙.修正的内部基扩充无网格法求解多裂纹应力强度因子[J]. *工程力学*, 2015, **32**(10): 18-24. (MA Wen-tao, XU Yan, MA Hai-long. Solving stress intensity factors of multiple cracks by using a modified intrinsic basis enriched meshless method[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, **32**(10): 18-24. (in Chinese))
- [3] 杨军辉,雷勇军.垂直界面裂纹应力强度因子的加料有限元分析[J]. *工程力学*, 2016, **33**(2): 59-65. (YANG Jun-hui, LEI Yong-jun. The enriched finite element analysis of stress intensity factor for a crack normal to Bi-material interface[J]. *Engineering Mechanics*, 2016, **33**(2): 59-65. (in Chinese))
- [4] 刘学聪,章 青,夏晓舟.一种新型裂尖加强函数的显式动态扩展有限元法[J]. *工程力学*, 2017, **34**(10): 10-18. (LIU Xue-cong, ZHANG Qing, XIA Xiaozhou. A new enrichment function of crack tip in XFEM dynamics by explicit time algorithm[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(10): 10-18. (in Chinese))
- [5] Ying L A. Some 'special' interpolation formulae for triangular and quadrilateral elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1982, **18**(7): 959-966.
- [6] Mi Y, Aliabadi M H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1992, **10**(2): 161-171.
- [7] Mi Y, Aliabadi M H. Discontinuous crack-tip elements: Application to 3D boundary element method[J]. *International Journal of Fracture*, 1994, **67**(3): R67-R71.
- [8] Hong H K, Chen J T. Derivations of integral equations of elasticity[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, **114**(6): 1028-1044.
- [9] Chen J T, Hong H K. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1999, **52**(1): 17-33.
- [10] 王 冬,刘中宪,武凤娇,等.弹性波三维散射快速多极子间接边界元法求解[J]. *工程力学*, 2017, **34**(1): 33-44. (WANG Dong, LIU Zhong-xian, WU Feng-jiao, et al. The FMM-IBEM solution of three-dimensional scattering of elastic waves[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(1): 33-44. (in Chinese))
- [11] Blackburn W S. Calculation of stress intensity factors at crack tips using special finite elements[A]. Proceedings of the Brunel University Conference of the Institute of Mathematics and its Applications Held in April 1972[C]. London: Academic Press, 1973.
- [12] Okabe M. Quadrilateral element with semi-radial singularity mapping[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, **17**(7): 1045-1067.
- [13] Yamada Y, Ezawa Y, Nishiguchi I, et al. Reconsiderations on singularity or crack tip elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, **14**(10): 1525-1544.
- [14] Henshell R D, Shaw K G. Crack tip finite elements are unnecessary[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1975, **9**(3): 495-507.
- [15] Sáez A, Gallego R, Dominguez J. Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, **38**(10): 1681-1701.
- [16] Kebir H, Roelandt J M, Foulquier J. A new singular boundary element for crack problems: Application to bolted joints[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, **62**(6): 497-510.
- [17] Pan E N, Yuan F G. Boundary element analysis of three-dimensional cracks in anisotropic solids [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **48**(2): 211-237.
- [18] 李 俊,冯伟哲,高效伟.一种基于直接计算高阶奇异积分的断裂力学双边界积分方程分析法[J]. *力学学*

- 报,2016,**48**(2):387-398. (LI Jun, FENG Wei-zhe, GAO Xiao-wei. A dual boundary integral equation method based on direct evaluation of higher order singular integral for crack problems[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2016,**48**(2):387-398. (in Chinese))
- [19] Xie G Z,Zhang J M,Huang C,et al. A direct traction boundary integral equation method for three-dimension crack problems in infinite and finite domains[J]. *Computational Mechanics*,2014,**53**(4):575-586.
- [20] Xie G Z,Zhang D H,Meng F N,et al. Calculation of stress intensity factor along the 3D crack front by dual BIE with new crack front elements [J]. *Acta Mechanica*,2017,**228**(9):3135-3153.
- [21] Tada H,Paris P C,Irwin G R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*(Third Edition)[M]. ASME Press, 2000.
- [22] Raju I S, Newman J C. Three dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens [R]. NASA TN D-8414,1977.

A new triangular element for crack front and the application in analysis of crack problems

ZHOU Feng-lin^{1,2}, XIE Gui-zhong¹, ZHANG Jian-ming^{*1}, LI Luo-xing¹

(1. School of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. School of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China)

Abstract: A new type of triangular element one edge of which lies on the crack front is developed for boundary element analysis of crack problems. The shape functions in this type of elements consist of two parts. The major part of the shape functions is constructed to approximate the sharp variation of the physical quantities including displacements and stresses near the crack front in the crack surfaces. The other part is the traditional type of shape functions that are defined for triangular elements. In the major part of the shape functions, an expression similar to $\sqrt{r}$ is involved since it has been theoretically proved that the distribution of the displacement around the crack front is of the same order as that of $\sqrt{r}$. In the newly defined shape functions, a specially constructed term, which is of the same order as that of $\sqrt{r}$, is multiplied by the traditional shape functions. In order to guarantee the delta property of the shape functions, however, the values of the specially constructed term at the interpolation points should be divided by the corresponding coefficients of the shape function. The proposed elements should only be applied for approximation of physical quantities near the crack front. The geometric quantities in the same area should be approximated by a traditional method. In the application of this elements in the dual boundary element method for crack problems, the crack of displacements (CODs) in the crack surfaces is first computed. Then an extrapolation method is applied to compute the stress intensity factors at the crack front. As the demonstration example, a circle shaped crack in an infinite domain is considered. Three types of SIFs at the crack front are computed by the dual boundary element method with the new element. Comparisons with the analytical results have been made to demonstrate the validity and accuracy of the element.

Key words: crack front element; crack problems; dual boundary element method; boundary integral equation; shape function

引用本文/Cite this paper:

周枫林,谢贵重,张见明,等.一种新型三角形裂尖单元及其在结构裂纹分析中的应用[J].计算力学学报,2019,**36**(5):656-663.

ZHOU Feng-lin, XIE Gui-zhong, ZHANG Jian-ming, et al. A new triangular element for crack front and the application in analysis of crack problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(5): 656-663.