

DOI: 10.7511/jslx20180731002

# 体外预应力梁摩擦效应的非线性分析

方德平

(华侨大学 土木工程学院, 厦门 361021)

**摘要:**构造了简单的体外预应力梁的摩擦单元,摩擦单元位于转向块和体外筋之间的角平分线上,能模拟转向块和体外筋之间的有摩擦或无摩擦滑移。考虑混凝土、钢筋和体外筋应力-应变的非线性关系,采用梁截面弯矩-轴力-曲率的三折线模型,探讨了体外预应力梁的性能。对简支梁和连续梁的不同因素进行计算,包括不同摩擦系数、不同体外筋和钢筋面积、不同偏心距以及对称和非对称荷载形式。计算结果表明,对于简支梁和对称荷载下的连续梁,承载力的摩擦效应可以忽略,最大预应力增量和挠度的摩擦效应不宜忽略,最小预应力增量的摩擦效应明显;对于非对称荷载下的连续梁,承载力、最大和最小预应力增量以及挠度的摩擦效应不可忽略。

**关键词:**梁;体外预应力;非线性;摩擦效应;摩擦单元;滑移

**中图分类号:** O343.3; TU317.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2019)05-0624-06

## 1 引言

体外预应力作为后张预应力体系的重要分支之一,与传统预应力体系相比较,具备许多优点,近年来成为预应力技术的热点<sup>[1,2]</sup>。体外筋与转向块之间可以滑移,存在摩擦力,摩擦滑移对梁的承载力、预应力增量和挠度均有影响,这些影响称为摩擦效应。显而易见,摩擦滑移增加了体外预应力结构分析的难度。为简化分析,大部分的研究假设体外筋与转向块光滑接触,相互之间没有摩擦力。Alkhairi等<sup>[3]</sup>考虑体外筋偏心距的损失,提出了一种迭代方法,计算简支梁体外筋的平均变形。He等<sup>[4]</sup>提出了体外预应力梁在弹性阶段和极限状态下的体外筋应力的计算方法,考虑了体外筋的滑移和偏心距损失。Nie等<sup>[5]</sup>对预应力钢-混凝土连续组合梁的承载力进行了解析分析,提出了开裂、屈服以及极限荷载的计算公式。徐荣桥等<sup>[6]</sup>构造了考虑滑移的体外筋单元,得到了通用的体外筋应力增量的计算公式。杜进生等<sup>[7]</sup>统一了正常使用状态和承载能力极限状态下预应力筋的应力计算。Lou等<sup>[8]</sup>考虑了几何和材料非线性,全过程分析了体外预应力简支梁和连续梁的力学性能。文献[3-8]均忽略了体外筋与转向块之间的摩擦力。

孙海等<sup>[9]</sup>用公共力的概念来考虑摩擦效应,没有引入摩擦单元。Wu等<sup>[10]</sup>绘出摩擦单元的滑块-弹簧模型图,但未详细说明摩擦单元的刚度矩阵,以及摩擦单元的位置。Ariyawardena等<sup>[11]</sup>先假设体外筋与转向块之间无滑移,当转向块两侧的体外筋拉力差值大于最大摩擦力,滑移产生,加上不平衡力,迭代调整体外筋拉力差值,以满足摩擦条件。文献[12-14]建立了考虑悬链线效应的摩擦滑移索单元,不过体外筋几乎是一条直线,可不考虑悬链线效应。方德平等<sup>[15]</sup>构造了简单的体外预应力梁的摩擦单元,模拟转向块和体外筋之间的摩擦,同时指出了摩擦单元的位置。目前体外预应力结构的材料非线性和几何非线性的分析已相对成熟。文献[15]构造了简单的摩擦单元,利用增量法,自动消除不平衡力,方便计算,不过只针对简支梁进行了线弹性分析。应用摩擦单元,对体外预应力结构进行多因素非线性的分析尚有待深入。

## 2 计算分析

### 2.1 摩擦单元

文献[15]的摩擦单元简述如下。图1的摩擦单元设置在体外筋折角的平分线上,刚度方程为

$$\begin{bmatrix} EA/l & 0 & -EA/l & 0 \\ 0 & k & 0 & -k \\ -EA/l & 0 & EA/l & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中  $u_i, v_i, u_j$  和  $v_j$  为结点位移,  $X_i, Y_i, X_j$  和  $Y_j$

收稿日期:2018-07-31;修改稿收到日期:2018-10-17.

基金项目:国家自然科学基金(51578253);厦门市科技计划(3502Z20172014;3502Z20172011);泉州市科技计划(2018C083R)资助项目.

作者简介:方德平(1965-),男,博士,教授  
(E-mail:fdp@hqu.edu.cn).

为结点力； $EA/l$ 为单元的拉压刚度。理论上，增设的摩擦单元长度  $l$  应为 0，计算中  $l$  可取较小的数值，如 1 cm， $EA$  与体外筋相同，使得  $EA/l$  的值足够大。 $k$  为摩擦刚度，当摩擦力小于最大静摩擦力，即  $|Y_i| \leq fX_i$  时， $f$  为摩擦系数，体外筋与转向块之间未发生滑动，理论上， $k$  应为无穷大，计算中取足够大的  $EA/l$ ；当体外筋与转向块之间已发生滑动，即  $|Y_i| \geq fX_i$  时， $k=0$ 。采用增量法，滑动已发生， $k=0$ ，后续加载只会增加摩擦单元的压力  $X_i$ ，进而增大最大静摩擦力  $fX_i$ ，不增加摩擦力  $|Y_i|$ 。因而，随着加载的增多， $fX_i \geq |Y_i|$ ，即已滑动的单元又处于未滑动状态。增量法计算的优点是，发生滑动时，不需要把不平衡的摩擦力  $|Y_i| - fX_i$  转化为结点力，并入下一步计算中，简化了编程。体外筋用桁架拉杆单元模拟，梁和转向块用刚架单元模拟，转向块的刚度与梁的刚度相同。当略去摩擦时， $k=0$ ，摩擦单元退化为桁架单元，角平分线的摩擦单元保证了转向块两侧体外筋的拉力相等。

### 2.2 基本假设

采用以下假设。

(1) 梁截面变形后仍为平面，略去剪切变形，钢筋与混凝土粘结良好，略去开裂后混凝土抗拉强度，张拉和混凝土开裂前，梁处于线弹性状态。

(2) 混凝土的应力-应变关系参考混凝土结构设计规范(GB 50010-2010)；钢筋为理想弹塑性；体外筋应力-应变关系如图 2 的三折线模型所示。

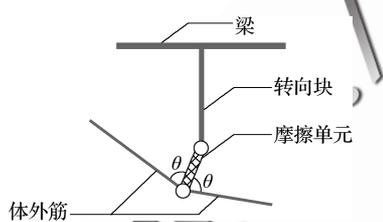


图 1 摩擦单元  
Fig. 1 Friction element

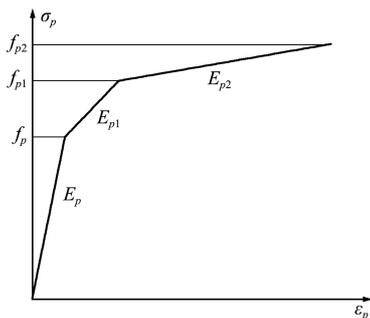


图 2 体外筋的应力-应变关系  
Fig. 2 Stress-strain relationship of external tendon

(3) 单调加载时，极限状态定义为混凝土最大应变达到极限压应变或体外筋最大应力达到  $f_{p2}$ 。

不含体外筋梁截面的弯矩-轴力-曲率 ( $M-N-\varphi$ ) 关系简化为图 3 的三折线模型。对于给定的轴力  $N$ ，根据截面的平衡条件，容易求得开裂、屈服和极限弯矩  $M_{cr}$ 、 $M_y$  和  $M_u$ ，以及相应的曲率  $\varphi_{cr}$ 、 $\varphi_y$  和  $\varphi_u$ 。

### 2.3 结构分析

截面的刚度与  $M$  和  $N$  相关，为了解决刚度的非均匀分布，梁细分成许多等刚度单元，每个单元的刚度由单元平均的  $M$  和  $N$  求出。采用增量法计算混凝土梁和体外筋的内力和变形以及转向块和体外筋之间的摩擦力和滑移。计算步骤如下。

(1) 在张拉体外筋阶段，略去摩擦力，体外筋的有效预应力  $\sigma_{pe}$  沿体外筋长度不变。在结构上施加有效预应力  $\sigma_{pe}$  的等效节点荷载和均布的恒载，即只有活荷载产生预应力增量，恒载不产生预应力增量。在算例中，锚固端和转向块位于抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  上，体外筋的线型接近抛物线，均布恒载取  $2a\sigma_{pe}A_t$ ， $A_t$  为体外筋面积，有效预应力平衡了恒载，这在实际工程中是可行的，也较为常见。根据假设，计算线弹性结构的内力和变形。

(2) 根据上一次计算所得的  $M$  和  $N$ ，求出单元的抗弯刚度。计算单元的平均  $M$  和  $N$ ，通过  $M-N-\varphi$  关系，得到  $M_{cr}$ 、 $M_y$ 、 $M_u$ 、 $\varphi_{cr}$ 、 $\varphi_y$  和  $\varphi_u$ ；图 3 三折线的斜率为抗弯刚度；当  $M > M_u$  时，结构达到极限状态，计算结束。体外筋的模量与其应力  $\sigma_p$  相关，如图 2 所示，当  $\sigma_p > f_{p2}$  时，体外筋拉断，计算结束。基于单元抗弯刚度和体外筋的模量，施加下一级活荷载增量，计算结构的内力和变形。

(3) 重复计算步骤(2)，直到结构达到极限状态或体外筋拉断，计算结束。

## 3 算例

体外预应力简支梁或连续梁矩形截面宽  $b =$

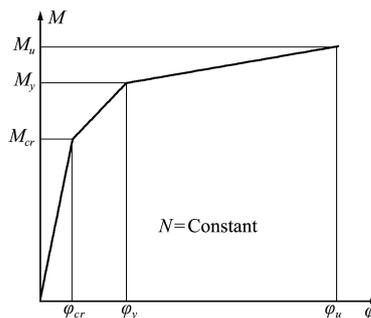


图 3  $M-N-\varphi$  三折线模型  
Fig. 3  $M-N-\varphi$  tri-linear model

0.5 m,高  $h=0.8$  m,拉压钢筋到梁边缘的距离  $h_{s1}=h_{s2}=4$  cm。C45 混凝土弹性模量  $E_c=33.5$  GPa,抗压强度  $f_c=29.6$  MPa,抗拉强度  $f_{ct}=2.51$  MPa。体外筋有效预应力  $\sigma_{pe}=800$  MPa,图 2 的弹性、屈服和极限强度分别为  $f_p=1305$  MPa,  $f_{p1}=1407$  MPa 和  $f_{p2}=1670$  MPa,相应模量为  $E_p=200$  GPa,  $E_{p1}=67.55$  GPa 和  $E_{p2}=9.75$  GPa。钢筋弹性模量  $E_s=200$  GPa,强度  $f_s=335$  MPa。摩擦系数  $f=0, 0.09, 0.25, \infty$ , 分别模拟转向块和体外筋之间的 4 种接触,即无摩擦力、润滑、无润滑和固结无滑移( $f$  取足够大的数值即可,比如 10)。采用部分预应力概念设计梁,受拉钢筋面积  $A_{s1}$  和体外筋面积  $A_t$  满足等式  $f_s A_{s1} / (\sigma_{pe} + \Delta\sigma_p) A_t = 3/7$ , 根据《无粘结预应力混凝土结构技术规程》(JGJ92-2004), 预应力增量  $\Delta\sigma_p = 100$  MPa, 钢筋和体外筋的配筋指数  $\xi = [f_s A_{s1} + (\sigma_{pe} + \Delta\sigma_p) A_t] / f_c b (h - h_{s1})$ ; 低配筋  $\xi = 0.1$ ,  $A_{s1} = 806$  mm<sup>2</sup>,  $A_t = 700$  mm<sup>2</sup>; 受压钢筋面积等于受拉钢筋面积,即  $A_{s1} = A_{s2}$ 。图 4 简支梁小偏心  $e_1 = 0.3$  m,  $e_2 = 0.4$  m; 在图 5 连续梁中,小偏心  $e_1 = 0.35$  m,  $e_2 = 0.4$  m,  $e_3 = 0.15$  m,  $e_2 = e_1$ ; 中高配筋  $\xi = 0.2$  和  $0.3$ , 钢筋和体外筋面积为低配筋的 2~3 倍; 中大偏心的偏心距为小偏心的 2~3 倍。图 4 和图 5 中锚固端和转向块位于抛物线上, 体外筋的线型近似于抛物线。梁单元长度均为 0.8 m, 每级均布活荷载增量均为 0.1 kN/m。所有梁的极限状态均由混凝土最大应变达到极限压应变, 体外筋未拉断。

### 3.1 简支梁

对于不同的  $e, \xi$  和  $f$ , 当梁达到极限状态时,

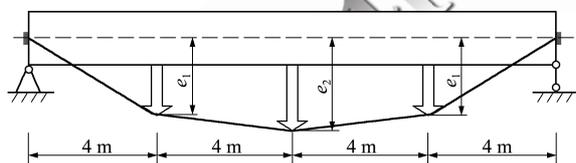


图 4 体外预应力简支梁

Fig. 4 Externally prestressed simply supported beam

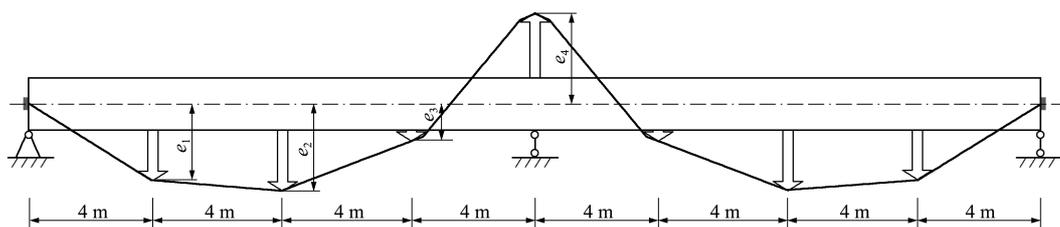


图 5 体外预应力连续梁

Fig. 5 Externally prestressed continuous beam

体外筋最小和最大预应力增量为  $\Delta\sigma_{min}$  和  $\Delta\sigma_{max}$ , 均布荷载  $q$  为恒载和活荷载之和, 跨中挠度为  $d$ 。对于同样的  $e$  和  $\xi$ , 摩擦会提升  $q$  和  $\Delta\sigma_{max}$ , 降低  $d$  和  $\Delta\sigma_{min}$ 。本文的摩擦效应  $FE(f=0.09, 0.25, \infty)$  指的是, 与  $f=0$  相比较,  $q$  和  $\Delta\sigma_{max}$  提升的百分比, 以及  $d$  和  $\Delta\sigma_{min}$  降低的百分比。表 1 列出了  $q, d, \Delta\sigma_{max}$  和  $\Delta\sigma_{min}$  的最大和最小摩擦效应  $FE_{max}$  和  $FE_{min}$ 。可以看出,  $q$  的摩擦效应可以忽略,  $\Delta\sigma_{max}$  和  $d$  的摩擦效应不宜忽略,  $\Delta\sigma_{min}$  的摩擦效应明显。摩擦一定程度上增加了梁的刚度, 但梁的承载能力提高不明显。可以认为,  $\Delta\sigma_{min}, \Delta\sigma_{max}$  和  $d$  的摩擦效应对梁的性能并不重要, 所以可以忽略简支梁的摩擦效应。由此, 图 6~图 8 只比较了无摩擦( $f=0$ ) 和固结无滑移( $f=\infty$ ) 两种极端情况的摩擦效应。在图 7 和图 8 中, (max) 和 (min) 指的是  $\Delta\sigma_{max}$  和  $\Delta\sigma_{min}$ 。图 6 的荷载-位移曲线分为 3 个阶段, 即线弹性、开裂和屈服阶段, 大致呈 3 折线。在图 7 中, 由于跨中位移与体外筋变形大致成正比, 所以  $\Delta\sigma-d$  的曲线与图 2 的体外筋应力-应变关系大致相同, 呈 3 折线。图 6 和图 7 中  $q$  和  $\Delta\sigma$  均与  $d$  呈大致 3 折线关系, 而图 8 的  $q-\Delta\sigma$  大致呈线性关系。

### 3.2 对称荷载作用下的连续梁

在图 5 的连续梁中, 有两种荷载形式, 即对称和非对称荷载。在对称荷载形式中, 均布荷载  $q$  为恒载与活荷载之和, 连续梁的两跨均作用于相同的  $q$ , 跨中挠度为  $d$ 。在对称荷载  $q$  作用下, 表 2 列出

表 1  $q, d, \Delta\sigma_{max}$  和  $\Delta\sigma_{min}$  的摩擦效应 (%)

Tab. 1 Friction effect of  $q, d, \Delta\sigma_{max}$  and  $\Delta\sigma_{min}$  (%)

摩擦效应	$f=0.05$	$f=0.25$	$f=\infty$	$e_2/m$	$\xi$	
$q$	$FE_{max}$	0.72	1.81	5.24	1.2	0.1
	$FE_{min}$	0.26	0.39	0.78	0.4	0.3
$d$	$FE_{max}$	1.42	4.74	7.58	1.2	0.3
	$FE_{min}$	0.33	1.09	1.53	0.4	0.1
$\Delta\sigma_{max}$	$FE_{max}$	1.61	4.26	7.58	1.2	0.1
	$FE_{min}$	0.69	1.40	2.76	0.4	0.3
$\Delta\sigma_{min}$	$FE_{max}$	0.61	1.91	62.25	1.2	0.3
	$FE_{min}$	1.60	3.80	7.36	0.4	0.1

了不同  $e, \xi$  和  $f$  的梁达到极限状态时,  $q, d, \Delta\sigma_{\max}$  和  $\Delta\sigma_{\min}$  的最大和最小摩擦效应  $FE_{\max}$  和  $FE_{\min}$ 。由表 2 可以看出,  $q$  的摩擦效应可以忽略,  $\Delta\sigma_{\max}$  和  $d$

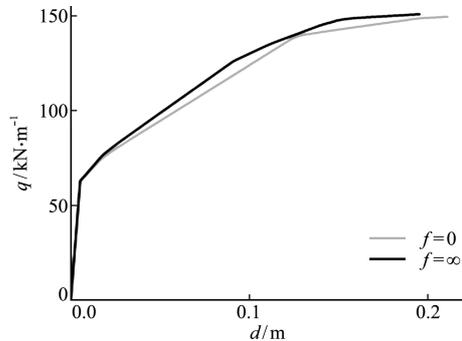


图 6  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  的  $q-d$  曲线  
Fig. 6  $q-d$  curves for  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$

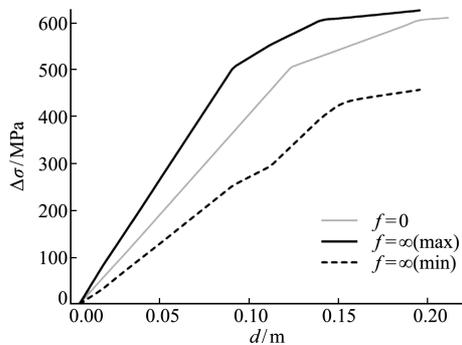


图 7  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  的  $\Delta\sigma-d$  曲线  
Fig. 7  $\Delta\sigma-d$  curves for  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$

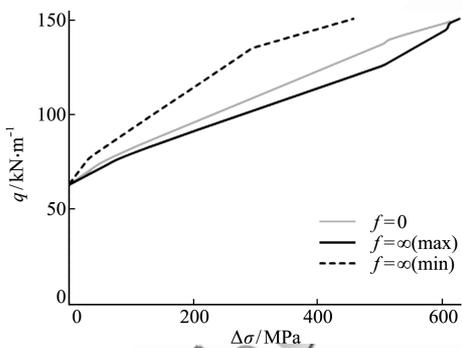


图 8  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  的  $q-\Delta\sigma$  曲线  
Fig. 8  $q-\Delta\sigma$  curves for  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$

表 2  $q, d, \Delta\sigma_{\max}$  和  $\Delta\sigma_{\min}$  的摩擦效应 (%)

Tab. 2 Friction effect of  $q, d, \Delta\sigma_{\max}$  and  $\Delta\sigma_{\min}$  (%)

摩擦效应	$f=0.05$	$f=0.25$	$f=\infty$	$e_2/m$	$\xi$	
$q$	$FE_{\max}$	1.63	1.68	2.76	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	0.48	0.72	0.95	0.4	0.1
$d$	$FE_{\max}$	4.95	16.50	20.46	1.2	0.1
	$FE_{\min}$	2.86	4.76	6.67	1.2	0.3
$\Delta\sigma_{\max}$	$FE_{\max}$	6.03	8.47	15.56	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	1.26	2.04	3.81	0.4	0.1
$\Delta\sigma_{\min}$	$FE_{\max}$	0.88	2.18	39.25	0.4	0.3
	$FE_{\min}$	2.71	8.17	15.16	1.2	0.1

的摩擦效应不宜忽略,  $\Delta\sigma_{\min}$  的摩擦效应明显。总体而言, 与简支梁类似, 可以忽略连续梁对称荷载作用下的摩擦效应。

### 3.3 非对称荷载作用下的连续梁

在非对称荷载形式中, 左跨均布荷载  $q_L$  为恒载和活荷载之和, 右跨均布荷载  $q_R$  只为恒载, 左右跨中挠度为  $d_L$  和  $d_R$ 。在非对称荷载  $q_L$  和  $q_R$  作用下, 表 3 列出了不同  $e, \xi$  和  $f$  的梁达到极限状态时,  $q_L, d_L, d_R, \Delta\sigma_{\max}$  和  $\Delta\sigma_{\min}$  的最大和最小摩擦效应  $FE_{\max}$  和  $FE_{\min}$ 。可以看出, 当  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  时, 摩擦效应最大; 当  $e_2=0.4\text{ m}, \xi=0.1$  时, 摩擦效应最小。在非对称荷载作用下, 左右跨的挠度  $d_L$  和  $d_R$  方向相反, 增加了摩擦效应。与简支梁或对称荷载作用下的连续梁不同, 此处不宜忽略连续梁非对称荷载作用下的摩擦效应。当  $f=\infty$  时, 由于  $d_L$  与  $d_R$  方向相反,  $\Delta\sigma_{\min}$  为负值。当  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  时, 摩擦效应最大, 梁的  $q_L-d_L$  曲线如图 9 所示,  $q_L-\Delta\sigma$  曲线如图 10 所示。当  $f=0.09$  和  $0.25$  时, 由于存在摩擦滑移和体外筋拉力的调整,  $q-\Delta\sigma_{\min}$  的曲线并不光滑; 当  $f=0$  和  $\infty$  时, 由于没有摩擦力或无滑移,  $q-\Delta\sigma_{\min}$  曲线是光滑的。

表 3  $q_L, d_L, d_R, \Delta\sigma_{\max}$  和  $\Delta\sigma_{\min}$  的摩擦效应 (%)

Tab. 3 Friction effect of  $q_L, d_L, d_R, \Delta\sigma_{\max}$  and  $\Delta\sigma_{\min}$  (%)

摩擦效应	$f=0.05$	$f=0.25$	$f=\infty$	$e_2/m$	$\xi$	
$q_L$	$FE_{\max}$	8.86	14.34	18.92	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	0.99	3.69	6.16	0.4	0.1
$d_L$	$FE_{\max}$	7.83	21.30	29.57	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	0.96	2.47	2.89	0.4	0.1
$d_R$	$FE_{\max}$	15.97	31.94	40.97	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	3.46	7.31	8.46	0.4	0.1
$\Delta\sigma_{\max}$	$FE_{\max}$	60.78	113.37	158.40	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	8.91	12.36	16.39	0.4	0.1
$\Delta\sigma_{\min}$	$FE_{\max}$	26.05	82.06	192.40	1.2	0.3
	$FE_{\min}$	8.79	27.55	128.70	0.4	0.1

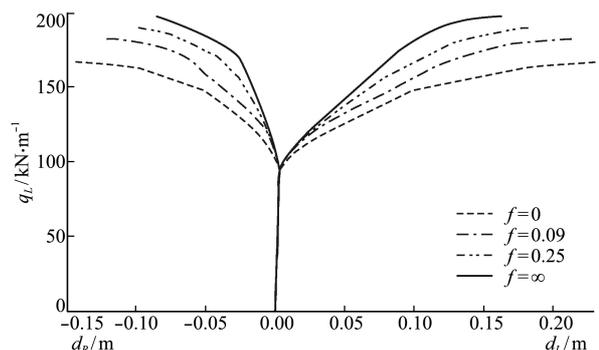


图 9  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  的非对称荷载作用下的  $q_L-d_L$  曲线  
Fig. 9  $q_L-d_L$  curves for  $e_2=1.2\text{ m}, \xi=0.3$  under asymmetric load

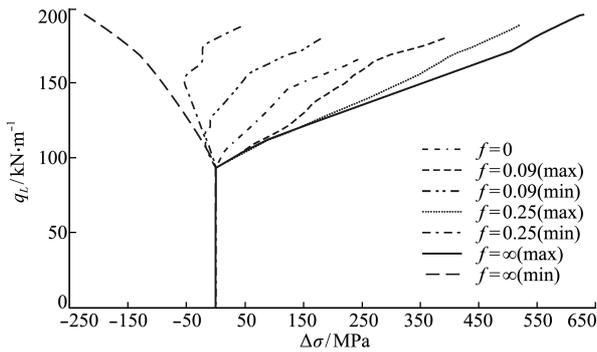


图 10  $e_2=1.2\text{ m}$ ,  $\xi=0.3$  的非对称荷载作用下的  $q_L-\Delta\sigma$  曲线

Fig. 10  $q_L-\Delta\sigma$  curves for  $e_2=1.2\text{ m}$ ,  $\xi=0.3$  under asymmetric load

## 4 结 论

对摩擦系数  $f$ 、配筋指数  $\xi$ 、偏心距  $e$  和连续梁的加载形式进行分析, 结论如下。

(1) 随着体外筋偏心距增加, 体外筋的变形和最大预应力增量增加, 从而增大了摩擦效应。

(2) 随着配筋指数增加, 体外筋的变形减小, 减小了最大预应力增量。

(3) 随着摩擦系数增加, 最大预应力增量和承载能力增加, 最小预应力增量和挠度减小, 自然增加了摩擦效应。对于简支梁和对称荷载作用下的连续梁, 承载能力的摩擦效应可以忽略, 最大预应力增量和挠度的摩擦效应不宜忽略, 最小预应力增量的摩擦效应明显。不过, 与承载能力摩擦效应相比, 最大和最小预应力增量以及挠度的摩擦效应并不重要, 对简支梁和对称荷载作用下的连续梁的摩擦效应可以忽略。对于非对称荷载作用下的连续梁, 由于左右跨的反向挠度产生了明显的摩擦滑移, 承载能力、最大和最小预应力增量以及挠度的摩擦效应均不宜忽略。

## 参考文献 (References):

[1] 熊学玉. 体外预应力结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005. (XIONG Xue-yu. *Design of Externally Prestressed Structure* [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese))

[2] 李晨光, 刘航, 段建华, 等. 体外预应力结构技术与工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008. (LI Chen-guang LIU Hang, DUAN Jian-hua, et al. *Technique of Externally Prestressed Structure and Engineering Application* [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008. (in Chinese))

[3] Alkhairi F M, Naaman A E. Analysis of beams prestressed with unbonded internal or external tendons

[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1993, **119** (9): 2680-2700.

[4] He Z Q, Liu Z. Stresses in external and internal unbonded tendons: Unified methodology and design equations [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2010, **136**(9): 1055-1065.

[5] Nie J G, Tao M X, Cai C S, et al. Analytical and numerical modeling of prestressed continuous steel-concrete composite beams [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2011, **137**(12): 1405-1418.

[6] 徐荣桥, 管羽飞, 林建平. 考虑滑移的体外预应力筋的分析理论 [J]. 工程力学, 2017, **34**(5): 198-204. (XU Rong-qiao, GUAN Yu-fei, LIN Jian-ping. Analysis of externally prestressed tendons considering influence of relative slip [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, **34**(5): 198-204. (in Chinese))

[7] 杜进生, 刘西拉. 基于结构变形的无粘结预应力筋应力变化研究 [J]. 土木工程学报, 2003, **36**(8): 12-19. (DU Jin-sheng, LIU Xi-la. Research on the variations of unbonded prestressed tendon stresses based upon the structural deformation [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2003, **36**(8): 12-19. (in Chinese))

[8] Lou T J, Lopes S M R, Lopes A V. Flexural response of continuous concrete beams prestressed with external tendons [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2013, **18**(6): 525-537.

[9] 孙海, 黄鼎业, 王增春, 等. 体外预应力简支梁受力性能研究与非线性分析 [J]. 土木工程学报, 2000, **33**(2): 25-29. (SUN Hai, HUANG Ding-ye, WANG Zeng-chun, et al. Mechanical properties and nonlinear analysis of simply-supported concrete beams with post-tensioned external tendons [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2000, **33**(2): 25-29. (in Chinese))

[10] Wu X H, Lu X L. Tendon model for nonlinear analysis of externally prestressed concrete structures [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2003, **129**(1): 96-104.

[11] Ariyawardena N, Ghali A. Prestressing with unbonded internal or external tendons: Analysis and computer model [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2002, **128**(12): 1493-1501.

[12] 徐勤, 强士中. 体外预应力混凝土梁承载全过程分析新模型 [J]. 西南交通大学学报, 2007, **42**(6): 732-738. (XU Qun, QIANG Shi-zhong. New model for full process analysis of bearing behavior of externally prestressed concrete beams [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2007, **42**(6): 732-738 (in Chi-

- nese))
- [13] 魏建东. 预应力钢桁架结构分析中的摩擦滑移索单元[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(6): 800-806. (WEI Jian-dong. Friction sliding cable element for structural analysis of prestressed steel truss[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*. 2006, **23**(6): 800-806. (in Chinese))
- [14] 魏建东, 刘忠玉. 一种连续索滑移的处理方法[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(4): 495-499. (WEI Jian-dong, LIU Zhong-yu. One method dealing with cable sliding problem[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*. 2003, **20**(4): 495-499. (in Chinese))
- [15] 方德平, 王全凤. 体外预应力梁的摩擦单元与摩擦效应分析[J]. 建筑结构, 2012, **42**(3): 123-124. (FANG De-ping, WANG Quan-feng. Analysis on friction element and friction effect for external prestressed beams [J]. *Building Structure*, 2012, **42**(3): 123-124. (in Chinese))

## Nonlinear analysis of friction effect in externally prestressed beams

FANG De-ping

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** A concise friction element located at angle bisector between the external tendon and the deviator of reinforced concrete was constructed, which can simulate the slip with or without friction between the tendon and the deviator. The nonlinear stress-strain relationships of concrete, steel bar and external tendon were taken into consideration, the tri-linear model of the bending moment-axial force-curvature of beam section was adopted, the behavior of externally prestressed beam was investigated. The calculations of simply supported beams and continuous beams for various factors were conducted, including different friction coefficients, different areas of external tendon and steel bar, different eccentricities, symmetric or asymmetric load patterns. The calculation results indicate: for the simply supported beam and continuous beam under symmetric load, the friction effect on load carrying capacity is negligible; the friction effect on maximum prestress increment and deflection may not be negligible, the friction effect on minimum prestress increment is obvious; for the continuous beam under asymmetric load, the friction effect on load carrying capacity, maximum and minimum prestress increments, and deflection cannot be neglected.

**Key words:** beam; external prestress; nonlinearity; friction effect; friction element; slip

引用本文/Cite this paper:

方德平. 体外预应力梁摩擦效应的非线性分析[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(5): 624-629.

FANG De-ping. Nonlinear analysis of friction effect in externally prestressed beams[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(5): 624-629.