

DOI: 10.7511/jslx20180709003

增维精细积分法的适用范围研究

王海波*, 何崇检, 贾耀威

(中南大学 土木工程学院, 长沙 410075)

摘要:对线性定常结构动力系统提出的增维精细积分法, 能够将非齐次动力方程转化为齐次动力方程, 不用对状态矩阵求逆就能方便高效地求解出结构的动力响应。本文在仔细分析增维精细积分法性质的基础上, 提出了其适用条件, 进一步拓宽了其应用范围, 并给出了将荷载项展开成傅里叶级数时, 相应增维精细积分法的表达式。同时, 在一个时间步长内, 通过对非齐次项作线性化假设, 成功地将增维精细积分法应用到了非线性动力分析领域。本文方法计算格式统一, 易于编程, 具有很高的计算效率。数值算例证明了本文方法的有效性。

关键词:增维精细积分法; 傅里叶级数; 叠加原理; 线性化假设; 递推算法

中图分类号: O321; TU311.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2019)05-0618-06

1 引言

钟万勰^[1]提出的精细时程积分法, 用于求解线性定常结构动力系统具有很高的计算精度, 是传统的直接积分法无法比拟的。对于非齐次动力方程, 钟万勰假设荷载项在一个时间步长内是线性变化的, 即 PIM-L。但数值算例表明, PIM-L 的精度相对较低。林家浩等^[2]分别就非齐次项为正、余弦函数及傅里叶级数的情况给出了其解析解的表达式, 但涉及到相关矩阵的求逆。汪梦甫等^[3]采用第一类切比雪夫多项式拟合荷载项, 分别提出了两类精细积分法, 即 IFM 与 HISM, 这两类算法均具有很高的精度与效率。汪梦甫等^[4]基于广义帕德近似与克劳特三角分解, 提出了一种更为精确的精细积分法, 该方法无条件稳定且具有可控的数值耗散特性, 相应地, 其计算格式也较复杂。汪梦甫^[5]结合 Ritz 向量与 Krylov 子空间迭代法, 提出了一种降阶的精细积分法, 该方法通过减小指数矩阵的维数提高算法的计算效率, 同时也具有很高的精度。侯平兰等^[6]将辛精细积分法应用到了高层建筑结构地震作用下的时程分析计算, 给出了采用辛精细积分法进行复杂结构在动力荷载作用下时程分析的一般方法, 为高层建筑结构计算提供了新的途径。都琳等^[7]借鉴凑微分的思想将非齐次微分方程近

似齐次化, 使得辛精细积分格式中的非定常项系数矩阵求逆不含时间变量, 降低了矩阵求逆的运算量。富明慧等^[8]结合范数均衡法与精细积分法, 提出了求解病态线性方程组的范数预处理精细积分法, 该方法能显著提高求解病态方程的精度与效率。王海波等^[9]结合精细积分法与 Romberg 数值积分, 提出了一种求解非线性动力方程的单步法, 该方法具有很高的计算效率, 但精度略低。任传波等^[10]提出了一类利用数值积分法, 如龙贝格求积公式等, 求解非齐次项的动力响应, 该方法不涉及矩阵求逆, 且数值稳定性较好。富明慧等^[11]提出的广义精细积分法, 分别利用矩形积分公式与递推算法, 可以很精确地求解出非齐次项为多项式、指数函数及三角函数时结构的动力响应, 与通解具有相同的精度。张素英等^[12]采用增维的方法, 将非齐次动力方程转化为齐次动力方程, 然后假设各时间段状态矩阵为常矩阵, 再利用精细积分求解, 但其精度不高。

顾元宪等^[13]提出的增维精细积分法, 采用增维的方式, 将非齐次动力方程转化为齐次动力方程求解, 从而避免了状态矩阵的求逆, 且利用精细积分法的递推格式便可方便高效地求解出结构的动力响应。本文在此基础上提出了其适用条件, 并新增了四类可适用于增维精细积分法的荷载形式。针对将荷载项展开成傅里叶级数的情况, 给出了相应的增维精细积分法的表达式。同时, 在一个时间步长内, 通过对非齐次项作线性化假设, 将增维精细积分法应用到了非线性动力分析领域。

收稿日期: 2018-07-09; 修改稿收到日期: 2018-11-23.

基金项目: 国家自然科学基金(50908230)资助项目.

作者简介: 王海波* (1974-), 男, 博士, 副教授

(E-mail: haibarg@163.com).

2 精细积分法

线性定常系统的动力方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为质量阵、阻尼阵和刚度阵, $\mathbf{X}$ 为位移向量, $\mathbf{F}$ 为荷载向量。方程(1)的初始条件为

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \dot{\mathbf{X}}(0) = \dot{\mathbf{X}}_0 \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}_0$ 与 $\dot{\mathbf{X}}_0$ 分别为初位移与初速度向量。仿效哈密顿体系对偶变量的引入,令

$$\mathbf{P} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X}/2 \quad (3)$$

则方程(1)可表示为

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r}(t) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}/2 & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{CM}^{-1}\mathbf{C}/4 - \mathbf{K} & -\mathbf{CM}^{-1}/2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \quad (5a)$$

式(5a)也可以表示为

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

式(4)对应的齐次方程的通解为

$$\mathbf{v} = \exp(\mathbf{H} \cdot t) \cdot \mathbf{v}_0 \quad (6)$$

令时间步长为 τ , 则

$$\mathbf{v}(\tau) = \exp(\mathbf{H} \cdot \tau) \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_0 \quad (7)$$

式中 $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H} \cdot \tau)$ (8)

对于 $\mathbf{T}$ 阵的计算,有 2^N 类算法,其要点是利用加法定理

$$\exp(\mathbf{H} \cdot \tau) = [\exp(\mathbf{H} \cdot \tau/m)]^m \quad (9)$$

当 $m=2^N$, $N=20$ 时, $\Delta t = \tau/m$ 是非常小的一个时间区段,对于 Δt 有

$$\exp(\mathbf{H} \cdot \Delta t) \approx \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \Delta t + (\mathbf{H} \cdot \Delta t)^2/2 = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a \quad (10)$$

式中 $\mathbf{T}_a = \mathbf{H} \cdot \Delta t \cdot [\mathbf{I} + (\mathbf{H} \cdot \Delta t)/2]$ (11)

由于 $\mathbf{T}_a$ 的元素值非常小,当它与矩阵 $\mathbf{I}$ 相加时会由于计算机的舍入操作而丧失精度,为避免这一问题,将式(9)作如下分解。

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^N} = [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^{N-1}} \times [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^{N-1}} \quad (12)$$

还应注意,由于

$$(\mathbf{I} + \mathbf{T}_b) \times (\mathbf{I} + \mathbf{T}_c) = \mathbf{I} + \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_c + \mathbf{T}_b \times \mathbf{T}_c \quad (13)$$

式(13)相当于执行语句

for(iter=0; iter<N; iter++)

$$\mathbf{T}_a = 2\mathbf{T}_a + \mathbf{T}_a \times \mathbf{T}_a \quad (14)$$

当循环结束时

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a \quad (15)$$

式(11,14,15)便是指数矩阵的精细积分计算公式,也是精细积分法的关键之处。

3 增维精细积分法

增维精细积分法假定式(4)的非齐次项为一组(耦合或非耦合)齐次线性常微分方程组的解,则该方程组与式(4)对应的齐次方程组就可以合并成一组维数更高的齐次线性常微分方程组,从而可以利用式(7)逐步求解出结构的动力响应。

$$\text{设 } \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{r}^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}$ 或 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$, 在式(16)

中,将已知的非齐次项也当作系统状态变量纳入求解中。此时,线性定常结构动力系统的动力方程为

$$\dot{\mathbf{v}}^* = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{v}^* \quad (17)$$

式中 $\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ (18)

$\mathbf{H}^*$ 为 $4n \times 4n$ 的矩阵, $\mathbf{H}$, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 均为 $2n \times 2n$ 的矩阵。其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 $\mathbf{C}$ 矩阵的各元素均为 $n \times n$ 的分块矩阵。而矩阵 $\mathbf{D}$ 则依具体情况而定,代表非齐次项所满足的常微分方程组的关系,其表达式为

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}^* \quad (20)$$

即 $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}} \\ \ddot{\mathbf{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{F}} \end{bmatrix}$ (21)

式中 $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{F}}$ 是恒成立的,则相当于荷载项此时应当满足二阶常系数齐次线性微分方程组:

$$\ddot{\mathbf{F}} = \mathbf{D}_{21}\mathbf{F} + \mathbf{D}_{22}\dot{\mathbf{F}} \quad (22)$$

式中 $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 均为 $n \times n$ 的定常矩阵。关于式(22)的求解,可参考解微分方程的专著。文献[13]分别给出了荷载项为常数、一次多项式和正余弦时的增维精细积分法的表达式。考虑到论述的完备性,下面就满足式(22)的常用荷载形式给出 $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 的表达式。令

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{r}} \cdot f(t) \quad (23)$$

式中 $\bar{\mathbf{r}}$ 表示常向量, $f(t)$ 表示基本荷载函数。

(1) 荷载项为 $c_0 + c_1 t$

$$\ddot{f} = 0 \quad (24a)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 均为零矩阵。值得注意的是,

当 c_1 为 0, 即荷载为常数时, $\mathbf{D}$ 矩阵应当取为零矩阵; 当 c_1 不为 0 时, $\mathbf{D}$ 矩阵根据式(21)确定。

(2) 荷载项为 e^{ct}

$$\ddot{f} = c^2 f \quad (24b)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 为一对角阵, 其对角元素为 c^2 , $\mathbf{D}_{22}$ 为零矩阵。

(3) 荷载项为 a^t

$$\ddot{f} = (\ln a)^2 \cdot f \quad (24c)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 为一对角阵, 其对角元素为 $(\ln a)^2$, $\mathbf{D}_{22}$ 为零矩阵。

(4) 荷载项为 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$

$$\ddot{f} = -\omega^2 \cdot f \quad (24d)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 为一对角阵, 其对角元素为 $-\omega^2$, $\mathbf{D}_{22}$ 为零矩阵。

(5) 荷载项为 $(a_0 + a_1 t) e^{ct}$

$$\ddot{f} = -c^2 \cdot f + 2c \cdot \dot{f} \quad (24e)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 均为对角阵, 其对角元素分别为 $-c^2$ 与 $2c$ 。

(6) 荷载项为 $e^{ct}(c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t)$

$$\ddot{f} = -(c^2 + \omega^2) \cdot f + 2c \cdot \dot{f} \quad (24f)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 均为对角阵, 其对角元素分别为 $-(c^2 + \omega^2)$ 与 $2c$ 。

在确定 $\mathbf{H}^*$ 的各个元素后, 便可用式(25)计算指数矩阵

$$\mathbf{T}^* = \exp(\mathbf{H}^* \cdot \tau) \quad (25)$$

此时, 精细积分法的逐步积分公式为

$$\mathbf{v}_{k+1}^* = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{v}_k^* \quad (26)$$

可以发现, 在上述过程中, 矩阵的维数增大了一倍。状态向量的维数由 $2n$ 增大到了 $4n$, 而状态矩阵的维数由 $2n \times 2n$ 增大到了 $4n \times 4n$, 且增维后的状态矩阵仍为定常矩阵, 故其对应的指数矩阵在整个计算过程中只需计算一次, 这正是增维精细积分法的特点。

4 基于非齐次项傅里叶级数近似展开的增维精细积分法

当荷载项为式(24)以外的其他形式时, 式(22)难以满足。此时, 可将非齐次项展开成傅里叶级数形式, 然后再利用增维精细积分法的递推公式求解出结构的动力响应。

假定周期荷载函数 $f(t)$ 在求解域内, 可展开成傅里叶级数形式为

$$f(t) \cong b_0 + \sum_{i=1}^q [a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t)] \quad (27)$$

$$f_0 = b_0 \quad (28)$$

$$f_i = a_i \sin(i\omega t) + b_i \cos(i\omega t) \quad (i=1, 2, \dots, q) \quad (29)$$

$$\text{则有} \quad f = f_0 + \sum_{i=1}^q f_i \quad (30)$$

则可以得到表达式

$$\ddot{f} = \sum_{i=1}^q -(i\omega)^2 f_i \quad (31)$$

此时, 式(18)与式(18)中的 $\mathbf{D}$ 矩阵就成为如下形式,

$$\mathbf{H}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (32, 33)$$

式中 $\mathbf{D}_{21}$ 为对角线元素为 $-(i\omega)^2$ 的对角阵。由叠加原理可知, 分别求出 $f_i (i=0, 1, 2, \dots, q)$ 与初始条件下对应的结构动力响应, 再求和, 便可得到结构总的动力响应。

5 非线性动力分析的增维精细积分法

对于一般的非线性动力方程

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f}(\mathbf{v}, t) \quad (34)$$

将非线性项也看做荷载项, 并将 $\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 用 $t-t_k$ 的 j 次多项式 $\mathbf{p}(\mathbf{v}, t)$ 来近似,

$$\mathbf{p}(\mathbf{v}, t) = \mathbf{c}_0 + (t-t_k)\mathbf{c}_1 + \frac{(t-t_k)^2}{2!}\mathbf{c}_2 + \dots + \frac{(t-t_k)^j}{j!}\mathbf{c}_j \quad (35)$$

将 $\mathbf{p}(\mathbf{v}, t)$ 分别对时间 t 求一阶导数及二阶导数, 并对比式(35)可以发现, 当 $j \geq 2$ 时, 式(22)将难以满足, 这也是式(24a)只得到了一次多项式的原因。现在取 $j=1$, 即采用一次多项式来拟合非齐次项, 则有

$$\ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{v}, t) = 0 \quad (36)$$

此时, $\mathbf{D}_{21}$ 与 $\mathbf{D}_{22}$ 均为 $n \times n$ 的零矩阵。相应的 n 维向量 $\mathbf{c}_0$ 及 $\mathbf{c}_1$ 的求法可参考文献[9], 本文不再赘述。值得注意的是, 尽管本文采用了线性化的假设, 但 $\mathbf{c}_0$ 及 $\mathbf{c}_1$ 不直接体现在算法中, 如式(24a)所示。这种线性化的假设是直接体现在 $\mathbf{D}$ 矩阵上的, 代表了特殊荷载形式所满足的微分方程的关系。同时, 由于这种线性化的假设是设定在一个时间步长内, 不是设定在整个响应过程, 因此, 在每一时间步计算完成以后, 需按照式(16)重新组装状态向量, 这反映了非线性项的具体形式。

6 算例分析

算例 1 考虑线性二自由度动力学方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} te^{-t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

令 $v_1 = x_1, v_2 = x_2, v_3 = \dot{x}_1, v_4 = \dot{x}_2$, 相应的一阶微分方程组 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r}(t)$ 为

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ te^{-t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

取初值 $v_1(0) = 2.5, v_2(0) = v_3(0) = v_4(0) = 1.0$ 。取时间步长 $\tau = 1.0 \text{ s}$, 采用 Matlab 编程, 各种方法前 100 s 的计算结果列入表 1。

算例 1 的状态矩阵为奇异阵, 故涉及到对状态矩阵求逆的算法均不能使用, 如 PIM-L 算法^[1]。由表 1 可知, 即便是取时间步长 $\tau = 1.0 \text{ s}$, 科茨公式与高斯公式仍然具有很高的计算精度与计算效率, 且两者的数值特性相近, 适用于求解任意荷载下结构的动力响应。对于增维精细积分法, 其数值解是完全精确的, 且计算效率也高于另外两种算法, 即便是将时间步长取为 100 s, 仍然可以得到完全精确的数值解。这是因为式(17)在数学上是准确成立的, 因此, 其算法的数值精度完全取决于式(25)中指数矩阵 $\mathbf{T}^*$ 的计算精度。由于现行的编程

软件均具有其内部的指数矩阵计算函数, 即便是在大步长的情况下, 也能精确地计算出指数矩阵, 所以采用增维精细积分法不但能得到完全精确的数值解, 其计算效率也十分高。因此, 当荷载函数为式(24)的形式时, 可选用增维精细积分法精确高效地求解出结构的动力响应。

算例 2 考虑动力方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

式中 $p(t)$ 为 $T = 2\pi$ 的周期函数, 其在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $p(t) = t$ 。将 $p(t)$ 作傅里叶级数展开, 可得

$$p(t) = 2 \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \frac{\sin(it)}{i} \quad (40)$$

令 $v_1 = x_1, v_2 = x_2, v_3 = \dot{x}_1, v_4 = \dot{x}_2$, 相应的一阶微分方程组 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r}(t)$ 为

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

取初值 $v_1(0) = 2.5, v_2(0) = 0, v_3(0) = v_4(0) = 1.0$ 。取时间步长 $\tau = 1.0 \text{ s}$, 分别采用不同项数的傅里叶级数来拟合荷载函数 $p(t)$, 并与精确解作比较。结果列入表 2。

表 1 v_1 和 v_2 的数值结果比较

Tab. 1 Comparisons of numerical results of v_1 and v_2

Integration schemes	Time/s					Max error /%	CPU time /s
	1	10	20	50	100		
Exact solution	2.96483548	15.70789546	30.11153306	75.69485786	150.11385067	0.0000	—
	2.63880285	15.79264934	31.38846699	75.80514214	151.38614933	0.0000	
Cotes formula	2.96483811	15.70788559	30.11149901	75.69479853	150.11371758	0.0011	0.0328
	2.63879074	15.79262486	31.38844201	75.80506838	151.38602588	0.0046	
Gauss formula	2.96483291	15.70790487	30.11156566	75.69491468	150.11397819	0.0011	0.0325
	2.63881450	15.79267283	31.38849095	75.80521286	151.38626766	0.0044	
This paper	2.96483548	15.70789546	30.11153306	75.69485786	150.11385067	0.0000	0.0218
	2.63880285	15.79264934	31.38846699	75.80514214	151.38614933	0.0000	

表 2 本文方法结果与精确解比较

Tab. 2 Comparison between the result of this paper and exact solution

Fitting number	Time/s					CPU time /s
	1	5	10	15	30	
Exact solution	2.58742474	-2.10095795	8.06675904	-8.51265662	4.89939482	—
	1.70764811	1.37602404	2.64585516	-4.05657750	4.36665025	
$q=10$	2.57882700	-2.09866951	8.05844071	-8.50242705	4.89040810	0.0437
	1.70644074	1.37947739	2.64010418	-4.05025214	4.36518458	
$q=100$	2.58734067	-2.10092267	8.06668985	-8.51256273	4.89930592	0.1435
	1.70763430	1.37606136	2.64579262	-4.05650853	4.36663364	
$q=1000$	2.58742390	-2.10095760	8.06675836	-8.51265567	4.89939392	2.0062
	1.70764798	1.37602441	2.64585454	-4.05657681	4.36665009	

表中黑体数字表示与精确解不相吻合的部分。由表2可知,当取 $q=1000$ 时,数值结果基本能保证五位有效数字,基本能满足工程实际的需要。另一方面,当傅里叶级数的项数取较多时,其计算效率较低,这是无可避免的。但是值得注意的是,如果不需要知道结构的具体响应过程,而只需要知道某一时刻的响应,可将时间步长取大一些,在不影响算法精度的情况下可以大幅度提升计算效率。与PIM-F法^[2]相比,采用增维精细积分法不涉及矩阵的求逆,避免了矩阵奇异时的求解困难。

算例3 考虑平方非线性的二自由度动力学方程^[9]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.5^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} xy \\ y^2 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

设 $x=v_1, y=v_2, \dot{x}=v_3, \dot{y}=v_4$, 相应的一阶微分方程组 $\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}+\mathbf{f}(\mathbf{v}, t)$ 为

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_1 v_2 \\ v_2^2 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

取初值 $v_1(0)=v_2(0)=0.1, v_3(0)=v_4(0)=0$, 本文方法在时间步长 $\tau=1.0\text{ s}, 0.1\text{ s}$ 和 0.01 s 时,前30 s的分析结果列入表3。

由表3可知,当取 $\tau=1.0\text{ s}$ 时,本文方法的误差很大,这是因为在一个时间步长内,仅采用了一次多项式来拟合非齐次项,因此选用的时间步长不能过大。当取 $\tau=0.1\text{ s}$ 时,本文方法已经具有较高的精度。当取 $\tau=0.01\text{ s}$ 时,基本能保证小数点后六位的有效数字,基本满足工程实际的需要。因此,尽管本文方法所需时间步长较小,但仍可作为求解结构非线性动力响应的一种优良算法。

表3 v_1 和 v_2 的数值结果比较

Tab. 3 Comparisons of numerical results of v_1 and v_2

Time step	Time/s					Max error /%	CPU time /s
	1	5	10	15	30		
Exact solution	0.05760479	0.01990625	-0.07980816	-0.06845701	0.00203899	0.0000	—
	0.00996262	0.03741638	-0.07202800	-0.08516027	0.05719276	0.0000	
$\tau=1.0\text{ s}$	0.05862721	0.01807168	-0.08040081	-0.06647411	-0.00014665	1071.9229	0.0062
	0.01120378	0.03799238	-0.06972759	-0.08554714	0.05692511	124.5817	
$\tau=0.1\text{ s}$	0.05761955	0.01989349	-0.07982382	-0.06846544	0.00201970	9.4606	0.0218
	0.00997626	0.03742969	-0.07203288	-0.08517823	0.05720619	1.3691	
$\tau=0.01\text{ s}$	0.05760494	0.01990613	-0.07980831	-0.06845711	0.00203881	0.0883	0.0749
	0.00996275	0.03741651	-0.07202803	-0.08516043	0.05719289	0.0130	

注:表中每一时间步对应的两行分别表示 v_1 与 v_2 。

7 结 论

(1) 在文献[13]的基础上,仔细分析了增维精细积分法的性质,提出了使用增维精细积分法所应满足的条件,并在原文的基础上新增了四类荷载形式,进一步拓宽了其应用范围。对于其他周期荷载的情况,详细说明了采用傅里叶级数拟合非齐次项,然后再利用增维精细积分法求解结构动力响应的详细过程,并采用了数值算例说明了其数值特性。

(2) 通过在一个时间步长内,采用一次多项式来拟合非齐次项,将增维精细积分法应用到了非线性动力分析领域。数值算例表明,本文方法具有很高的计算效率,且不用对状态矩阵求逆。实际应用时,可适当选择时间步长,以平衡计算效率与计算精度之间的关系。该方法计算格式简单,易于编程,可用于多自由度体系的非线性动力分析。

参考文献(References):

- [1] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))
- [2] Lin J H, Shen W P, Williams F W. A high precision direct integration scheme for structures subjected to transient dynamic loading [J]. *Computers & Structures*, 1995, **56**(1): 113-120.
- [3] Wang M F, Au F T K. Precise integration methods based on the Chebyshev polynomial of the first kind [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2008, **7**(2): 207-216.
- [4] Wang M F, Au F T K. On the precise integration methods based on Padé approximations [J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(5-6): 380-390.
- [5] Wang M F. Reduced-order precise integration meth-

- ods for structural dynamic equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **27**(10):1569-1582.
- [6] 侯平兰,邓子辰.高层建筑结构地震响应的辛精细积分方法[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(4):442-451. (HOU Ping-lan, DENG Zi-chen. A symplectic precise integration method for seismic responses of tall buildings [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4):442-451. (in Chinese))
- [7] 都琳,侯平兰. Duffing 方程的辛精细积分方法研究[J]. *动力学与控制学报*, 2017, **15**(1):1-5. (DU Lin, HOU Ping-lan. Symplectic precise integration method for Duffing equation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, **15**(1):1-5. (in Chinese))
- [8] 富明慧,李勇息.求解病态线性方程组的预处理精细积分法[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(4):462-469. (FU Ming-hui, LI Yong-xi. A preconditioned precise integration method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4):462-469. (in Chinese))
- [9] 王海波,陈晋,李少毅.用于非线性动力分析的一种高效精细积分单步法[J]. *振动与冲击*, 2017, **36**(15):158-162, 229. (WANG Hai-bo, CHEN Jin, LI Shao-yi. An efficient precise integration single-step method for nonlinear dynamic analysis[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, **36**(15):158-162, 229. (in Chinese))
- [10] 任传波,贺光宗,李忠芳.结构动力学精细积分的一种高精度通用计算格式[J]. *机械科学与技术*, 2005, **24**(12):1507-1509. (REN Chuan-bo, HE Guang-zong, LI Zhong-fang. A high-precision and general computational scheme in precise integration of structural dynamics [J]. *Mechanical Science and Technology*, 2005, **24**(12):1507-1509. (in Chinese))
- [11] 富明慧,刘祚秋,林敬华.一种广义精细积分法[J]. *力学学报*, 2007, **39**(05):672-677. (FU Ming-hui, LIU Zuo-qiu, LIN Jing-hua. A generalized precise timestep integration method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(5):672-677. (in Chinese))
- [12] 张素英,邓子辰.非线性动力方程的增维精细积分法[J]. *计算力学学报*, 2003, **20**(4):423-426. (ZHANG Su-ying, DENG Zi-chen. Increment-dimensional precise integration method for nonlinear dynamic equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(4):423-426. (in Chinese))
- [13] 顾元宪,陈彪松,张洪武.结构动力方程的增维精细积分法[J]. *力学学报*, 2000, **32**(4):447-456. (GU Yuan-xian, CHEN Biao-song, ZHANG Hong-wu. Precise time-integration with dimension expanding method [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(4):447-456. (in Chinese))

Study on the application scope of the precise time-integration with dimension expanding method

WANG Hai-bo, HE Chong-jian, JIA Yao-wei

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The precise time-integration with dimension expanding method can transform the non-homogeneous dynamic equation into a homogeneous dynamic equation. Therefore the state matrix inversion is avoided and the dynamic response of structure can be solved easily. On the basis of careful analysis of the properties of the precise time-integration with dimension expanding method, the application conditions are proposed and its application scope is further expanded. And the expression of the corresponding precise time-integration with dimension expanding method is given when the load term is expanded into a Fourier series. At the same time, in a time step, by making the linear assumption of inhomogeneous terms, this paper successfully applies the precise time-integration with dimension expanding method to nonlinear dynamic analysis. This method has unified mathematical format, convenience in computer programming and high computational efficiency. Numerical examples demonstrate the effectiveness of this method.

Key words: the precise time-integration with dimension expanding method; Fourier series; superposition principle; linearized hypothesis; recursive algorithm

引用本文/Cite this paper:

王海波,何崇检,贾耀威.增维精细积分法的适用范围研究[J]. *计算力学学报*, 2019, **36**(5):618-623.

WANG Hai-bo, HE Chong-jian, JIA Yao-wei. Study on the application scope of the precise time-integration with dimension expanding method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(5):618-623.