

DOI: 10.7511/jslx20180813001

一种抛物线浅拱线性单元

李 焜, 王佳佳, 王斌泰, 许 晶*

(中国农业大学 水利与土木工程学院, 北京 100083)

摘要:为研究抛物线浅拱在复杂受力状态下的线性内力及位移,考虑拱的压弯耦合作用,基于力法和浅拱假定,对抛物线拱平衡方程、几何方程和物理方程进行了分析;求得了抛物线拱内力方程通解格式,构建了抛物线浅拱位移形函数。利用最小势能原理,构造了抛物线浅拱单元。算例表明,本文构造的抛物线浅拱单元计算的抛物线拱内力与理论解计算结果符合较好,在划分一个单元时最大相对误差仅为4.03%,可用于抛物线拱分析。

关键词:抛物线拱;压弯耦合;位移形函数;势能原理;控制方程

中图分类号:O231.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2019)05-0590-07

1 引言

拱是一种主要承受轴向压力,并由拱脚两端的推力维持平衡的平面曲线型压杆构件。拱形结构因其承载能力高和结构曲线优美而广泛用于桥梁、公路隧道和水利工程中的拱坝等结构中。这类拱结构所受荷载作用形式往往比较复杂,因此对该类拱在任意荷载下的受力性能进行分析,并提出一种精确且高效的计算方法很有必要。

抛物线拱是变曲率拱,平衡微分方程为变系数方程^[1],求解过程极其复杂,往往无法得到位移的精确解析解。项海帆等^[2]推导了任意轴线拱接挠度理论下的基本方程,并采用渐进法和差分法等数值方法求解内力及位移。Timoshenko等^[3]考虑截面面积及惯性矩随拱长变化,采用卡氏第二定理推导出了两铰拱及无铰拱在几种典型荷载作用下的内力及其影响线。胡大琳等^[4]给出了等截面抛物线两铰拱推力影响线的精确解析解。李新平等^[5]建立了固端抛物线拱的力法正则方程,推导出在均布荷载作用和跨中集中荷载作用下精确计算拱内力的公式,但该表达式非常复杂,不便于应用。

已有学者提出了各类静力法^[6-8]和有限元法。静力法的研究主要集中在采用浅拱假定或近似弧长微分的方法进行简化,以解决少数简单工况下抛物线内力及位移的计算问题。对于复杂工况和复

杂抛物线的结构分析,静力法无法得到满意解。张家玮等^[9]推导了考虑恒载效应影响时,拱形梁在活载作用下的非线性微分方程,得到了方程的近似闭合解。

有限元方法^[10,11]是一种效率更高、适用性更广且精度可以满足工程要求的数值计算方法^[12]。经典的拱结构有限元方法是用直梁单元模拟弧形拱段。因此,往往需要划分足够多的单元,经过反复试算逼近,才能保证计算精度,由此必然造成计算效率降低。严琨等^[13]将主缆离散为小挠度的细长梁单元,推导包含自重项的细长梁单元的刚度矩阵。文献[14-17]提出了构建杆件单元解析形函数的一般理论,并构造出一系列解析型单元。

为精确计算在各类支撑条件和荷载下平面抛物线拱的内力与位移,本文以抛物线拱为研究对象,采用浅拱假定,基于力法,对抛物线拱内力平衡方程、几何方程和物理方程进行分析,得到内力控制方程,进而构建了抛物线拱位移形函数。基于势能原理和位移形函数,构造了抛物线浅拱单元。通过算例验证了采用构造单元计算的抛物线拱内力与理论解计算结果符合较好,该单元可用于计算抛物线浅拱内力和位移。

2 基本理论

2.1 基本理论及定义

2.1.1 坐标系及物理量的定义

如图1所示,取拱顶为坐标原点,水平切线方向为 x 轴,方向向右为正, y 轴和 z 轴方向如图1所示。其中, l 和 f 分别为抛物线拱跨度和矢高。

拱在荷载作用下产生的水平位移 u 和竖直位

收稿日期:2018-08-13;修改稿收到日期:2018-11-21.

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金(2014XJ037);
农业部农业设施结构工程重点实验室开放课题
(201502)资助项目.

作者简介:许 晶*(1985-),女,博士,讲师
(E-mail: xujing@cau.edu.cn).

移 v , 与直角坐标轴方向一致为正, 转角位移 β 顺时针转动为正; 所有荷载 (水平分布荷载 q_x 、竖向分布荷载 q_y 及沿弧分布力矩 m_z) 采用右手螺旋法则与坐标轴方向一致为正; 定义杆轴截面外法向与横坐标轴正方向夹角为锐角时为正截面, 正截面上轴力 N 、剪力 V 和弯矩 M 与坐标轴正方向一致为正; α 为拱轴切线水平倾角, 易知 $y' = \tan \alpha$ 。

从图 1 可得拱轴线方程为

$$y = \rho x^2 \quad \left(-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

式中 $\rho = 4f/l^2$ 。

本文分析基于以下线弹性体基本假定。

- (1) 细长杆模型。采用 Euler-Bernoulli 弯曲理论计算截面的弯曲应力和弯曲变形, 忽略梁内剪切变形。
- (2) 小位移假定。不考虑轴力在挠度上对截面产生的二阶弯矩。
- (3) 浅拱假定。矢跨比 $f/l < 1/5$ 时, y'^2 可忽略。
- (4) 等截面。

2.1.2 节点位移与节点力向量

平面内抛物线拱有 6 个自由度, 单元节点位移向量定义为

$$\delta^e = \{u_1 \quad v_1 \quad \beta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \beta_2\}^T$$

节点力向量定义为

$$F^e = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad M_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad M_{z2}\}^T$$

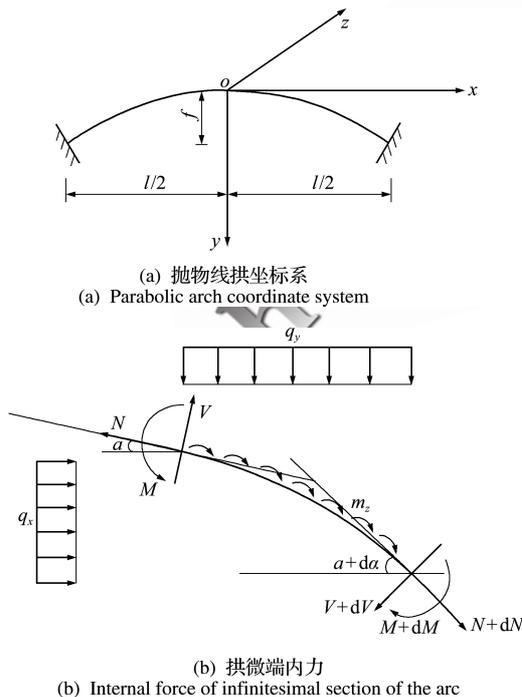


图 1 抛物线拱直角坐标系及微段内力
Fig. 1 Parabolic arch rectangular coordinate system and internal force of infinitesimal section

2.1.3 位移形函数

根据抛物线拱的静力分析, 当不考虑拱上的荷载作用时, 位移方程 (通解) 可表达为

$$\Delta = f_{\Delta} c$$

由位移形函数可表达为

$$\Delta = N_{\Delta} \delta^e$$

式中 Δ 为结构位移分量, f_{Δ} 为位移分量 Δ 的基函数向量, N_{Δ} 为位移分量 Δ 的形函数向量, c 为位移系数向量, $c = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6]^T$ 。

2.2 基本方程

2.2.1 平衡方程

取抛物线拱轴任意微段进行静力平衡分析, 如图 1(b) 所示。可得简化后平衡方程为

$$V + \frac{dM}{dx} \cos \alpha = -m_z \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dx} + N \frac{d\alpha}{dx} = q_x y' \sin \alpha - q_y \cos \alpha \quad (2)$$

$$\frac{dN}{dx} - V \frac{d\alpha}{dx} = -q_y \sin \alpha - q_x y' \cos \alpha \quad (3)$$

2.2.2 几何方程

位移增量为

$$du = \epsilon dx - \beta dy, \quad dv = \beta dx + \epsilon dy \quad (4,5)$$

假定浅拱微段初始曲率为 κ_0 , 不考虑梁截面的剪切变形, 则曲率的变化量为

$$\kappa = d\beta/ds \quad (6)$$

2.2.3 物理方程

由弹性假定, 可知轴向压缩方程以及转角弯曲方程为

$$N = EA \epsilon, \quad M = EI \kappa \quad (7,8)$$

式中 EA 和 EI 分别为拱截面在平面内的抗拉 (压) 刚度和抗弯刚度。

2.3 控制方程

2.3.1 轴力控制方程

联立式 (2,3), 消除剪力 V , 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dx^2} - \frac{\alpha''}{\alpha'} \frac{dN}{dx} + N \alpha'^2 = & -q_y \alpha' \left[2 \cos \alpha - \frac{\alpha'' \sin \alpha}{\alpha'^2} \right] - \\ & q_x \alpha' \left[\frac{y'' \alpha' \cos \alpha - y' \alpha'' \cos \alpha}{\alpha'^2} - 2 y' \sin \alpha \right] - \\ & \sin \alpha \frac{dq_y}{dx} - y' \cos \alpha \frac{dq_x}{dx} \end{aligned} \quad (9)$$

2.3.2 剪力控制方程

联立式 (2,3), 消除轴力 N , 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{\alpha''}{\alpha'} \frac{dV}{dx} + \alpha'^2 V = & q_x \alpha' \left(2 y' \cos \alpha + \right. \\ & \left. \frac{y'' \alpha' \sin \alpha - y' \alpha'' \sin \alpha}{\alpha'^2} \right) + q_y \alpha' \left[2 \sin \alpha + \frac{\alpha'' \cos \alpha}{\alpha'^2} \right] + \\ & y' \sin \alpha \frac{dq_x}{dx} - \cos \alpha \frac{dq_y}{dx} \end{aligned} \quad (10)$$

2.3.3 弯矩控制方程

因 $\alpha = \arctan y'$, 则 $\frac{\alpha''}{\alpha} = -2\alpha'y'$, 将式(1)代入式(10), 消除剪力 V , 可得

$$\frac{d^3 M}{dx^3} = -3y'y''q_x - y'^2 \frac{dq_x}{dx} + \frac{dq_y}{dx} - \frac{1}{\cos\alpha} \frac{d^2 m_x}{dx^2} + \frac{\alpha''}{\alpha' \cos\alpha} \frac{dm_x}{dx} - \frac{\alpha'^2}{\cos\alpha} m_x \quad (11)$$

3 方程求解

3.1 内力方程

3.1.1 弯矩方程

由式(11)知, 弯矩控制方程的齐次方程为

$$d^3 M/dx^3 = 0 \quad (12)$$

式(12)的通解即为弯矩方程, 可得

$$M = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \quad (13)$$

3.1.2 剪力方程

将式(13)代入式(1), 可得剪力方程为

$$V = -\cos\alpha c_2 - 2x\cos\alpha c_3 \quad (14)$$

3.1.3 轴力方程

将式(14)代入式(2), 可得轴力方程为

$$N = -\sin\alpha c_2 + \frac{2(\cos\alpha - x\alpha'\sin\alpha)}{\alpha'} c_3 \quad (15)$$

采用泰勒级数展开的方式将内力方程简化为多项式的形式。为避免分母出现 x 导致积分困难, 下文均采用如下泰勒级数展开式简化。

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{3}{8}y'^4 + \dots \quad (16)$$

$$\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{8}y'^4 + \dots \quad (17)$$

取式(16,17)前两项代入式(14,15), 得简化后的剪力及轴力方程为

$$V = (-1 + 2\rho^2 x^2) c_2 + (-2x + 4\rho^2 x^3) c_3 \quad (18)$$

$$N = (-2\rho x + 4\rho^3 x^3) c_2 + \left[\frac{1}{\rho} - 2\rho x^2 + 8\rho^3 x^4 \right] c_3 \quad (19)$$

3.2 变形及位移求解

将式(13)代入式(8), 可得弯曲变形:

$$\kappa = \frac{1}{EI} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \quad (20)$$

将式(20)代入式(6), 沿曲线弧长积分, 可得转角变形:

$$\beta = \frac{1}{EI} \left[\left(x + \frac{2}{3}\rho^2 x^3 \right) c_1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\rho^2 x^4 \right) c_2 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}\rho^2 x^5 \right] c_3 + c_4 \right] \quad (21)$$

将式(19)代入式(7), 可得轴向变形

$$\epsilon = \frac{1}{EA} \left[(-2\rho x + 4\rho^3 x^3) c_2 + \left[\frac{1}{\rho} - 2\rho x^2 + 8\rho^3 x^4 \right] c_3 \right] \quad (22)$$

将式(21,22)代入式(4,5), 并进行一次积分, 可得位移方程

$$u = -\frac{2\rho x^3(5+2\rho^2 x^2)}{15EI} c_1 - \left[\frac{\rho^3 x^6}{6EI} - \left[\frac{\rho^3}{EA} - \frac{\rho}{4EI} \right] x^4 + \frac{\rho x^2}{EA} \right] c_2 + \left[-\frac{4\rho^3 x^7}{35EI} + \left[\frac{8\rho^3}{5EA} - \frac{2\rho}{15EI} \right] x^5 - \frac{2\rho x^3}{3EA} + \frac{x}{\rho EA} \right] c_3 - \rho x^2 c_4 + c_6 \quad (23)$$

$$v = \frac{3x^2 + \rho^2 x^4}{6EI} c_1 + \left[\left[\frac{\rho^2}{10EI} + \frac{8\rho^4}{5EA} \right] x^5 + \left[\frac{1}{6EI} - \frac{4\rho^2}{3EA} \right] x^3 \right] c_2 + \left[\left[\frac{\rho^2}{15EI} + \frac{8\rho^4}{3EA} \right] x^6 + \left[\frac{1}{12EI} - \frac{\rho^2}{EA} \right] x^4 + \frac{x^2}{EA} \right] c_3 + x c_4 + c_5 \quad (24)$$

4 抛物线拱单元位移形函数

4.1 位移方程

水平位移方程为

$$u = f_u c \quad (25)$$

竖向位移方程为

$$v = f_v c \quad (26)$$

式中 f_u 和 f_v 为相应位移分量基函数向量。

4.2 变形方程

弯曲曲率向量为

$$\kappa = f_\kappa c \quad (27)$$

弯曲转角向量为

$$\beta = f_\beta c \quad (28)$$

轴向应变向量为

$$\epsilon = f_\epsilon c \quad (29)$$

式中 f_κ , f_β 和 f_ϵ 为相应变形基函数向量。

4.3 位移系数向量表达

定义节点位移矩阵为

$$\mathbf{B} = [f_u(x_1) \ f_v(x_1) \ f_\beta(x_1) \ f_u(x_2) \ f_v(x_2) \ f_\beta(x_2)]^T$$

式中 x_1 和 x_2 分别为抛物线拱拱脚横坐标, $x_1 = -\frac{l}{2}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ 。

根据节点位移定义, 得位移系数定解方程为

$$\delta^e = \mathbf{B} \mathbf{c}$$

则, 位移系数向量为 $\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1} \delta^e$ (30)

4.4 位移形函数

将式(30)分别代入式(25~29),根据形函数定义可得,水平位移的形函数为

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{f}_u \mathbf{B}^{-1} \quad (31)$$

竖向位移的形函数为

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{f}_v \mathbf{B}^{-1} \quad (32)$$

弯曲曲率的形函数为

$$\mathbf{N}_\kappa = \mathbf{f}_\kappa \mathbf{B}^{-1} \quad (33)$$

弯曲转角的形函数为

$$\mathbf{N}_\beta = \mathbf{f}_\beta \mathbf{B}^{-1} \quad (34)$$

轴向应变的形函数为

$$\mathbf{N}_\epsilon = \mathbf{f}_\epsilon \mathbf{B}^{-1} \quad (35)$$

5 抛物线拱单元

5.1 单元总势能

抛物线拱的总势能包括变形能和荷载势能两部分,其中,变形能包括轴向的压缩变形能和弯曲变形能,荷载势能包括水平分布力 q_x 、水平集中力 P_x 、集中力矩 M_z 、沿弧分布力矩 m_z 、竖向分布力 q_y 和竖向集中力 P_y 所产生的外荷载势能。

抛物线拱总势能为

$$\begin{aligned} \Pi_P = & \int_l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 ds + \int_l \frac{1}{2} EI \kappa^2 ds - \sum_i P_{xi} u_{pi} - \\ & \int_l q_x u dy - \sum_i M_{zi} \beta_{pi} - \int_l m_z \beta ds - \\ & \sum_i P_{yi} v_{pi} - \int_l q_y v dx - \sum_i F_i \delta_i \end{aligned} \quad (36)$$

以节点位移基函数表达的抛物线拱的势能泛函方程为

$$\begin{aligned} \Pi_P = & \frac{1}{2} EA \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \left[\int_l (\mathbf{f}_\epsilon \mathbf{B}^{-1})^T (\mathbf{f}_\epsilon \mathbf{B}^{-1}) ds \right] \boldsymbol{\delta}^e + \\ & \frac{1}{2} EI \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \left[\int_l (\mathbf{f}_\kappa \mathbf{B}^{-1})^T (\mathbf{f}_\kappa \mathbf{B}^{-1}) ds \right] \boldsymbol{\delta}^e - \\ & \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \mathbf{F}^e - \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \sum_i P_{xi} [\mathbf{f}_u(x_{pi}) \mathbf{B}^{-1}]^T - \\ & \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \int_l q_x (\mathbf{f}_u \mathbf{B}^{-1})^T dy - \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \sum_i M_{zi} [\mathbf{f}_\beta(x_{pi}) \mathbf{B}^{-1}]^T - \\ & \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \int_l m_z (\mathbf{f}_\beta \mathbf{B}^{-1})^T ds - \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \sum_i P_{yi} [\mathbf{f}_v(x_{pi}) \mathbf{B}^{-1}]^T - \\ & \boldsymbol{\delta}^e \mathbf{T} \int_l q_y (\mathbf{f}_v \mathbf{B}^{-1})^T dx \end{aligned} \quad (37)$$

5.2 势能变分

由最小势能原理可知,真实的位移必使结构的势能为驻值,应满足

$$\partial \Pi_P / \partial \boldsymbol{\delta}^e = 0 \quad (38)$$

则,式(38)可变换为

$$\begin{aligned} EA(\mathbf{B}^{-1})^T \int_l \mathbf{f}_\epsilon^T \mathbf{f}_\epsilon ds \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e + EI(\mathbf{B}^{-1})^T \int_l \mathbf{f}_\kappa^T \mathbf{f}_\kappa ds \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e = \\ (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i P_{xi} [\mathbf{f}_u(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l q_x \mathbf{f}_u^T dy + \\ (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i M_{zi} [\mathbf{f}_\beta(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l m_z \mathbf{f}_\beta^T ds + \\ (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i P_{yi} [\mathbf{f}_v(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l q_y \mathbf{f}_v^T dx + \mathbf{F}^e \end{aligned} \quad (39)$$

5.3 单元刚度矩阵及等效节点荷载

解析型抛物线拱单元的有限元格式为

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{F} \quad (40)$$

式中 $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}^e + \mathbf{F}^e$, $\tilde{\mathbf{F}}^e$ 为等效节点荷载。

由势能变分方程可得单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e = EA(\mathbf{B}^{-1})^T \int_l \mathbf{f}_\epsilon^T \mathbf{f}_\epsilon ds \mathbf{B}^{-1} + \\ EI(\mathbf{B}^{-1})^T \int_l \mathbf{f}_\kappa^T \mathbf{f}_\kappa ds \mathbf{B}^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

等效节点荷载为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^e = (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i P_{xi} [\mathbf{f}_u(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l q_x \mathbf{f}_u^T dy + \\ (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i M_{zi} [\mathbf{f}_\beta(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l m_z \mathbf{f}_\beta^T ds + \\ (\mathbf{B}^{-1})^T \sum_i P_{yi} [\mathbf{f}_v(x_{pi})]^T + (\mathbf{B}^{-1})^T \int_l q_y \mathbf{f}_v^T dx \end{aligned} \quad (42)$$

6 算例与分析

为验证本文单元的精度和效率,采用理论解析法^[3]、本文构造单元和普通等直梁单元,对抛物线拱进行分析。抛物线拱的基本参数为,跨度 $l = 14$ m,矢跨比 f/l 取值分别为 $1/4, 1/5, 1/8, 1/10, 1/20$ 和 $1/1000$,材料及物理参数分别为截面面积 $A = 0.25$ m²,截面惯性矩 $I = 5.208 \times 10^{-3}$ m⁴,弹性模量 $E = 2.6 \times 10^4$ MPa。分别计算在竖向沿跨均布荷载、跨中集中荷载和距右拱脚 $1/4$ 跨处集中荷载作用下的抛物线拱拱脚内力,计算结果分别列入表1~表3。其中,普通等直梁单元采用 ANSYS 软件的 BEAM3 梁单元,加载方案采用将竖向沿跨均布荷载等效为节点竖向集中力方法进行加载。

由表1~表3可知,采用本文构造的抛物线拱单元,计算的受沿跨竖向均布荷载作用下的拱脚内力与理论解符合较好,最高误差仅为 4.03%,分析可知,该误差主要是由对内力方程简化时所产生的截断误差引起的;采用等直梁单元计算抛物线拱内力时,即使划分为多个单元,内力计算误差仍高达 120.19%。

表1 受沿跨竖向均布荷载作用下的抛物线拱拱脚内力 ($q=10 \text{ kN/m}$)Tab. 1 Internal force of parabolic arch under vertical uniform load along the span ($q=10 \text{ kN/m}$)

支座形式	拱脚内力	模型	矢跨比							
			1/4	1/5	1/8	1/10	1/20	1/1000		
两端 铰支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	-69.760	-87.043	-138.196	-171.528	-324.044	-87.285	
			本文单元	计算值	-69.743	-87.033	-138.193	-171.526	-324.044	-87.283
		等直梁 单元	2 单元	相对误差/%	-0.02	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
				计算值	-69.644	-86.807	-137.200	-169.590	-310.370	-54.642
			4 单元	相对误差/%	-0.17	-0.27	-0.72	-1.13	-4.22	-37.40
				计算值	-69.737	-86.997	-138.000	-171.150	-321.370	-78.454
				相对误差/%	-0.03	-0.05	-0.14	-0.22	-0.83	-10.12
				相对误差/%	-0.03	-0.05	-0.14	-0.22	-0.83	-10.12
两端 固支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	-68.747	-85.047	-130.180	-156.438	-236.565	-14.531	
			本文单元	计算值	-68.685	-85.021	-130.182	-156.444	-236.568	-14.530
		等直梁 单元	2 单元	相对误差/%	-0.09	-0.03	0.00	0.00	0.00	-0.01
				计算值	-68.594	-84.785	-129.390	-155.120	-231.366	-13.640
			4 单元	相对误差/%	-0.22	-0.31	-0.61	-0.84	-2.20	-6.13
				计算值	-68.696	-84.970	-130.020	-156.220	-236.090	-14.479
		相对误差/%	-0.07	-0.09	-0.12	-0.14	-0.20	-0.36		
		相对误差/%	-0.07	-0.09	-0.12	-0.14	-0.20	-0.36		
	弯矩 /kN·m	理论解	计算值	2.781	4.421	11.282	17.150	52.797	163.198	
			本文单元	计算值	2.893	4.449	11.271	17.139	52.795	163.198
		ANSYS	2 单元	相对误差/%	4.03	0.63	-0.10	-0.06	0.00	0.00
				计算值	2.460	3.802	9.286	13.917	41.522	122.400
4 单元			相对误差/%	-11.54	-14.00	-17.69	-18.85	-21.36	-25.00	
			计算值	2.743	4.309	10.790	16.307	49.735	153.000	
	相对误差/%	-1.37	-2.53	-4.36	-4.92	-5.80	-6.25			
	相对误差/%	-1.37	-2.53	-4.36	-4.92	-5.80	-6.25			

表2 受跨中竖向集中荷载作用下抛物线拱拱脚内力 ($P=10 \text{ kN}$)Tab. 2 Internal force of parabolic arch under vertical concentrated load in midspan ($P=10 \text{ kN}$)

支座形式	拱脚内力	模型	矢跨比							
			1/4	1/5	1/8	1/10	1/20	1/1000		
两端 铰支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	-7.722	-9.668	-15.411	-19.148	-36.224	-9.762	
			本文单元	计算值	-7.701	-9.646	-15.380	-19.109	-36.151	-9.742
		等直梁 单元	2 单元	相对误差/%	-0.27	-0.23	-0.20	-0.20	-0.20	-0.20
				计算值	-9.949	-12.401	-19.600	-24.227	-44.338	-7.806
			4 单元	相对误差/%	28.84	28.27	27.18	26.52	22.40	-20.04
				计算值	-8.166	-10.213	-16.250	-20.170	-37.913	-9.259
				相对误差/%	5.75	5.64	5.44	5.34	4.66	-5.15
				相对误差/%	5.75	5.64	5.44	5.34	4.66	-5.15
两端 固支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	-9.029	-11.237	-17.342	-20.886	-31.686	-1.948	
			本文单元	计算值	-8.995	-11.217	-17.336	-20.884	-31.687	-1.949
		等直梁 单元	2 单元	相对误差/%	-0.38	-0.18	-0.03	-0.01	0.00	0.05
				计算值	-9.799	-12.112	-18.484	-22.160	-33.052	-1.949
			4 单元	相对误差/%	8.53	7.79	6.59	6.10	4.31	0.05
				计算值	-9.141	-11.346	-17.439	-20.977	-31.754	-1.949
		相对误差/%	1.24	0.97	0.56	0.44	0.21	0.05		
		相对误差/%	1.24	0.97	0.56	0.44	0.21	0.05		
	弯矩 /kN·m	理论解	计算值	3.619	3.513	2.758	2.018	2.694	17.482	
			本文单元	计算值	3.539	3.474	2.752	2.016	2.694	17.482
		等直梁 单元	2 单元	相对误差/%	-2.21	-1.11	-0.22	-0.10	0.00	0.00
				计算值	0.351	0.543	1.327	1.988	5.932	17.486
4 单元			相对误差/%	-90.30	-84.54	-51.89	-1.49	120.19	0.02	
			计算值	2.568	2.409	1.606	0.882	3.592	17.483	
	相对误差/%	-29.04	-31.43	-41.77	-56.29	33.33	0.01			
	相对误差/%	-29.04	-31.43	-41.77	-56.29	33.33	0.01			

表3 在距右支座 $l/4$ 处,受竖向集中荷载作用下抛物线拱拱脚内力 ($P=10$ kN)
 Tab.3 At $l/4$ from right support, the internal force of parabolic arch under vertical concentrated load ($P=10$ kN)

支座形式	拱脚内力	模型	矢跨比								
			1/4	1/5	1/8	1/10	1/20	1/1000			
两端 铰支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	-5.571	-6.942	-11.002	-13.650	-25.773	-6.941		
			本文单元	计算值	-5.571	-6.942	-11.002	-13.650	-25.773	-6.941	
		等直梁 单元	4 单元	相对误差/%	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
				计算值	-4.975	-6.201	-9.800	-12.113	-22.169	-3.903	
			8 单元	相对误差/%	-10.70	-10.67	-10.93	-11.26	-13.98	-43.77	
				计算值	-5.879	-7.322	-11.590	-14.366	-26.954	-6.578	
			8 单元	相对误差/%	5.53	5.47	5.34	5.25	4.58	-5.23	
				理论解	计算值	5.257	6.475	9.851	11.819	17.829	1.094
		两端 固支	水平 推力 /kN	理论解	计算值	5.257	6.475	9.851	11.819	17.829	1.094
					本文单元	计算值	5.263	6.479	9.853	11.820	17.830
等直梁 单元	4 单元			相对误差/%	0.11	0.06	0.02	0.01	0.01	0.00	
				计算值	4.900	6.056	9.242	11.080	16.526	0.974	
	8 单元			相对误差/%	-6.79	-6.47	-6.18	-6.25	-7.31	-10.97	
				计算值	5.243	6.466	9.855	11.829	17.851	1.094	
	8 单元			相对误差/%	-0.27	-0.14	0.04	0.08	0.12	0.00	
				理论解	计算值	5.220	5.176	4.779	4.371	1.739	6.552
两端 固支	左端 弯矩 /kN·m			理论解	计算值	5.220	5.176	4.779	4.371	1.739	6.552
					本文单元	计算值	5.146	5.140	4.773	4.369	1.739
		等直梁 单元	4 单元	相对误差/%	-1.42	-0.70	-0.13	-0.05	0.00	0.00	
				计算值	0.176	0.272	0.663	0.994	2.966	8.743	
			8 单元	相对误差/%	-96.63	-94.74	-86.13	-77.26	70.56	33.44	
				计算值	4.636	4.564	4.139	3.740	1.240	6.553	
			8 单元	相对误差/%	-11.19	-11.82	-13.39	-14.44	-28.69	0.02	
				理论解	计算值	-6.943	-7.244	-8.019	-8.535	-11.328	-19.677
		两端 固支	右端 弯矩 /kN·m	理论解	计算值	-6.943	-7.244	-8.019	-8.535	-11.328	-19.677
					本文单元	计算值	-6.835	-7.185	-8.005	-8.528	-11.327
等直梁 单元	4 单元			相对误差/%	-1.56	-0.81	-0.17	-0.08	-0.01	0.00	
				计算值	-0.176	-0.272	-0.663	-0.994	-2.966	-8.743	
	8 单元			相对误差/%	-97.47	-96.25	-91.73	-88.35	-73.82	-55.57	
				计算值	-7.988	-8.204	-8.828	-9.280	-11.858	-19.678	
	8 单元			相对误差/%	15.05	13.25	10.09	8.73	4.68	0.01	

注:表1~表3中理论解采用卡氏定理求解时,只考虑了轴向变形能和弯曲变形能,并未考虑剪切变形能,和论文中的 Euler-Bernoulli 假定是一致的,因此两种方法的对比分析具有可比性。

7 结 语

考虑压弯耦合的影响,采用静力法,得到了抛物线浅拱内力及位移表达式,建立了位移形函数。采用最小势能原理,基于位移形函数,构造了抛物线浅拱单元。算例表明,构造的抛物线浅拱单元,不需划分单元,即可保证计算的抛物线拱内力与理论解符合较好,相对误差最大仅为 4.03%。该单元可对不同支座和不同荷载工况的抛物线浅拱结构进行分析。相较需划分较多单元才可以保证精度的传统经典直梁单元,该抛物线浅拱单元在计算效率和精度方面都有较大提高。

参考文献(References):

[1] 郭彦林, 窦超. 现代拱形钢结构设计原理与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2013. (GUO Yan-lin, DOU Chao. *Design Fundamentals and Application of Contemporary Steel Arch Structures* [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))

[2] 项海帆, 刘光栋. 拱结构的稳定与振动 [M]. 北京:

人民交通出版社, 1991. (XIANG Hai-fan, LIU Guang-dong. *Stability and Vibration of Arch Structure* [M]. Beijing: People's Transportation Press, 1991. (in Chinese))

[3] Timoshenko S P, Young D H. *Theory of Structures* [M]. New York: McGraw-Hill, 1965.

[4] 胡大琳, 陈 薇. 大矢跨比抛物线拱精确分析 [J]. 西安公路学院学报, 1994, 14(1): 1-5, 24. (HU Da-lin, CHEN Wei. Precise analysis of two hinged parabolic arches of large rise to span ratio [J]. *Journal of Xi'an Transportation University*, 1994, 14(1): 1-5, 24. (in Chinese))

[5] 李新平, 陈 湖, 张 勇等. 抛物线拱的内力精确计算实用公式 [J]. 科学技术与工程, 2010, 10(6): 1453-1457. (LI Xin-ping, CHEN Hu, ZHANG Yong, et al. Practical formula for accurate calculation of parabolic arch internal forces [J]. *Science Technology and Engineering*, 2010, 10(6): 1453-1457. (in Chinese))

[6] Bradford M A, Pi Y L, Yang G T, et al. Effects of approximations on non-linear in-plane elastic buckling and post buckling analyses of shallow parabolic arches [J]. *Engineering Structures*, 2015, 101: 58-67.

- [7] 胡常福,雷亮亮,陈海龙,等.等截面抛物线拱桥内力实用解析解研究[J].铁道科学与工程学报,2011,8(5):12-18. (HU Chang-fu, LEI Liang-liang, CHEN Hai-long, et al. Research on practical analytic solution of parabolic arch bridges with uniform section [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2011, 8(5):12-18. (in Chinese))
- [8] 杨雨厚,刘来君,孙维刚,等.等截面抛物线无铰拱挠度影响线实用解析解[J].计算力学学报,2017,34(4):480-486. (YANG Yu-hou, LIU Lai-jun, SUN Wei-gang, et al. Practical analytical solution of deflection influence line of clamped parabolic arch bridges with uniform section [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, 34(4):480-486. (in Chinese))
- [9] 张家玮,周世军,赵建昌,考虑恒载效应的拱形梁静力近似解[J].计算力学学报,2010,27(4):655-660,666. (ZHANG Jia-wei, ZHOU Shi-jun, ZHAO Jian-chang. Approximate solutions of static arch beams considering static loads effect [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27(4):655-660,666. (in Chinese))
- [10] Liu G R, Dai K Y, Nguyen T T. A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems [J]. *Computational Mechanics*, 2007, 39(6):859-877.
- [11] Liu G R, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. A variationally consistent α FEM (VC α FEM) for solution bounds and nearly exact solution to solid mechanics problems using quadrilateral elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 85(4):461-497.
- [12] Clough R W. The finite element method in plane stress analysis [A]. Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation[C]. Pittsburgh Pa, 1960.
- [13] 严 琨,沈锐利.基于细长梁单元的悬索桥主缆线形分析[J].计算力学学报,2016,33(3):381-387. (YAN Kun, SHEN Rui-li. Study on main cable shape of suspension bridge based on slender beam element [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, 33(3):381-387. (in Chinese))
- [14] 李 潇,王宏志,李世萍,等.解析型 Winkler 弹性地基梁单元构造[J].工程力学,2015,32(3):66-72. (LI Xiao, WANG Hong-zhi, LI Shi-ping, et al. Element for beam on Winkler elastic foundation based on analytical trial functions [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(3):66-72. (in Chinese))
- [15] 李 静,蒋秀根,王宏志,等.解析型弹性地基 Timoshenko 梁单元[J].工程力学,2018,35(2):221-229,248. (LI Jing, JIANG Xiu-gen, WANG Hong-zhi, et al. Analytical element for Timoshenko beam on elastic foundation [J]. *Engineering Mechanics*, 2018, 35(2):221-229,248. (in Chinese))
- [16] 郭韦佟,丁 敏,邓 婷,等.圆拱结构静力分析的直接刚度法[J].广西大学学报(自然科学版),2017,42(4):1351-1360. (GUO Wei-tong, DING Min, DENG Ting, et al. Direct stiffness method for static analysis of circular arch structure [J]. *Journal of Guangxi University (Natural Science Edition)*, 2017, 42(4):1351-1360. (in Chinese))
- [17] 郭韦佟,朱 丹,宓 林,等.拱形屋面温室纵向抗风分析中的曲梁刚度矩阵模型[J].中国农业大学学报,2017,22(10):113-119. (GUO Wei-tong, ZHU Dan, MI Lin, et al. Curved beam stiffness matrix model for the longitudinal wind resistance analysis of arch roof greenhouse [J]. *Journal of China Agricultural University*, 2017, 22(10):113-119. (in Chinese))

A linear element for parabolic shallow arch

LI Ting, WANG Jia-jia, WANG Bin-tai, XU Jing*

(School of Water Resource & Civil Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Abstract: To study the linear internal force and displacement of parabolic shallow arch under complex stress state the equilibrium equations, geometric equations and physical equations were analyzed, based on the assumption of flat arch, by considering the arch bending coupling. The general solution scheme of the parabolic arch internal force equation was obtained and the displacement function of a parabolic shallow arch was constructed. Based on the principle of minimum potential energy, a parabolic shallow arch unit was modelled. The numerical example shows that the calculation precision of the internal force of the parabolic shallow arch unit constructed in this paper is good, and the maximum relative error of one arch unit is only 4.03%, which can be used in the analysis of a parabolic arch.

Key words: parabolic arch; compression-bending coupling; displacement shape functions; potential energy principle; governing equation

引用本文/Cite this paper:

李 焱,王佳佳,王斌泰,等.一种抛物线浅拱线性单元[J].计算力学学报,2019,36(5):590-596.

LI Ting, WANG Jia-jia, WANG Bin-tai, et al. A linear element for parabolic shallow arch [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(5):590-596.