

Helmholtz 边界积分方程中奇异积分间接求解方法

周 琪, 陈永强*

(北京大学 工学院 力学与工程科学系, 北京 100871)

摘 要:提出了间接求解传统 Helmholtz 边界积分方程 CBIE 的强奇异积分和自由项系数,以及 Burton-Miller 边界积分方程 BMBIE 中的超强奇异积分的特解法。对于声场的内域问题,给出了满足 Helmholtz 控制方程的特解,间接求出了 CBIE 中的强奇异积分和自由项系数。对于声场外域对应的 BMBIE 中的超强奇异积分,按 Guiggiani 方法计算其柯西主值积分需要进行泰勒级数展开的高阶近似,公式繁复,实施困难。本文给出了满足 Helmholtz 控制方程和 Sommerfeld 散射条件的特解,提出了间接求出超强奇异积分的方法。推导了轴对称结构外场问题的强奇异积分中的柯西主值积分表达式,并通过轴对称问题算例证明了本文方法的高效性。数值结果表明,对于内域问题,采用本文特解法的计算结果优于直接求解强奇异积分和自由项系数的结果,且本文的特解法可避免针对具体几何信息计算自由项系数,因而具有更好的适用性。对于外域问题,两者精度相当,但本文的特解法可避免对核函数进行高阶泰勒级数展开,更易于数值实施。

关键词:Burton-Miller 边界积分方程;超强奇异积分;柯西主值积分;特解法

中图分类号:O175.8

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2019)05-0576-07

1 引 言

边界元法以高精度和降维等特性广泛用于 Helmholtz 问题的分析中,特别是对于外域问题,基本解满足无穷远处的 Sommerfeld 散射条件,因此只需要在结构边界划分单元。对于声场外域问题,采用传统 Helmholtz 边界积分方程会出现解不唯一的现象,Burton 等^[1]提出了用 Burton-Miller 边界积分方程克服解不唯一的问题,但需要准确计算边界积分方程的奇异积分。

从 Cruse 等^[2,3]发展 2D 弹性静力学问题的边界积分方程以来,不同阶次的奇异积分受到广泛关注。对于 2D 或者 3D 问题的弹性静力学问题,强奇异积分可以通过刚体位移法间接求出。但是对于轴对称结构,刚体位移法在径向方向不存在。文献^[4,5]提出在轴向方向采用刚体位移,径向方向采用静水压等简单特解间接求出强奇异积分。对于弹性动力学问题,刚体位移法不适用,Guiggiani 等^[6,7]提出了直接求解强奇异积分的方法,且对于所有的核函数(基本解)和单元类型都适用。Gao^[8]采用 Guiggiani 的思想推导了 2D 边界积分

方程不同阶次奇异积分的渐近表达式。对于声场外域问题,边界积分方程会出现超强奇异积分,Guiggiani 等^[9]通过将核函数进行泰勒级数高阶展开处理超强奇异积分,公式复杂,不利于数值实施。文献^[10-12]通过奇异性减掉技术和 Laplace 边界积分方程的性质,提出了正则化的方法来处理 3D 声场问题的超强奇异积分,但是形式复杂,且需要额外计算 Laplace 边界积分方程中核函数的积分。王现辉等^[13]通过围道积分,针对常值单元给出了 2D 声场问题的超强奇异积分的解析表达式。Tadeu 等^[14]针对常值单元,给出了 3D 声场问题强奇异积分和超强奇异积分的解析积分形式,但只限于常值单元。Wu 等^[15]针对线性单元,采用点集的方法(源点与单元节点不重合),通过将积分核中的指数函数进行 Taylor 展开,得到解析表达式,但是该方法只适用于平面三角形单元。赵志高等^[16]通过非等参单元的四边形坐标变换消除强奇异性,但不能消除超强奇异积分。

本文提出特解法间接求解 Burton-Miller 边界积分方程中的超强奇异积分,给出满足 Helmholtz 控制方程和 Sommerfeld 辐射条件的特解,利用系数矩阵的非对角元素间接求出带有超强奇异积分的主对角元素,避免将核函数进行泰勒级数的高阶展开,且不受单元类型的限制。对于内域问题,本

收稿日期:2018-09-10;修改稿收到日期:2018-10-22.

基金项目:国家重点研发计划(2018YFC0809700);国家自然科学基金(11332001)资助项目.

作者简介:陈永强*(1973-),男,博士,副教授
(E-mail:chenyq@pku.edu.cn).

文间接法可间接求解强奇异积分和自由项系数,给出满足 Helmholtz 控制方程的特解,避免对核函数进行泰勒展开求解强奇异积分,也避免针对具体几何信息求解自由项系数,具有更好的适用性。本文特解法简单,易于数值实施,且对所有的单元类型都适用。

2 声场问题的边界积分方程

声压 p 满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) = 0 \quad (1)$$

式中 $p(x)$ 表示点 x 处的声压,波数 $k = 2\pi f/c$, f 为频率, c 为声速。边界条件为

$$\begin{aligned} p(x) &= \bar{p}(x) \quad (x \in S_p) \\ \frac{\partial p(x)}{\partial n} &= i\rho\omega \bar{v}(x) \quad (x \in S_q) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 n 是流体的外法线方向, ω 为圆频率, ρ 为流体密度, $i = \sqrt{-1}$ 为复数单位。 S_p 和 S_q 分别是指定声压和法向导数的边界, $\bar{(\cdot)}$ 表示边界上的给定值。同时,声压 p 满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{(\alpha-1)/2} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - ikp \right) = 0 \quad (3)$$

式中 α 是问题的维度(2D 问题 $\alpha = 2$, 3D 问题 $\alpha = 3$)。Sommerfeld 辐射条件保证了所有辐射和反射的波都是向外的。Helmholtz 方程的等效积分形式为

$$\begin{aligned} p(x^p) &= \int_S G(x^p; x^q) \frac{\partial p}{\partial n_q} dS_q - \\ &\int_S \frac{\partial G}{\partial n_q}(x^p; x^q) p dS_q + p_{inc}(x^p) \end{aligned} \quad (4)$$

以上为声场问题的传统边界积分方程 CBIE, 其中 p_{inc} 表示入射场的声压, $G(x^p, x^q)$ 为声场问题的基本解。

$$G(p, q) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (2D) \quad (5)$$

$$G(p, q) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (3D)$$

$H_0^{(1)}$ 表示第 0 阶第一类 Hankel 函数。

当源点 p 趋于边界时,采用以奇异点 p 为球心, ϵ 为半径的球面包围奇异点,将其排除在边界积分域之外, e_ϵ 代表原表面中挖去的部分, s_ϵ 为球面的域内部分,如图 1 所示。去除奇异点之后,式(4)为

$$p(x^p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon+s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p dS_q =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon+s_\epsilon} G \frac{\partial p}{\partial n_q} dS_q + p_{inc}(x^p) \quad (6)$$

式中 等号右端积分中, G 是弱奇异的,数学上可积;现考察式(6)的等号左端积分,可进一步写为

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon+s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p dS_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S-\epsilon_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p dS_q + \int_{s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p dS_q \right] \quad (7)$$

式中 等号右端的第一部分为柯西主值积分,第二部分将 p 在 x^p 处做泰勒展开,取一阶近似,可得

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p(x^q) dS_q &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} [p(x^q) - \\ &p(x^p)] dS_q + p(x^p) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} dS_q \end{aligned} \quad (8)$$

由于 p 是连续的,因此式(8)等号右端第一部分为 0。将式(7,8)代入式(6)可得传统边界积分方程为

$$\begin{aligned} c(x^p) p(x^p) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n_q} p dS_q = \\ \int_S G \frac{\partial p}{\partial n_q} dS_q + p_{inc}(x^p) \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $c(x^p)$ 的表达式为

$$c = 1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_\epsilon} \frac{\partial G(x^p, x^q)}{\partial n} dS_q \quad (10)$$

$c(x^p)$ 是与边界光滑程度有关的自由项。式(9)的第一部分积分为柯西主值积分,为了书写方便,将其写成普通积分符号 $\int_S$ 形式。CBIE 可用于求解内域问题,但在求解外域问题时,当求解的频率与物体本身的频率相关时,会遇到解不唯一的现象。本文采用 Burton-Miller 边界积分方程克服这个问题^[1]。Burton-Miller 边界积分方程先将传统边界积分方程对源点 x^p 的法向进行偏导,得到 HBIE,

$$\begin{aligned} c(x^p) \frac{\partial \varphi(x^p)}{\partial n_p} &= \int_S \frac{\partial G}{\partial n_p} \frac{\partial \varphi}{\partial n_q} dS_q - \\ &\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n_q \partial n_p} \varphi_q dS_q + \frac{\partial p_{inc}(x^p)}{\partial n_p} \end{aligned} \quad (11)$$

将 CBIE 和 HBIE 进行线性叠加,得到 Burton-Miller 边界积分方程为

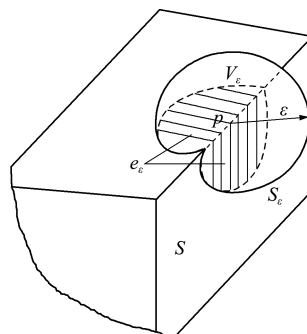


图 1 奇异点位于边界示意图
Fig. 1 Singular point on the boundary

$$c(x^p)p(x^p) + \int_S \frac{\partial G}{\partial n_q} p_q dS_q + \mu \int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n_q \partial n_p} p_q dS_q =$$

$$\int_S G \frac{\partial p}{\partial n_q} dS_q + \mu \left[\int_S \frac{\partial G}{\partial n_p} \frac{\partial p}{\partial n_q} dS_q - c \frac{\partial p(x^p)}{\partial n_p} \right] +$$

$$p_{inc}(x^p) + \mu \frac{\partial p_{inc}(x^p)}{\partial n_p} \quad (12)$$

式中 μ 为耦合常数,一般取为 i/k 。对于轴对称结构有 $dS = R_q d\theta d\Gamma$ ($\theta \in [0, 2\pi]$)。

将 Γ 进行离散, θ 方向划分若干区间(本文采取等分方式),物理量通过形函数 $N_i(\xi_1)$ 插值,得到线性代数方程组

$$[H]\{p\} - [G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} = \{p_{inc}\} \quad (13)$$

离散条件下,式(12)的各项积分分别为

$$L_i = \int_S G dS_q = \int_{-1}^1 \int_{\theta^1}^{\theta^2} G d\theta R_q J_1(\xi_1) N_i(\xi_1) d\xi_1$$

$$M_i = \int_S \frac{\partial G}{\partial n} dS_q = \int_{-1}^1 \int_{\theta^1}^{\theta^2} \frac{\partial G}{\partial n} d\theta R_q J_1(\xi_1) N_i(\xi_1) d\xi_1$$

$$N_i = \int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q} dS_q = \int_{-1}^1 \int_{\theta^1}^{\theta^2} \frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q} d\theta R_q J_1(\xi_1) N_i(\xi_1) d\xi_1 \quad (14)$$

式中 θ^1 和 θ^2 为 θ 方向的积分区间。对于三维情况, L_i 具有 $1/r$ 的弱奇异性, M 具有 $1/r^2$ 的强奇异性, N_i 具有 $1/r^3$ 的超强奇异性。

3 数值积分

对于内域问题,需要处理弱奇异积分和强奇异积分。其中弱奇异积分可直接求解;对于强奇异积分,本文提出了一种简单特解法可间接求出强奇异积分的柯西主值部分,且可避免直接求解自由项系数。对于外域问题,需要处理强奇异积分和超强奇异积分。本文采用 Guiggiani 等^[6,7]介绍的方法推导轴对称结构强奇异积分的柯西主值积分;而对于超强奇异积分,采用 Guiggiani 的方法直接求解需要对积分核函数进行泰勒展开的高阶近似,公式复杂,本文提出了一种简单特解法间接求解超强奇异积分。

3.1 柯西主值积分

式(14)含有不同奇异程度的奇异积分,需要计算这些奇异积分的柯西主值部分。柯西主值积分的思想是将被积函数减掉包含同样奇异性的核函数之后得到无奇异性的积分核,对其积分可采用普通高斯积分(第一部分积分);对于减去部分的积分(第二部分积分),根据柯西主值积分的存在性,可以得到解析积分表达式。以 $1/r^2$ 的强奇异性为例进行轴对称情况下柯西主值积分的推导。为了使

用高斯公式,将 θ 方向的积分区间 $[\theta^1, \theta^2]$ 通过简单线性变换映射到 $[-1, 1]$, 变换对应的雅可比为 $J_2(\xi_2)$, 方程(14)的 M_i 为

$$M_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{R_p^m - \sigma_\epsilon^m} \frac{\partial G}{\partial n} J_1(\xi_1) J_2(\xi_2) R_q N_i(\xi_1) d\xi =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{R_p^m - \sigma_\epsilon^m} F(\xi_1, \xi_2) d\xi \quad (15)$$

式中 被积函数 $F(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial G}{\partial n} J_1(\xi_1) J_2(\xi_2) R_q \times N_i(\xi_1)$, 变换后的积分域为 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, 如图2所示。图2(a)的 σ_ϵ 为图1中 e_ϵ 在局部坐标系下的投影, m 是与奇点 η 相连的单元数。将直角坐标系 (ξ_1, ξ_2) 通过式(16)转化为极坐标系 (ρ, φ) 。

$$\xi_1 = \eta_1 + \rho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \eta_2 + \rho \sin \varphi \quad (16)$$

将源点到场点的距离 r 在奇异点附近进行泰勒展开,由于 M_i 具有 $1/r^2$ 的强奇异性,因此取一阶近似,

$$r = x^q - x^p = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} (\xi_1 - \eta_1) + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\xi_2 - \eta_2) +$$

$$o(\rho^2) = \rho \left[\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} \cos \varphi + \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \sin \varphi \right] + o(\rho^2) =$$

$$\rho A(\varphi) + o(\rho^2) \quad (17)$$

式中 (η_1, η_2) 为奇异点的局部坐标。将式(17)代入式(15)的被积函数 $F(\xi_1, \xi_2)$, 其在奇异点附近的渐近表达式为

$$F[\xi_1(\rho, \varphi), \xi_2(\rho, \varphi)] = f(\varphi)/\rho^2 \quad (18)$$

积分中的被积函数减去在奇异点附近的近似表达式,然后再加上减去部分的积分,可得

$$M_i = \sum_m \int_{\varphi_1^m}^{\varphi_2^m} \int_{\sigma_\epsilon^m}^{\bar{\rho}(\varphi)} F - \frac{f(\varphi)}{\rho} d\rho d\varphi +$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\varphi_1^m}^{\varphi_2^m} \int_{\sigma_\epsilon^m}^{\bar{\rho}(\varphi)} \frac{f(\varphi)}{\rho} d\rho d\varphi \quad (19)$$

式(19)利用了 $d\xi_1 d\xi_2 = \rho d\rho d\varphi$ 。积分上限为 $\bar{\rho}(\varphi)$

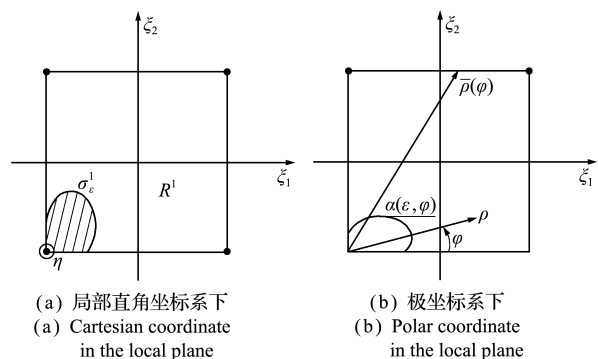


图2 局部直角坐标系和极坐标系下的积分域

Fig. 2 Integral domain in the cartesian coordinate and polar coordinate in the local plane

$$\bar{\rho}(\varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\cos \varphi} & (0 \leq \varphi \leq \pi/4) \\ \frac{2}{\sin \varphi} & (\pi/4 < \varphi \leq \pi/2) \end{cases} \quad (20)$$

下限 $\alpha(\varepsilon, \varphi) = \varepsilon/A(\varphi)$, 其中 $A(\varphi)$ 为向量 $\mathbf{A}(\varphi)$ 的模。第一项积分通过将核函数减去近似表达式成为普通积分,可直接利用高斯积分计算;第二项积分根据柯西主值积分的存在性定理可以得到解析表达式为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m \int_{\varphi_1^m}^{\varphi_2^m} \int_{\alpha(\varepsilon, \varphi)}^{\bar{\rho}(\varphi)} \frac{f(\varphi)}{\rho} d\rho d\varphi = \sum_m \int_{\varphi_1^m}^{\varphi_2^m} f(\varphi) [\ln \bar{\rho}(\varphi) A(\varphi)] d\varphi \quad (21)$$

对于式(14)的超强奇异积分,Guiggiani 方法需要将被积函数在奇异点附近做泰勒二阶近似,公式复杂。本文提出采用特解法间接求出超强奇异积分。

3.2 特解法

传统边界积分方程(内域问题)和 Burton-Miller 边界积分方程(外域问题)离散后形成的方程(13)适用于所有的边界条件。对于内域问题, $[G]$ 矩阵的主对角元素含有弱奇异积分, $[H]$ 矩阵的主对角元素含有强奇异积分和自由项系数。Skudrzyk^[17]给出了脉动球产生的声场的解析解,本文将该解析解作为满足 Helmholtz 方程的特解 p^* 和相应的 dp^*/dn , 将特解代入方程(13),利用非对角元素间接求出了 $[H]$ 矩阵的主对角元素。

$$H_{ll} = \left[\sum_{m=0}^{m=N} G_{lm} \frac{\partial p_m^*}{\partial n} - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq l}}^{m=N} H_{lm} p_m^* \right] / p_l^* \quad (22)$$

以上过程如图 3 所示。注意到式(22)中 p_l^* 不能等于 0,对于内域问题,本文提出了以下特解,

$$p^* = e^{ikz}, \quad \partial p^* / \partial n = ike^{ikz} n_z \quad (23)$$

式中 n_z 表示 z 方向的法线方向。将式(23)代入式(22)即可求出 $[H]$ 矩阵的主对角元素。 $[H]$ 矩阵的主对角元素含有强奇异积分和自由项系数,从式(22)可以看出, $[H]$ 矩阵的主对角元素是通过其他非对角元素间接求出,因此采用特解法求解声场内域问题,可避免直接求解强奇异积分和自由项系数。

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1^*}{\partial n} \\ \frac{\partial p_2^*}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial p_n^*}{\partial n} \end{bmatrix}$$

图 3 特解法

Fig. 3 Particular method

对于外域问题, $[G]$ 矩阵的主对角元素含有强奇异积分和对角线元素, $[H]$ 矩阵的主对角元素含有超强奇异积分和对角线元素。强奇异积分可以采用 3.1 节的方法求出,而对于超强奇异积分,如果采用 Guiggiani 提出的方法需要将核函数进行泰勒展开的高阶近似,公式繁琐。本文提出对应的特解法间接求解超强奇异积分。对于外域问题,要求特解不仅满足 Helmholtz 方程,还要满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件。本文采用脉动球产生的声场作为特解,即

$$p^* = \frac{i\rho_f \omega a^2 v_0}{(-ika + 1)r} e^{ik(r-a)} \quad (24)$$

式中 a 为球的半径, v_0 为法向速度,在球面 $r = a$ 处有

$$p^* = \frac{i\rho_f \omega a v_0}{-ika + 1}, \quad \partial p^* / \partial n = i\rho_f \omega \quad (25)$$

对于声场外域问题,直接求解超强奇异积分(即采用 Guiggiani 方法)需要对积分核函数进行泰勒展开的高阶近似,过程繁琐,因此采用特解法求解声场外域问题,可避免直接求解超强奇异积分,更易于数值实施。

4 数值算例

4.1 内域问题

考虑一个内径 $R_1 = 1$ m,外径为 $R_2 = 2$ m,高 $H = 1$ m 的空心圆柱,圆柱的厚度从 1 m 降到 10^{-4} m,如图 4 所示,圆柱上下表面给定声压边界条件 $p = \sin kz$,内径和外径给定声压导数边界条件 $dp/dn = 0$,频率 $f = 40$ Hz,声速 $c = 344$ m/s。边界总共采用 40 个节点(每边 10 个节点),分别采用直接法(直接计算柯西主值积分)和本文的特解法(采用特解法间接求出柯西主值积分和自由项系数)求解,表 1 给出了各方法计算角节点 1 和边节

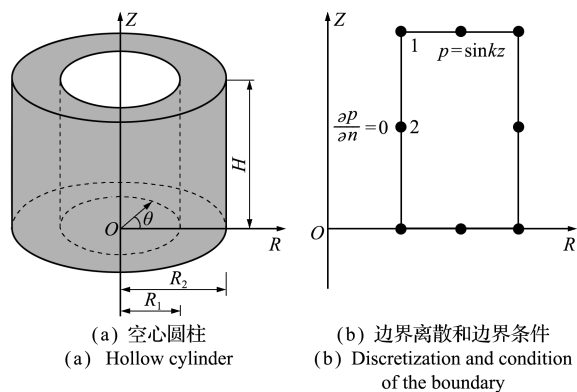


图 4 空心圆柱、边界离散和边界条件

Fig. 4 Hollow cylinder, discretization and condition of the boundary

点2处强奇异积分的柯西主值积分,表2给出了两种方法求解声压的相对误差。

4.2 外域问题

考虑声压幅值 $p_0 = 1$ 的平面波入射到一个单位半径的刚球所产生的声场,如图5所示,频率 $f = 40\text{ Hz}$,声速 $c = 344\text{ m/s}$,边界条件 $dp/dn = 0$,边界上采用了20个节点,计算了球面($r = 1$)和

远场($r = 5$)的总声压。图6给出了球面声压的分布云图。图7比较了采用特解法和直接法求出的球面声压的相对误差分布,表3给出了相应的平均相对误差。图8比较了采用特解法和直接法计算得到的远场($r = 5$)声压的相对误差分布,表4给出了相应的平均相对误差。

从图7和表3可以看出,对于近场,采用特解法的精度与直接求解精度在同一量级,精度相当。从图8和表4可以看出,对于远场情况,采用特解法的精度与直接法非常相近,说明本文提出的特解法是一种有效的求解超强奇异积分的方法,且特解法具有实施简便的优点。

表1 直接法和特解法计算的柯西主值积分对比
Tab. 1 Comparison of the relative error of CPV between direct method and particular method

	直接法	特解法
节点1的柯西主值积分	0.02221	0.02228
节点2的柯西主值积分	0.04452	0.04457

表2 直接法和特解法求解声压的相对误差对比
Tab. 2 Comparison of the relative error of acoustic pressure between direct method and particular method

	直接法	特解法
相对误差	1.11×10^{-4}	1.13×10^{-5}

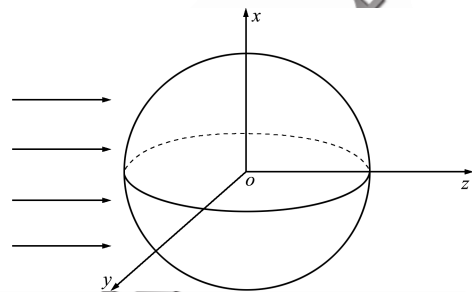


图5 平面波入射到刚球示意图
Fig. 5 Incident plane wave on the rigid sphere

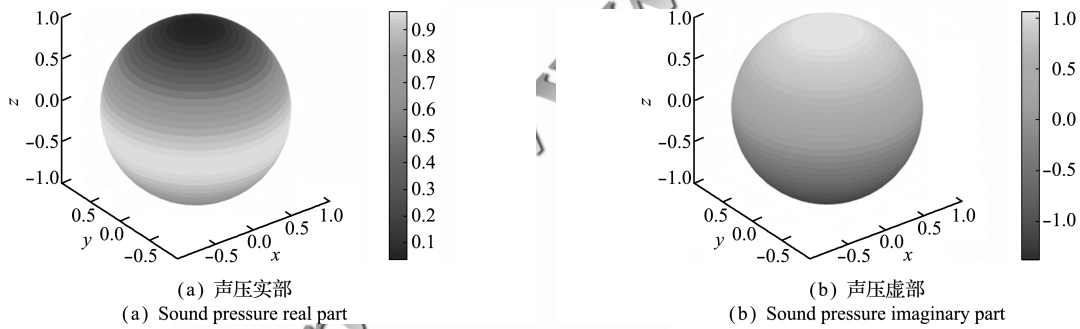


图6 球面声压分布云图
Fig. 6 Distribution of acoustic pressure on the boundary of the sphere

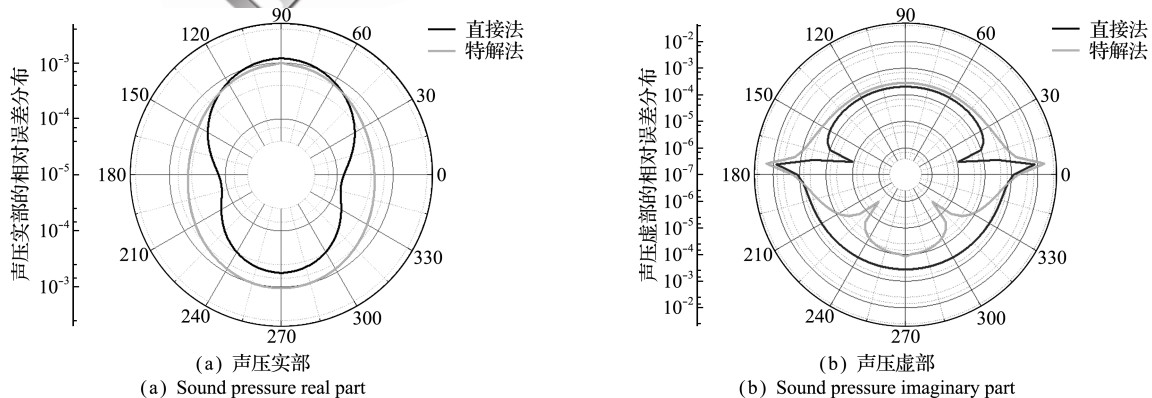


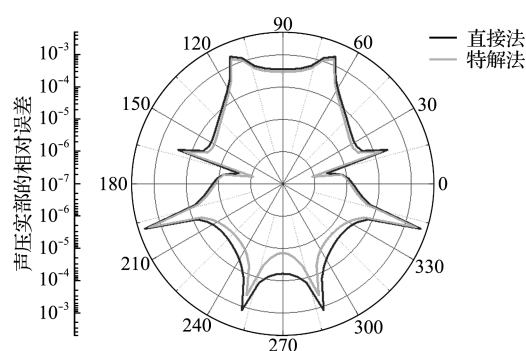
图7 球面声压相对误差分布
Fig. 7 Distribution of the relative error of acoustic pressure on the boundary of the sphere

表 3 $r=1$ 球面声压的平均相对误差
Tab. 3 Average relative error of spherical
acoustic pressure at $r=1$

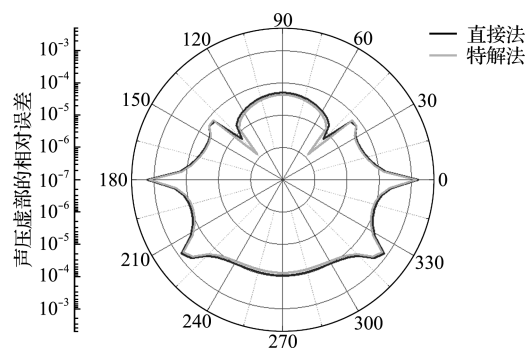
	声压实部的平均相对误差	声压虚部的平均相对误差
直接法	4.6×10^{-4}	5.2×10^{-4}
特解法	7.0×10^{-4}	7.7×10^{-4}

表 4 $r=5$ 远场声压的相对误差分布
Tab. 4 $r=5$ Relative error distribution of
far field sound pressure

	声压实部的平均相对误差	声压虚部的平均相对误差
直接法	2.9×10^{-4}	1.5×10^{-4}
特解法	2.0×10^{-4}	1.3×10^{-4}



(a) 声压实部
(a) Sound pressure real part



(b) 声压虚部
(b) Sound pressure imaginary part

图 8 远场声压相对误差分布($r=5$)

Fig. 8 Distribution of the relative error of acoustic pressure at far field ($r=5$)

5 结 论

针对 Helmholtz 问题,提出了间接求解奇异积分的方法,对内域问题和外域问题分别给出了满足控制方程的特解,可以得出以下结论。

(1) 本文提出的特解法可以有效求解声场内域问题的强奇异积分和自由项系数。对于内域问题,基于传统 Helmholtz 边界积分方程求解,弱奇异积分可以直接求出。对于强奇异积分,提出了满足控制方程的特解,通过特解间接求解强奇异部分和自由项系数,避免了采用泰勒级数展开直接计算柯西主值积分,也避免了针对具体几何信息计算自

由项系数,适用性更广。数值结果表明,采用特解法的精度优于直接法。对于内域问题,本文的特解法适用于所有几何边界和单元类型。

(2) 本文提出的特解法可以有效求解声场外域问题的超强奇异积分。对于外域问题,基于 Burton-Miller 边界积分方程求解,强奇异积分采用泰勒一阶展开直接求解其柯西主值积分;而对于超强奇异积分,采用 Guiggiani 方法需进行泰勒高阶近似,过程繁琐。本文找到了满足控制方程和无穷远处 Sommerfeld 散射条件的特解,通过特解间接求解超强奇异积分。数值结果表明,采用特解法求解外域问题的精度与直接法相当,且特解法具有数值实施简单的优点。不足之处是对于外域问题的特解,目前只适用于球边界。

参考文献(References):

- [1] Burton A J, Miller G F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1971, **323** (1553): 201-210.
- [2] Cruse T A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **22**(2): 341-355.
- [3] Cruse T A, Rizzo F J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, **22**(1): 244-259.
- [4] Cruse T A, Snow D W, Wilson R B. Numerical solutions in axisymmetric elasticity [J]. *Computers & Structures*, 1977, **7**(3): 445-451.
- [5] Sarihan V, Mukherjee S. Axisymmetric viscoplastic deformation by the boundary element method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1982, **18**(12): 1113-1128.
- [6] Guiggiani M, Casalini P. Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, **24**(9): 1711-1720.
- [7] Guiggiani M, Gigante A. A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**(4): 906-915.
- [8] Gao X W. Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals—Theory and Fortran code[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, **188**(1): 44-64.
- [9] Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi T J, et al. A

- general algorithm for the numerical-solution of hyper-singular boundary integral-equations[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, **59**(3): 604-614.
- [10] Hwang W S. Hypersingular boundary integral equations for exterior acoustic problems[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1997, **101**(6): 3336-3342.
- [11] Li S D, Huang Q B. An improved form of the hypersingular boundary integral equation for exterior acoustic problems[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2010, **34**(3): 189-195.
- [12] Polimeridis A G, Järvenpää S, Ylä-Oijala P, et al. On the evaluation of hyper-singular double normal derivative kernels in surface integral equation methods[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, **37**(2): 205-210.
- [13] 王现辉, 郑兴帅, 乔 慧, 等. 二维 Helmholtz 边界超奇异积分方程解析研究[J]. 计算物理, 2017, **34**(6): 666-672. (WANG Xian-hui, ZHENG Xing-shuai, QIAO Hui, et al. Analytical study of hypersingular integral equations with constant element for 2D Helmholtz problems[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2017, **34**(6): 666-672. (in Chinese))
- [14] Tadeu A, António J. 3D acoustic wave simulation using BEM formulations: Closed form integration of singular and hypersingular integrals[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, **36**(9): 1389-1396.
- [15] Wu H J, Ye W J, Jiang W K. A collocation BEM for 3D acoustic problems based on a non-singular Burton-Miller formulation with linear continuous elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **332**: 191-216.
- [16] 赵志高, 黄其柏. Helmholtz 声学边界积分方程中奇异积分的计算[J]. 工程数学学报, 2004, **21**(5): 779-784. (ZHAO Zhi-gao, HUANG Qi-bai. Calculation of singular integral for Helmholtz boundary integral equation in acoustics[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2004, **21**(5): 779-784. (in Chinese))
- [17] Skudrzyk E. *The Foundations of Acoustics* [M]. Springer-Verlag, 1971.

Indirect computation of singular integrals in Helmholtz boundary integral equation

ZHOU Qi, CHEN Yong-qiang*

(Department of Mechanics and Engineering Science, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: A new particular solution method is proposed to indirectly calculate the strong singular integrals and free terms in conventional Helmholtz boundary integral equation (CBIE) and hyper-strong singular integrals in Burton-Miller boundary integral equation (BMBIE). For the acoustic problem of interior field, the particular solution satisfying Helmholtz governing equation is given, and the strong singular integral and free terms in CBIE are obtained indirectly. For an exterior field problem, however, calculation of its Cauchy principal value (CPV) for hyper-strong singular integral needs higher-order approximation of the kernel function through Taylor series expansion, which makes numerical implementation quite complex. In this paper, the particular solution satisfying Helmholtz governing equation and Sommerfeld radiation condition is given, and the hyper-strong singular integrals are obtained using a proposed new particular solution method. Also, the CPV of the strongly singular integral for an axisymmetric structure is derived. The high efficiency of the method is demonstrated with axisymmetric examples. The numerical results show that for the interior domain problem, the accuracy obtained by the proposed particular solution method is superior to that of directly calculating the strongly singular integral and the free term coefficient. Furthermore, the particular solution method can avoid calculating the free term with consideration of specific geometric information, and thus is of more general applicability. For an exterior domain problem, both methods provide almost the same accuracy, however, the proposed particular method can avoid expanding the kernel function to higher order and is easier to implement numerically.

Key words: Burton-Miller formulation; hyper singular integral; Cauchy principal value integral; the characteristic function method

引用本文/Cite this paper:

周 琪, 陈永强. Helmholtz 边界积分方程中奇异积分间接求解方法[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(5): 576-582.

ZHOU Qi, CHEN Yong-qiang. Indirect computation of singular integrals in Helmholtz boundary integral equation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(5): 576-582.