

DOI: 10.7511/jslx20180104001

基于近场动力学理论的单层板损伤分析方法

郭 帅, 焦学健*, 李丽君, 冷杨松, 孙丰山, 单海瑞

(山东理工大学 交通与车辆工程学院, 淄博 255049)

摘要:基于键基近场动力学理论(PD)构建复合材料的单层板模型,在本构方程中引入连续变化的键刚度,以表示复合材料中与纤维夹角相关的力学性能的变化。推导了与复合材料主方向热膨胀系数相关的任意方向的热膨胀系数,为热载荷的施加提供理论支持,将热载荷和力学载荷统一于本构方程中。最后,对预先存在裂纹的单层板进行裂纹扩展模式的仿真,得到预期的仿真结果,并与已有实验结果对比验证模型的有效性。

关键词:近场动力学理论;复合材料;载荷;裂纹扩展模式;本构方程

中图分类号: TP273; O313

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2019)03-0352-06

1 引言

复合材料具有比强度高、比刚度高和可设计性强等特点,已广泛应用于航空航天、汽车工业以及化工、纺织和机械制造等领域。但复合材料存在纤维断裂、基体裂纹和层离等多种失效模式,其失效机理一直是研究焦点。

传统连续介质理论是基于连续性假设构建的,故在求解模型损伤演化和断裂破坏等不连续问题时面临巨大的困难。尽管研究者开发了多种力学模型和数值方法,但在处理微缺陷的演化,以及宏观裂纹的扩展方面仍然存在模型科学性、数值精度和计算效率等方面的不足。此外,对同一模型的连续和非连续问题使用不同的处理方法,导致不能提供一个统一的物性框架,也是这些方法和模型的缺陷。

Silling^[1]提出的PD理论,不再基于连续性假设建模,而是将固体离散为空间域内一系列包含所有物性信息的材料点,基于非局部作用的思想,利用积分算子替代微分算子重新定义连续力学方程,避免了传统理论的非连续奇异性问题,使PD理论可以描述从连续到不连续,从微观到宏观的一系列力学行为^[2]。所以利用PD方法研究复合材料的失效模式成为一种合适的选择。

本文构建了新的本构方程,给出了随角度连续变化的键刚度。推导了热载荷条件下,模型中键伸

长率的变化,将键的热膨胀系数与材料主方向的热膨胀系数相关联,并将力学载荷和热载荷统一于模型的本构方程中。最后,利用预先存在裂纹的单层板对模型预测失效扩展的能力进行了验证。

2 近场动力学理论 PD 的理论框架

如图1所示,PD理论是基于一个材料点与一定范围内其他材料点相互作用的物理现象而建立的^[1],是一种非局部作用理论。变形结构和未变形结构中材料点分别标记为 x 和 y 。材料点 x 的相互作用域由其近场范围尺寸 δ 确定。位于相互作用域内,与材料点 x 发生相互作用的点 x' 称为点 x 的临近作用点(the family members)。

根据牛顿第二定律,任意时刻 t , 任意材料点上的加速项、内部作用力和外部作用力三者必然达到平衡,表达式为^[3]

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(x, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', x, x', t) dV_{x'} + \mathbf{b}(x, t) \quad (1)$$

式中 ρ 是材料的密度, \mathbf{u} 和 \mathbf{u}' 分别表示材料点 x 和 x' 的位移, $V_{x'}$ 是材料点 x' 处的体积, \mathbf{b} 是外力的作用力密度向量, H_x 是点 x 的相互作用域。

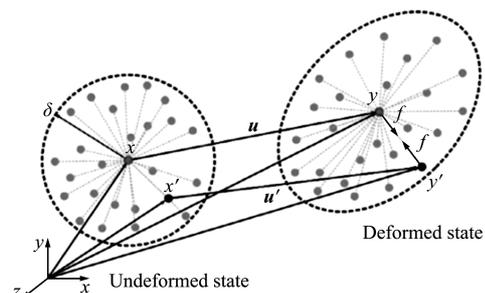


图1 材料点 x 与其临近作用点 x' 间的非局部相互作用
Fig. 1 Nonlocal interactions between x and its family member x'

收稿日期:2018-01-04;修改稿收到日期:2018-03-04.

基金项目:国家自然科学基金(51505261);山东省自然科学基金(ZR2015AM013)资助项目.

作者简介:焦学健*(1977-),男,硕士,副教授
(E-mail:jeosword@126.com).

键基 PD 理论中,弹性材料的本构力函数为

$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}\|} = cs \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}\|} \quad (2)$$

式中 $\|\cdot\|$ 为 2 范数, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$ 和 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ 分别表示材料点 x 和 x' 的相对位移向量和相对位置向量, c 为近场动力学参数, s 为键的伸长率。

3 复合材料单层板模型

3.1 机械载荷作用下的复合材料单层板 PD 模型

复合材料的力学性能与纤维方向具有较强的相关性,构建纤维增强复合材料单层板的 PD 模型时,必须在本构力函数中加入与纤维方向 α 相关的项^[4],单层板模型如图 2 所示,为了将键方向上的近场动力学参数与材料主方向相关联,假定近场动力学参数 c 为三角函数的形式,为

$$c = g_1 \cos^4(\theta - \alpha) + g_2 \cos^2(\theta - \alpha) + g_3 \quad (3)$$

式中 g_1, g_2 和 g_3 是待定的常数, θ 是相对于 x 轴方向的角度, α 是纤维与 x 轴之间的夹角。

假设沿 x 轴方向的应变为 ζ , 则

$$\epsilon_{xx} = \zeta, \epsilon_{yy} = -\nu_{xy}\zeta, \gamma_{xy} = -\mu_{xy}\zeta \quad (4, 5, 6)$$

式中 ν_{xy} 是泊松比, μ_{xy} 是将 x 方向的法向应力与 xy 平面内剪切应变相关联的参数。根据转轴公式,机械载荷作用下,结合方程式(4~6)得复合材料内主方向上的应变 ϵ_{11} 为

$$s = \epsilon_{11} = \epsilon_{xx} \cos^2 \theta + \epsilon_{yy} \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta = \zeta(\cos^2 \theta - \nu_{xy} \sin^2 \theta - \mu_{xy} \sin \theta \cos \theta) \quad (7)$$

综上所述,可得单层板的本构力函数为

$$f = cs \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} = [g_1 \cos^4(\theta - \alpha) + g_2 \cos^2(\theta - \alpha) + g_3] \cdot \zeta(\cos^2 \theta - \nu_{xy} \sin^2 \theta - \mu_{xy} \sin \theta \cos \theta) \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} \quad (8)$$

键上的应变能,即材料点间的微势能为

$$w = \frac{f s \xi}{2} = \frac{cs^2}{2} \xi \quad (9)$$

点 x 处的应变能密度为

$$W = \frac{1}{2} \int w dA = \frac{1}{2} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{cs^2 \xi}{2} \xi d\theta d\xi \quad (10)$$

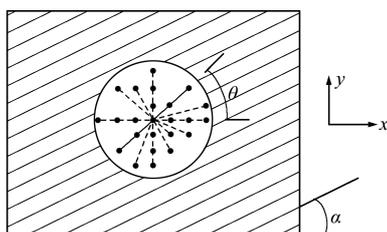


图 2 纤维方向为 α 的复合材料板(板内键的方向为 θ)
Fig. 2 A composite plate with fiber in α direction and a bond in θ

将方程式(8,9)代入方程式(10),得到基于 PD 理论的应变能密度为

$$W_{PD} = \frac{\delta^3 \pi \zeta^2}{768} \{ 8g_1 \cos^4 \alpha [(1 + \nu_{xy})^2 - \mu_{xy}^2] - 16 \sin \alpha \cos^3 \alpha [g_1 (1 + \nu_{xy}) \mu_{xy}] + \cos^2 \alpha [24g_1 + 32g_2 - 40g_1 \nu_{xy}^2 - 32g_2 \nu_{xy}^2 - 16g_1 \nu_{xy} + 8g_1 \mu_{xy}^2] + 8 \sin \alpha \cos \alpha [-3g_1 - 4g_2 + 5g_1 \nu_{xy} + 4g_2 \nu_{xy}] \mu_{xy} + [3g_1 + 8g_2 + 48g_3 - (10g_1 + 16g_2 + 32g_3) \nu_{xy} + (35g_1 + 40g_2 + 48g_3) \nu_{xy}^2 + (5g_1 + 8g_2 + 16g_3) \mu_{xy}^2] \} \quad (11)$$

由复合材料理论并结合方程式(4~6),经整理得到基于传统连续介质理论的应变能密度为^[5]

$$U_{CCM} = \frac{1}{2} \zeta^2 \{ \cos^4 \alpha [(1 + 2\nu_{xy} + \nu_{xy}^2 - \mu_{xy}^2) \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})] - 2 \cos^3 \alpha \sin \alpha [(\mu_{xy} + \nu_{xy} \mu_{xy}) \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})] + \cos^2 \alpha [2(Q_{12} + 2Q_{66} - Q_{22}) + 2\nu_{xy}^2 (Q_{12} + 2Q_{66} - Q_{11}) + (\mu_{xy}^2 - 2\nu_{xy}) \cdot (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 4Q_{66})] + \cos \alpha \sin \alpha [2\nu_{xy} \mu_{xy} (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) + 2\mu_{xy} (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})] + (Q_{22} - 2\nu_{xy} Q_{12} + \nu_{xy}^2 Q_{11} + \mu_{xy}^2 Q_{66}) \} \quad (12)$$

式中

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (13, 14)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21} \nu_{12}}, Q_{66} = G_{12} \quad (15, 16)$$

同时,材料的弹性常数必须满足约束条件

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} > 0, \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (17, 18)$$

又知基于 PD 理论与基于经典连续理论得到的应变能密度相等,令方程式(11,12)的对应项相等并简化得

$$g_1 = \frac{48}{\delta^3 \pi} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (19)$$

$$g_2 = \frac{12}{\delta^3 \pi} (8Q_{12} - 5Q_{22} - 3Q_{11} + 16Q_{66}) \quad (20)$$

$$g_3 = \frac{1}{\delta^3 \pi} (3Q_{11} + 15Q_{22} - 10Q_{12} - 20Q_{66})$$

$$\text{或 } \frac{1}{\delta^3 \pi} (3Q_{11} + 15Q_{22} + 6Q_{12} - 36Q_{66}) \quad (21)$$

$$\text{或 } \frac{1}{\delta^3 \pi} (3Q_{11} + 15Q_{22} - 18Q_{12} - 12Q_{66})$$

该模型是在键基 PD 理论的基础上推导的,故泊松比是常值,只有 E_1, E_2 和 G_{12} 三个独立参数。显然 g_3 的三个表达式应相等,结合方程式(17,18)得

$$v_{12} = \frac{-E_1 E_2 + \sqrt{E_1^2 E_2^2 + 4E_1 E_2 G_{12}^2}}{2E_2 G_{12}} \quad (22)$$

3.2 温度载荷作用下的复合材料单层板模型

热载荷作用下,单层板中键的热膨胀系数 ϑ 同样依赖键与材料主方向的夹角。主方向上的热膨胀系数设为 $\vartheta_{11}, \vartheta_{22}$ 和 ϑ_{12} 分别表示材料主方向上的应变和剪切应变,相应的表达式如式(23~25)所示

$$\bar{s}_{11} = \bar{\epsilon}_{11} = \vartheta_{11} \Delta T \quad (23)$$

$$\bar{s}_{22} = \bar{\epsilon}_{22} = \vartheta_{22} \Delta T \quad (24)$$

$$\bar{s}_{12} = \bar{\epsilon}_{12} = \vartheta_{12} \Delta T \quad (25)$$

借助转轴公式得任意键方向上的热膨胀系数为

$$\vartheta(\theta - \alpha) = \vartheta_{11} \cos^2(\theta - \alpha) + \vartheta_{22} \sin^2(\theta - \alpha) + \vartheta_{12} \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \quad (26)$$

键方向的热应变为

$$\bar{s} = \Delta T \vartheta(\theta - \alpha) \quad (27)$$

综上,考虑机械载荷和热载荷的单层板模型的本构力函数为

$$f = c(s + \bar{s}) \frac{\xi + \eta}{\|\xi + \eta\|} \quad (28)$$

4 失效标准

仿真裂纹等损伤可以在点对之间的长程作用力 f 中添加判定失效的项 $\mu(x', x, t)$, 来引入键的断裂,解除点对之间的相互作用力,进而形成三维裂纹。当两点间的相对位置满足一定条件时,两点间的相互作用力就会永久消失,即表示键的破坏^[6,7],判定项如式(29)所示。

$$\mu(x', x, t) \begin{cases} 1 & (\text{其他}) \\ 0 & (s + \bar{s} > s_0) \end{cases} \quad (29)$$

式中 s_0 是键发生失效的临界伸长值。根据 Silling 等^[3] 的研究,单层板模型基体材料的临界值为式(30),纤维方向的临界伸长值取为 $4s_0$ 。

$$s_0 = \sqrt{\frac{5G_0}{9\kappa\delta}} \quad (30)$$

式中 G_0 表示材料断裂时的能量释放率, κ 表示材料的体积模量。模型内材料点处的损伤可用材料点近场范围内断裂键的数量与 PD 键的总数的比值来表示^[8]。

$$\varphi(x, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\xi, t) dH}{\int_H dH} \quad (31)$$

5 数值模拟

利用 Intel visual fortran 2013 在 visual studio 2012 的平台上对算法进行编译,利用 tecplot 对算法运行所得到的数据进行后处理。

如图 3 所示,单层板的长度为 $L=15.24 \text{ mm}$, 宽度为 $W=7.62 \text{ mm}$, 厚度为 $T=0.5 \text{ mm}$, 裂纹长度为 $2a=0.0018 \text{ m}$ 。研究对象选用碳纤维环氧树脂材料,密度为 1580 kg/m^3 , 纤维方向和横向方向的弹性模量分别是 $E_1=134 \text{ GPa}$ 和 $E_2=8.5 \text{ GPa}$, 剪切模量 $G_{12}=5.8 \text{ GPa}$ ^[6], 根据式(22)得 $v_{12}=0.66$ 。通过使用 $\Delta=0.0005 \text{ m}$ 网格尺寸的单层材料点生成 PD 模型。近场范围半径指定为 $\delta=3.015\Delta$ ^[9,10]。时间步长设为 $0.05 \mu\text{s}$, 总时间步设置为 1250 步,满足稳定性条件^[11]。

构建单层板模型主要是为了对复合材料的失效模式进行仿真,为此,选取存在中心裂纹且纤维方向为 $\theta=0^\circ, 90^\circ$ 和 45° 的三种单层板进行仿真。在单层板边界附近的材料点上施加 $v_0=2 \times 10^{-7} \text{ m/s}$ 的速度载荷,作为轴向拉伸载荷。根据方程(30),基体键的临界伸长率取为 $s_{mt}=0.0135$, 则纤维键的临界伸长率为 $s_{ft}=0.054$ 。

仿真结果如图 4~图 6 所示。图 4~图 6 给出了 $\theta=0^\circ, 90^\circ$ 和 45° 单层板在 750 步、1000 步和 1250 步时模型的损伤,模型损伤基于式(31)确定。

如图 4 所示,对于纤维取向为 45° 的单层板,损伤首先在垂直纤维方向的基体中扩展,随着时间的推移,施加的载荷越来越大,达到纤维的临界伸长率,纤维出现损伤,但随着载荷的进一步施加,裂纹扩展方向发生转变,开始沿横向迅速扩展,最终单层板完全断裂。依据式(3)知纤维方向的键刚度最大,与纤维垂直方向的键刚度最小,垂直于纤维方向的点对抵抗拉伸变形的能力更弱^[12],更易出现损伤,这也与图 4 的损伤结果相符。

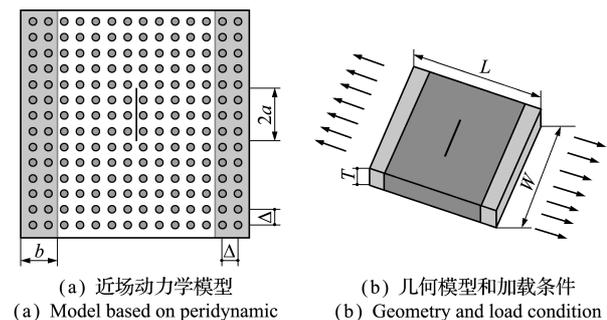


图 3 单层板的近场动力学模型以及几何模型和加载条件
Fig. 3 Model based on peridynamic, and the geometry and load condition of the lamina

纤维方向为 0° ,对预先存在裂纹的单层板施加拉伸载荷,其裂纹的扩展模式与断裂力学中的张开型(I型)裂纹相似。如图5所示,载荷刚施加时,损伤与裂纹同向传播,出现类似层离的现象。又因为垂直于纤维方向的键刚度较小,造成损伤向

裂纹两侧分叉。但随着时间步的推进,载荷过大时,裂纹的整体趋势仍然是横向扩展,最终单层板断裂。

如图6所示,纤维方向为 90° 的单层板,损伤初始时沿着裂纹进行扩展,但扩展受到 y 轴纤维的约

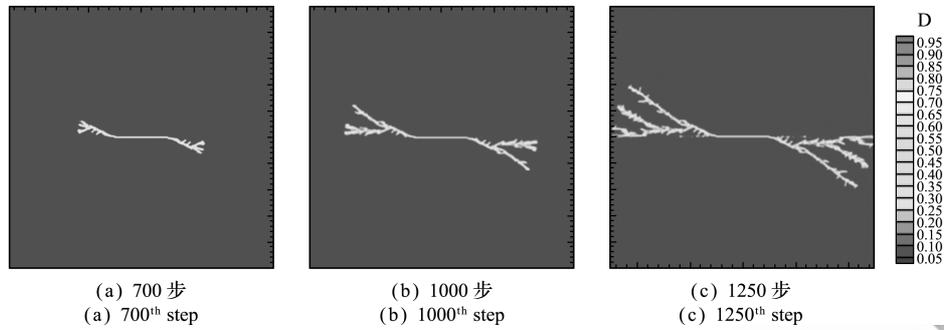


图4 纤维方向为 45° 的单层板在700步、1000步和1250步的损伤
Fig. 4 Damage of lamina that fiber orientation is 45° at 700th step,1000th step and 1250th step

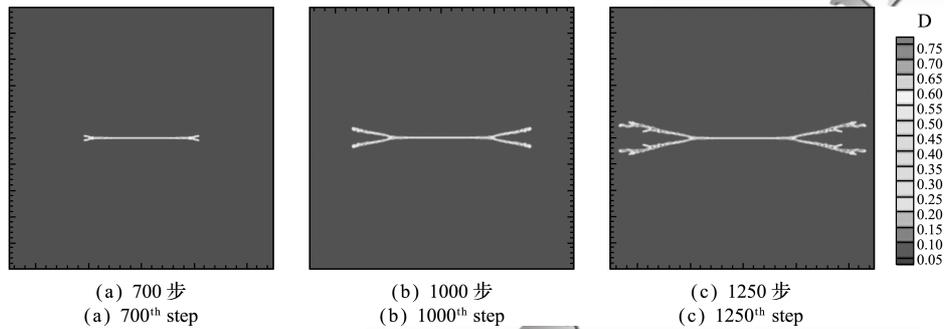


图5 纤维方向为 0° 的单层板在700步、1000步和1250步的损伤
Fig. 5 Damage of lamina that fiber orientation is 0° at 700th step,1000th step and 1250th step

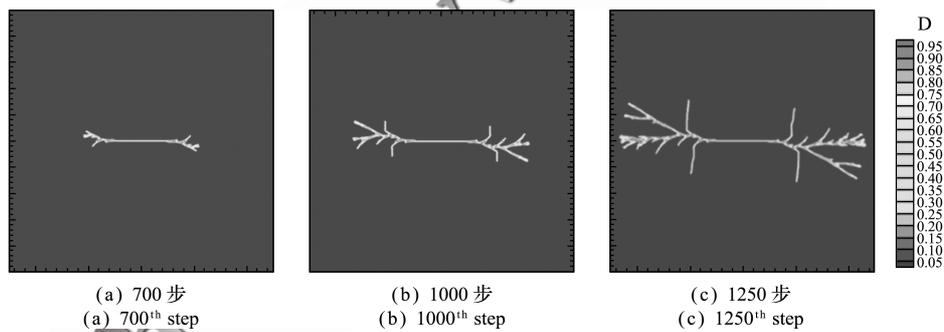


图6 纤维方向为 90° 的单层板在700步、1000步和1250步的损伤
Fig. 6 Damage of lamina that fiber orientation is 90° at 700th step,1000th step and 1250th step

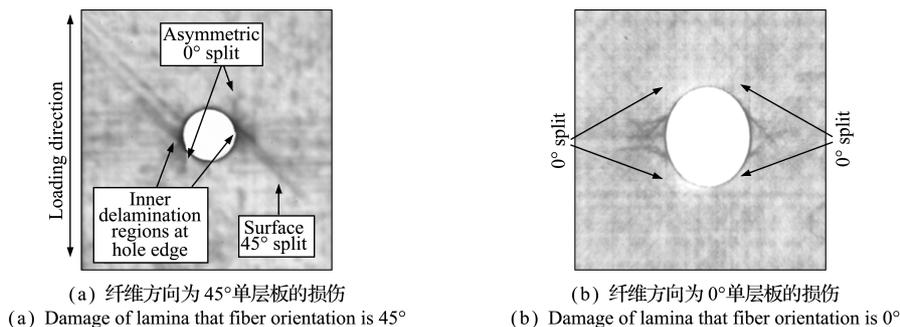


图7 纤维方向为 45° 和 0° 单层板的损伤图
Fig. 7 Damage of lamina that fiber orientation is $45^\circ, 0^\circ$

束。随着载荷的进一步增大,纤维方向的伸长率超出临界伸长率,致使纤维出现断裂,即图 6(c)出现与 y 轴同向的裂纹。随后,载荷进一步增大,加快裂纹在横向方向上的传播及合并,最终导致单层板断裂。

综上所述,裂纹的扩展与纤维方向具有很强的相关性,且裂纹的扩展模式能在理论层面上得到支持。进一步,将仿真结果与以往针对纤维增强复合材料进行的力学实验^[13]的结果(图 7)进行对比,发现具有众多的相似性,如初始裂纹出现后,对比纤维方向为 45° 和 0° 单层板的仿真结果和实验结果,发现裂纹扩展方向都是沿着 135° 和 0° 方向进行扩展,且最终都有使单层板完全断裂的趋势。故证明构建的模型能得到符合事实的复合材料的失效仿真。

6 结 论

(1) 本文基于键基 PD 理论提供了一种单层板模型,特点是本构方程中的近场动力学参数即键刚度是连续变化的,键刚度的值依赖于纤维和键方向间的夹角,当纤维和键之间的夹角减小时,键的刚度逐渐增大。这明显区别于以往提出的纤维和基体材料间力学性能的阶跃式变化,也更接近于纤维增强复合材料中的力学性能具有连续变化的事实。

(2) 理论上考虑了模型承受温度载荷的可能性,将模型任意方向的热膨胀率与材料主方向上的热膨胀率相关联,从而在模型的本构方程中加入了热载荷引起的伸长率,最终将力学载荷和热载荷统一于复合材料模型本构方程的表达式中。

参考文献(References):

- [1] Silling S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, **48**(1): 175-209.
- [2] 黄 丹,章 青,乔丕忠,等. 近场动力学方法及其应用[J]. *力学进展*, 2010, **40**(4): 448-459. (HUANG Dan, ZHANG Qing, QIAO Pi-zhong, et al. A review on peridynamic(PD) method and its applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(4): 448-459. (in Chinese))
- [3] Silling S A, Askari E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. *Computers & Structures*, 2005, **83**(17-18): 526-535.
- [4] Tao J. Development and Applications of New Peridynamic models[D]. Michigan State University, 2012.
- [5] 沈观林,胡更开,刘 彬. 复合材料力学(第 2 版)[M]. 北京:清华大学出版社,2013. (SHEN Guan-lin, HU Geng-kai, LIU Bin. *Mechanics of Composite Materials*(Second Edition)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese))
- [6] 胡祎乐,余 音,汪 海. 基于近场动力学理论的层压板损伤分析方法[J]. *力学学报*, 2013, **45**(4): 624-628. (HU Yi-le, YU Yin, WANG Hai. Damage analysis method for laminates based on peridynamic theory [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(4): 624-628. (in Chinese))
- [7] 黄 丹,卢广达,章 青. 准静态变形破坏的近场动力学分析[J]. *计算力学学报*, 2016, **33**(5): 657-662. (HUANG Dan, LU Guang-da, ZHANG Qing. A peridynamic study on quasi-static deformation and failure [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(5): 657-662. (in Chinese))
- [8] Xu J F, Askari A, Weckner O, et al. Peridynamic analysis of impact damage in composite laminates [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2008, **21**(3): 187-194.
- [9] Oterkus E. Peridynamic Theory for Modeling Three-dimensional Damage Growth in Metallic and Composite Structures[D]. The University of Arizona, 2010.
- [10] 孙朝阳,黄再兴. 层合板冲击损伤的 PD 率效应本构模型分析[J]. *计算力学学报*, 2016, **33**(6): 840-845. (SUN Chao-yang, HUANG Zai-xing. Peridynamic rate-dependent constitutive model for impact damage of composite laminate [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(6): 840-845. (in Chinese))
- [11] Littlewood D J. Roadmap for Peridynamic Software Implementation[R]. SAND2015-9013. USA: Sandia National Laboratories, 2015.
- [12] Oterkus E, Madenci E. Peridynamic analysis of fiber-reinforced composite materials [J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2012, **7**(1): 45-84.
- [13] Hallett S R, Green B G, Jiang W G, et al. An experimental and numerical investigation into the damage mechanisms in notched composites [J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2009, **40**(5): 613-624.

Damage analysis method of lamina based on peridynamic theory

GUO Shuai, JIAO Xue-jian*, LI Li-jun,

LENG Yang-song, SUN Feng-shan, SHAN Hai-rui

(School of Transportation and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

Abstract: Based on the theory of bond-based peridynamics (PD), the lamina model of a composite material was constructed, and a continuously changing bond stiffness is introduced into the constitutive equation of the model to represent the change of its mechanical properties. The thermal expansion coefficient related to the main direction of the composite material was derived, which provides a theoretical support for the inclusion of a thermal load. The thermal and mechanical loads are unified in the constitutive equation. Finally, through the simulation of a crack growth mode of the lamina with a pre-existing crack, numerical results are obtained, and compared with the existing experimental results to verify the validity of the model.

Key words: peridynamic; composite; load; propagation mode of crack; the constitutive equation

<http://www.cjcm.net>

引用本文/Cite this paper:

郭 帅,焦学健,李丽君,等.基于近场动力学理论的单层板损伤分析方法[J].计算力学学报,2019,36(3):352-357.

GUO Shuai, JIAO Xue-jian, LI Li-jun, et al. Damage analysis method of lamina based on peridynamic theory [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(3): 352-357.