

位移浅水内孤立波

吴 锋¹, 姚 征², 孙 雁³, 钟万勰^{*1}

(1. 大连理工大学 工程力学系, 大连 116024; 2. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 大连 116026;
3. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘 要: 研究两层浅水系统中的内孤立波, 该系统由两层常密度不可压缩无黏性水组成。利用 Lagrange 坐标和 Hamilton 原理, 推导了两层浅水系统的位移浅水内波方程, 并进一步导出了两层浅水系统的位移内孤立波解。数值实验表明, 位移内孤立波与经典的 KdV 内孤立波吻合很好, 说明 Lagrange 坐标和 Hamilton 方法适用于内波分析, 可以为构造内波分析的保辛方法提供一种途径。

关键词: 内孤立波; Lagrange 坐标; Hamilton 原理

中图分类号: O302; O352

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2019)03-0297-07

1 引 言

自二十世纪六七十年代起, 人们已经在海洋、湖泊和大气等不同分层流体中观察到了内孤立波^[1-3]。内孤立波通常发生在流体内温度或密度跃层, 其波幅一般要远大于表面孤立波的波幅^[4]。我国南海地区是内孤立波活跃区, 曾观测到世界上波幅最大的内孤立波, 波幅达 170 m^[5], 远大于有记录的海啸巨浪高度。大波幅意味着大的波载, 是工程结构安全分析不可忽视的因素。在海洋工程、船舶工程、水利工程和军事工程等诸多工程领域, 内孤立波已经是非常重要的研究课题。

在各种不同内孤立波的研究中, 两层浅水内孤立波是重要的一类研究对象, 与近海工程的设计及安全密切相关。研究浅水内孤立波常采用 KdV 方程, 该方程最早用于研究浅水表面孤立波, 采用的是 Euler 坐标。然而在 Euler 坐标下研究浅水波, 不方便找到对应的变分原理。在变分原理基础上推导有限元法是基本步骤, 据此建立的离散方程保辛。文献[6-11]在 Lagrange 坐标下研究了单层浅水系统, 以质点位移为基本未知量, 建立了相应的变分原理, 实际上是改换了水波动力学的求解体

系。文献[12]在 Lagrange 坐标下研究浅水波, 给出了基于位移的浅水波方程, 并将该方程用于研究三峡升船机水箱中水的晃动问题。文献[13, 14]基于 Lagrange 坐标, 以位移和压强为基本变量, 提出一种微分-代数方程形式的浅水波方程, 并利用保辛的祖冲之类算法^[15, 16]求解该浅水波方程。文献[17]将 Lagrange 坐标扩展于二维浅水系统, 提出了相应的变分原理和保辛算法。文献[18-21]系统地研究了二维浅水系统位移法方程, 得到了相应的孤立波解。

本文基于 Lagrange 坐标和 Hamilton 方法, 研究一维两层浅水系统, 给出了位移浅水内波方程, 并进一步得到两层浅水系统的内孤立波解。

2 位移浅水内波方程

2.1 基本模型

考虑如图 1 所示两层水系统, 其中 $z = 0$ 为水面, $z = -h$ 为水底, $z = -h_1$ 为上下两层水的界面。 h_1 为上层水的静水深度, $h_2 = h - h_1$ 为下层

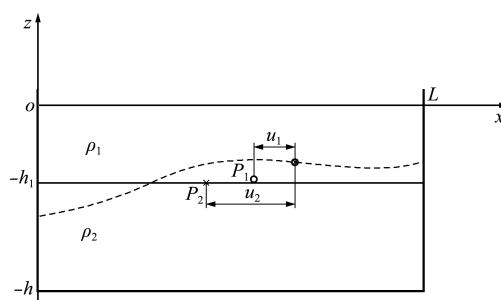


图 1 两层水系统

Fig. 1 A two-water system

收稿日期: 2018-03-10; 修改稿收到日期: 2018-05-23.

基金项目: 国家自然科学基金(11472076; 51609034); 中央高校基本科研业务费(DUT17RC(3)069)资助项目.

作者简介: 吴 锋(1985-), 男, 副教授;

姚 征(1978-), 男, 副教授;

孙 雁(1965-), 女, 副教授;

钟万勰*(1934-), 男, 教授, 院士

(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

水的静水深度, L 为水池长度。上下两层水均假设为不可压缩, 无黏性。假设上下两层水的密度不同但均为常量, 分别记为 ρ_1 和 ρ_2 , 且有 $\rho_2 > \rho_1$ 。采用位移为基本变量, 令 u_i 和 $w_i (i=1, 2)$ 分别表示第 i 层水质点在 x 和 z 方向的位移。

2.1.1 刚盖假定和边界条件

在水池左右两端, 要求水平位移为 0, 即

$$u_i(0, z, t) = u_i(L, z, t) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

在水池底部, 要求竖向位移为 0, 即

$$w_2(x, -h, t) = 0 \quad (2)$$

分析内波即分析两层水交界面处的界面波。当上下两层水的密度相差不大时, 内波的波幅往往远大于表面波的波幅, 故可以采用所谓的刚盖假定^[22]来分析内波, 即假定水表面波与两层水交界面处的界面波相比可忽略不计, 此时

$$w_1(x, 0, t) = 0 \quad (3)$$

在交界面上不要求位移连续, 但要求两层水之间没有分离。对于上层水, 设界面 $z = -h_1$ 上某质点 P_1 , 其初始时刻位置为 $(x, -h_1)$, 运动后在 t 时刻的位置为 $(x + u_1(x, -h_1, t), -h_1 + w_1(x, -h_1, t))$ 。因为要求两层水之间没有分离, 这意味着在下层水必然存在一个质点 P_2 , 其在 t 时刻的位置与 P_1 重叠。设质点 P_2 在初始时刻的位置为 $(x_a, -h_1)$, 则 P_2 在 t 时刻的位置可表示为 $(x_a + u_2(x_a, -h_1, t), -h_1 + w_2(x_a, -h_1, t))$, 据此可知,

$$\begin{aligned} x_a &= x + u_1(x, t) - u_2(x_a, t), \\ w_1(x, -h_1, t) &= w_2(x_a, -h_1, t) \end{aligned} \quad (4)$$

即为界面处的连接条件。

2.1.2 位移法浅水不可压缩条件

假定水平位移与竖向坐标无关, 即

$$\partial u_i(x, z, t) / \partial z = 0 \quad (i=1, 2) \quad (5)$$

根据连续介质理论可知, 水的不可压缩条件可表示为

$$(1 + w_{i,z})(1 + u_{i,x}) - u_{i,z}w_{i,x} = 1 \quad (i=1, 2) \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)有

$$(1 + w_{i,z})(1 + u_{i,x}) = 1 \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

即

$$w_{i,z} = \frac{-u_{i,x}}{1 + u_{i,x}}, \quad w_i(x, t) = \frac{-u_{i,x}}{1 + u_{i,x}}z + C_i(x) \quad (8)$$

式中 $C_i(x)$ 由水底、水面以及两层水之间的界面决定。对于下层水, 因为在水底要求

$$w_2(x, -h, t) = \frac{u_{2,x}}{1 + u_{2,x}}h + C_2(x) = 0 \quad (9)$$

即 $C_2(x) = -u_{2,x}h/(1 + u_{2,x})$, 于是下层水的竖向位移可表示为

$$w_2(x, z, t) = \frac{-u_{2,x}}{1 + u_{2,x}}(z + h) \quad (10)$$

即为考虑边界条件后第 2 层水的位移法不可压缩条件。

再分析第一层水的位移法不可压缩条件, 根据式(8)可知,

$$w_1(x, -h_1, t) = \frac{u_{1,x}h_1}{1 + u_{1,x}} + C_1(x) \quad (11)$$

根据分层处界面条件, 将式(11)代入式(4), 再结合式(10), 有

$$\begin{aligned} w_1(x, z, t) &= -\frac{u_{1,x}(z + h_1)}{1 + u_{1,x}} + \frac{-\tilde{u}_{2,x}}{1 + \tilde{u}_{2,x}}h_2 \\ \tilde{u}_{2,x} &= \partial u_2(x, -h_1, t) / \partial x|_{x=x_a} \end{aligned} \quad (12)$$

根据刚盖假定的要求, 将式(12)代入式(3)可得,

$$w_1(x, 0, z) = -\frac{u_{1,x}h_1}{1 + u_{1,x}} + \frac{-\tilde{u}_{2,x}}{1 + \tilde{u}_{2,x}}h_2 = 0 \quad (13)$$

根据式(13)可以解得

$$u_{1,x} = -h_2\tilde{u}_{2,x}/(h_1 + \tilde{u}_{2,x}h) \quad (14)$$

再将式(14)代入式(12)可得

$$w_1(x, z, t) = \tilde{u}_{2,x}h_1^{-1}h_2/(1 + \tilde{u}_{2,x})z \quad (15)$$

即为考虑边界条件后第 1 层水的位移法不可压缩条件。根据边界条件和不可压缩条件, 还可以将 u_1 用 u_2 表达。由式(14)知

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_0^x \frac{-\tilde{u}_{2,x}h_2}{h_1 + \tilde{u}_{2,x}h} dx = \int_0^{x_a} -\tilde{u}_{2,x}h_1^{-1}h_2 dx_a = \\ &= -u_2(x_a, t)h_1^{-1}h_2 = -\tilde{u}_2h_1^{-1}h_2 \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16)代入式(4)可得

$$x_a = x - h_1^{-1}h u_2(x_a, t) \quad (17)$$

以上即是本文所考虑的两层水系统的基本模型, 其中式(16)和式(15)分别表示上层水的水平和竖向位移, 可以看出, 上层水的水平和竖向位移均可以用下层水的水平位移表示。式(10)表示下层水的竖向位移, 也是用下层水的水平位移表示。因此, 本文所分析的两层水系统实际只需要 u_2 这一个基本变量。

2.2 作用量和水波方程

利用 Hamilton 方法分析图 1 所示两层水系统, 首先分析其总势能

$$U = U_1 + U_2 \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_0^L \int_{-h_1}^0 \rho_1 g w_1 dx dz \\ U_2 &= \int_0^L \int_{-h}^{-h_1} \rho_2 g w_2 dx dz \end{aligned} \quad (19)$$

分别表示上下两层水的势能。将式(15)和式(10)分别代入 U_1 和 U_2 可得

$$U_1 = \int_0^L \rho_2 g \frac{h_2^2}{2} \frac{-u_{2,x}}{1+u_{2,x}} dx$$

$$U_2 = \int_0^L \rho_1 g \frac{h_1 h_2}{2} \frac{-\tilde{u}_{2,x}}{1+\tilde{u}_{2,x}} dx \quad (20)$$

对式(17)两边求全微分可得

$$dx_a = dx - h_1^{-1} h \tilde{u}_2 dx_a$$

或 $dx = dx_a (1 + \tilde{u}_{2,x} h_1^{-1} h)$ (21)

利用式(2)和边界条件式(1), U_2 可改写为

$$U_2 = \int_0^L \rho_1 g \frac{h_1 h_2}{2} \frac{-\tilde{u}_{2,x}}{1+\tilde{u}_{2,x}} dx =$$

$$\int_0^L \rho_1 g \frac{h_1 h_2}{2} \frac{-\tilde{u}_{2,x}(1+\tilde{u}_{2,x} h_1^{-1} h)}{1+\tilde{u}_{2,x}} dx_a =$$

$$\int_0^L \rho_1 g \frac{h_1 h_2}{2} \frac{-u_{2,x}(1+u_{2,x} h_1^{-1} h)}{1+u_{2,x}} dx =$$

$$\int_0^L \rho_1 g \frac{h_2^2}{2} \frac{-u_{2,x}^2}{1+u_{2,x}} dx =$$

$$\int_0^L \rho_1 g \frac{h_2^2}{2} \frac{u_{2,x}}{1+u_{2,x}} dx \quad (22)$$

将式(19,22)代入式(18)可得总势能为

$$U = \int_0^L g' \rho_2 \frac{h_2^2}{2} \frac{-u_{2,x}}{1+u_{2,x}} dx \approx \int_0^L g' \rho_2 \frac{h_2^2}{2} (u_{2,x}^2 - u_{2,x}^3) dx \quad (23)$$

其中 $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2$ 为约化重力加速度。

再分析动能,图1所示两层水系统的总动能可表示为

$$T = T_1 + T_2 \quad (24)$$

其中 $T_1 = \int_0^L \int_{-h_1}^0 \frac{1}{2} \rho_1 (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) dz dx$ (25)

$$T_2 = \int_0^L \int_{-h}^{-h_1} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{u}_2^2 dz dx + \int_0^L \int_{-h}^{-h_1} \frac{1}{2} \rho_2 \dot{w}_2^2 dz dx \quad (26)$$

根据文献[6,11]可知,对于浅水长波来说,竖向动能远小于水平动能,因此计算竖向速度时可只保留主要的线性项,而忽略非线性项。将式(10)对时间求偏导,并保留线性项可得

$$\dot{w}_2(x, z, t) = -\dot{u}_{2,x}(z+h) \quad (27)$$

将式(27)代入式(26)可得

$$T_2 = \int_0^L \frac{1}{2} \rho_2 h_2 \dot{u}_2^2 dx + \int_0^L \frac{1}{6} \rho_2 h_2^3 \dot{u}_{2,x}^2 dx \quad (28)$$

将式(16)对时间求偏导,并结合式(17)可知

$$\dot{u}_1(x, t) = (-\tilde{u}_{2,x} \dot{x}_a - \tilde{u}_{2,t}) h_1^{-1} h_2 = \frac{-\tilde{u}_{2,t} h_2}{h_1 + h \tilde{u}_{2,x}} \quad (29)$$

将式(17)对时间求导

$$\dot{x}_a = \frac{-h_1^{-1} h \tilde{u}_{2,t}}{1 + h_1^{-1} h \tilde{u}_{2,x}} \quad (30)$$

将式(30)代入式(29)可得 $\dot{u}_1$ 为

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{-\tilde{u}_{2,t} h_2}{h_1 + h \tilde{u}_{2,x}} \quad (31)$$

将式(15)对时间求偏导,并保留线性项可得,

$$\dot{w}_1(x, z, t) = \left[\frac{\tilde{u}_{2,x}}{1 + \tilde{u}_{2,x}} \right]' h_1^{-1} h_2 z \approx u_{2,xt} h_1^{-1} h_2 z \quad (32)$$

将式(29,32)代入 T_1 可得

$$T_1 = \int_0^L \frac{1}{2} \rho_1 \frac{\dot{u}_2^2 h_2^2}{h_1 + h u_{2,x}} dx + \int_0^L \frac{\rho_1}{6} h_1 h_2^2 u_{2,xt}^2 dx \quad (33)$$

于是,总作用量可表示为

$$S = \int_0^t (T - U) ds = \int_0^t \int_0^L \left[\frac{h_2 \rho_2 + \rho_1 h_1 (h_1^{-1} h_2)^2}{2} \dot{u}_2^2 - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \rho_1 h_1^{-2} h_2^2 h \dot{u}_2^2 u_{2,x} + \left(\frac{\rho_2 h_2^3}{6} + \frac{h_1 h_2^2}{6} \rho_1 \right) \dot{u}_{2,x}^2 - \right.$$

$$\left. g' \rho_2 \frac{h_2^2}{2} (u_{2,x}^2 - u_{2,x}^3) \right] dx ds \quad (34)$$

对式(34)进行变分,并要求 $\delta S = 0$, 可得

$$[h_2 \rho_2 + \rho_1 h_1 (h_1^{-1} h_2)^2] \ddot{u}_2 - \rho_1 h_1^{-2} h_2^2 h (\dot{u}_2 u_{2,x})' -$$

$$\frac{1}{2} \rho_1 h_1^{-2} h_2^2 h (\dot{u}_2^2)_{,x} - \left(\frac{\rho_2 h_2^3}{3} + \frac{h_1 h_2^2}{3} \rho_1 \right) \ddot{u}_{2,xx} -$$

$$g' \rho_2 h_2^2 (u_{2,xx} - 3 u_{2,x} u_{2,xx}) = 0 \quad (35)$$

式(35)可以简化为

$$\ddot{u}_2 - \frac{\gamma h_1^{-2} h_2 h}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} (\ddot{u}_2 u_{2,x} + 2 \dot{u}_2 u_{2,xt}) -$$

$$\frac{h_2 (h_2 + \gamma h_1)}{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \ddot{u}_{2,xx} - \frac{g' h_2}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \times$$

$$(u_{2,xx} - 3 u_{2,x} u_{2,xx}) = 0 \quad (36)$$

式中 $\gamma = \rho_1/\rho_2$ 。式(36)即为两层水系统的位移浅水内波方程。如果上层水的密度设为0,即 $\gamma = 0$, 则式(36)退化为

$$\ddot{u}_2 - \frac{h_2^2}{3} \ddot{u}_{2,xx} - g h_2 (u_{2,xx} - 3 u_{2,x} u_{2,xx}) = 0 \quad (37)$$

式(37)即为单层的位移浅水方程,其中 $-h_2^2 \ddot{u}_{2,xx}/3$ 体现了垂直加速度的影响,可以解释自然界中观察到的波状涌潮现象^[9,23]。

3 内孤立波的位移法解

分析求解式(36)的内孤立波。可令

$$u_2 = v(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (38)$$

于是,式(36)可写为

$$c^2 \ddot{v} - \frac{\gamma h_1^{-2} h_2 h}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} (c^2 \ddot{v} \dot{v} + 2 c^2 \dot{v} \ddot{v}) -$$

$$\frac{h_2 (h_2 + \gamma h_1)}{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} c^2 \ddot{v} - \frac{g' h_2}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \times$$

$$(\ddot{v} - 3 \dot{v} \ddot{v}) = 0 \quad (39)$$

式(39)对 ξ 积分一次,并令积分常数为0,可得

$$c^2 \dot{v} - \frac{\gamma h_1^{-2} h_2 h}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} (c^2 + 2c^2) \frac{1}{2} \dot{v}^2 - \frac{h_2 (h_2 + \gamma h_1)}{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} c^2 \ddot{v} - \frac{g' h_2}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \times \left[\dot{v} - \frac{3}{2} \dot{v}^2 \right] = 0 \quad (40)$$

再令 $\dot{v} = f$ 可得

$$c^2 f - \frac{\gamma h_1^{-2} h_2 h}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} (c^2 + 2c^2) \frac{1}{2} f^2 - \frac{h_2 (h_2 + \gamma h_1)}{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} c^2 \ddot{f} - \frac{g' h_2}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \times \left[f - \frac{3}{2} f^2 \right] = 0 \quad (41)$$

将式(41)乘以 $\dot{f}$

$$c^2 f \dot{f} - \frac{\gamma h_1^{-2} h_2 h}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} (c^2 + 2c^2) \frac{1}{2} \dot{f} f^2 - \frac{h_2 (h_2 + \gamma h_1)}{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} c^2 \ddot{f} \dot{f} - \frac{g' h_2}{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2)} \times \left[f \dot{f} - \frac{3}{2} \dot{f} f^2 \right] = 0 \quad (42)$$

再将式(42)对 ξ 积分一次,并令积分常数为0,可得

$$\dot{f}^2 - \left[\frac{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2) c^2 - 3g' h_2}{h_2 (h_2 + \gamma h_1) c^2} \right] f^2 - \left[\frac{3g' h_2 - 3\gamma h_1^{-2} h_2 h c^2}{h_2 (h_2 + \gamma h_1) c^2} \right] f^3 = 0 \quad (43)$$

式(43)可改写为

$$\dot{f}^2 - 2V f^2 + 2A f^3 = 0 \quad (44)$$

$$\text{其中 } V = \frac{3(1 + \gamma h_1^{-1} h_2) c^2 - 3g' h_2}{2h_2 (h_2 + \gamma h_1) c^2} \\ A = -\frac{3g' h_2 - 3\gamma h_1^{-2} h_2 h c^2}{2h_2 (h_2 + \gamma h_1) c^2} \quad (45)$$

根据式(6)可知式(44)的解可表示为

$$f(\xi) = (V/A) \operatorname{sech}^2(\xi \sqrt{V/2}) \quad (46)$$

而内波,即 $z = -h_1$ 处的界面波,该面的竖向位移为

$$\eta_2(x, t) = u_2(x, -h_1, t) = \frac{-u_{2,x}}{1 + u_{2,x}} h_2 = \frac{-f}{1 + f} h_2 \quad (47)$$

将式(46)代入式(47)可得

$$\eta_2(x, t) = \eta_2(\xi) = \frac{-(V/A) \operatorname{sech}^2(\xi \sqrt{V/2})}{1 + (V/A) \operatorname{sech}^2(\xi \sqrt{V/2})} h_2 \quad (48)$$

式(48)即为内孤立波的位移法解,其波幅可表示为

$$\eta_0 = \frac{-V/A}{1 + V/A} h_2 = -h_2 \left[\frac{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2) c^2 - g' h_2}{g' h_2 - \gamma h_1^{-2} h_2 h c^2} \right] / \left[1 + \frac{(1 + \gamma h_1^{-1} h_2) c^2 + g' h_2}{g' h_2 - \gamma h_1^{-2} h_2 h c^2} \right] \quad (49)$$

由此可得波速为

$$V/A = -\eta_0 / (h_2 + \eta_0)$$

$$c^2 = \frac{g' h_2 (2\eta_0 + h_2)}{(h_2 + \eta_0) (1 + \gamma h_1^{-1} h_2) + \gamma h_1^{-2} h_2 \eta_0 h} \quad (50)$$

而式(48)可以写为

$$\eta_2(x, t) = \frac{\eta_0 h_2 \operatorname{sech}^2[(x - ct)/\lambda]}{\eta_0 + h_2 - \eta_0 \operatorname{sech}^2[(x - ct)/\lambda]} \quad (51)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{V}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{h_1^2 (1 + \gamma \sigma) (2\eta_0 + h_2)}{(\sigma^2 - \gamma) \eta_0}} \quad (\sigma = \frac{h_1}{h_2}) \quad (52)$$

可见,如果 $h_1 > \sqrt{\lambda} h_2$, 必有 $\eta_0 > 0$, 为凸孤立波;反之,必有 $\eta_0 < 0$, 为凹孤立波。当 $h_1 < \sqrt{\lambda} h_2$ 时,根据式(50)知

$$\eta_0 \leq h_2 (\sigma + \gamma) / (\sigma + 2\gamma + \gamma \sigma^{-1}) \quad (53)$$

将式(50,52)代入(46)可得

$$f(\xi) = [-\eta_0 / (h_2 + \eta_0)] \operatorname{sech}^2(\xi/\lambda) \quad (54)$$

所以,位移和速度分别为

$$u_2(x, t) = \frac{-\eta_0 \lambda}{h_2 + \eta_0} \tanh\left[\frac{x - ct}{\lambda}\right] + u_{20} \\ u_{2,t} = -c \dot{v} = -cf = \frac{c \eta_0}{h_2 + \eta_0} \operatorname{sech}^2\left[\frac{\xi}{\lambda}\right] \quad (55)$$

式中 u_{20} 是积分常数。再根据式(16,17,29)知

$$u_1(x) = \left[\frac{\eta_0 \lambda}{h_2 + \eta_0} \tanh\left[\frac{x_a - ct}{\lambda}\right] - u_{20} \right] h_1^{-1} h_2 \\ u_1(x) = \frac{-\tilde{u}_{2,t} h_2}{h_1 + h \tilde{u}_{2,x}} = -c \eta_0 \operatorname{sech}^2\left[\frac{x_a - ct}{\lambda}\right] h_2 / \left[h_2 + \eta_0 - h \eta_0 \operatorname{sech}^2\left[\frac{x_a - ct}{\lambda}\right] \right] \quad (56)$$

式中 x_a 满足

$$x_a = x + h_1^{-1} h \frac{\eta_0 \lambda}{h_2 + \eta_0} \tanh\left[\frac{x_a - ct}{\lambda}\right] - h_1^{-1} h u_{20} \quad (57)$$

4 与 KdV 孤立波解的数值比较

分析两层水系统的内孤立波常用 KdV 方程,其孤立波解为^[5]

$$\eta_k(x_e, t) = \eta_{0k} \operatorname{sech}^2[(x_e - c_k t)/\lambda_k] \quad (58)$$

式中

$$c_k = c_0 + \eta_{0k} c_1 / 3, \quad c_0 = \sqrt{g' h_1 / (\gamma + \sigma)} \\ c_1 = \frac{3c_0}{2} \frac{\sigma^2 - \gamma}{\gamma h_1 + \sigma^2 h_2}, \quad \eta_{0k} \lambda_k^2 = \frac{4}{3} \frac{h_1^2 h_2 (1 + \gamma \sigma)}{(\sigma^2 - \gamma)} \quad (59)$$

式(58)中 x_e 表示 Euler 坐标。为便于比较,本文将位移法孤立波解转到 Euler 坐标下显示,即为 $[x + u_2(x, t), -h_2 + \eta_2(x, t)]$ 。上下层密度按文献[5]选取,分别为 $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$ 和 $\rho_2 = 1025 \text{ kg/m}^3$,

重力加速度取 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。位移表达式(55)中积分常数 u_{20} 设为 0, 则初始时刻 $x = 0 \text{ m}$ 处, 下层水的水平位移为 0。接着通过取不同的 h_1, h_2 和 η_0 分别进行计算, 以比较位移法内孤立波与 KdV 方程孤立波。

首先, 对于凹孤立波, 上下层水的水深按文献[5]选取, 分别为 $h_1 = 0.3 \text{ m}$ 和 $h_2 = 0.7 \text{ m}$ 。图 2 展示了三组不同波高的凹孤立波在 0 s, 150 s 和 300 s 三个不同时刻的波形, 波高分别为 $\eta_0 = 0.02 \text{ m}, 0.04 \text{ m}$ 和 0.06 m 。为更好地展示这三种波的波形, 绘制图 2 时, (b) 组波垂直向下平移了 0.03 m, 即 (b) 组波实际绘制的是 $\eta - 1$ 。相应地, (c) 组波向下平移了 0.08 m。可以看出, 两种方法得到的波形很相似, 而位移法的波速略大于 KdV 波的波速, 这种差异随波高的增加而增加。而当 $\eta_0 = 0.02 \text{ m}$ 时, 波速基本一致, 经过 300 s 的传播, 两种方法的波形吻合很好。

图 3 给出三组不同波高的凸孤立波在 0 s, 150 s 和 300 s 三个不同时刻的波形。三组波的波高分别 $\eta_0 = -0.02 \text{ m}, -0.04 \text{ m}$ 和 -0.06 m 。计

算时, 上下两层水的水深分别取为 $h_1 = 0.7 \text{ m}$ 和 $h_2 = 0.3 \text{ m}$ 。为更好地展示这三种波的波形, 绘制图 3 时, (b, c) 两组波分别向上平移了 0.03 m 和 0.08 m。可以看出, 两种方法得到的凸孤立波的波形也很相似, 然而位移孤立波的传播略慢于 KdV 孤立波, 这与凹孤立波的情况刚好相反。当 $\eta_0 = -0.02 \text{ m}$ 时, 波速基本一致, 经过 300 s 的传播, 两种方法的波形吻合很好, 而随着波幅的增加, 两种方法的波速之差亦随之增加。

5 结 论

本文基于 Lagrange 坐标和 Hamilton 方法, 推导了一维两层浅水系统的位移浅水内波方程, 并进一步导出了两层浅水系统的内孤立波解。通过与经典的 KdV 内孤立波的数值比较发现, 在波幅不大 ($|\eta_0| < 0.3 \min(h_1, h_2)$) 的情况下, 位移法内孤立波与 KdV 方程的内孤立波的波形和波速基本一致, 验证了本文的假设和理论推导的正确性。本文研究亦充分说明 Lagrange 坐标和 Hamilton 方法可适用于分层浅水系统研究, 这为分层水系统的保辛数值研究提供了一种途径。

本文只是讨论了最简单的弱非线性和弱色散情况, 但已可以发现位移法内孤立波与 KdV 内孤立波的波速略有差异, 这种差异随着波幅的增加而增加。当考虑更多色散和非线性时, 位移法内孤立波解与传统的 KdV 内孤立波或者其他内孤立波解的差异如何, 很值得进一步研究。后续研究还将考虑水底不平情况和多层浅水系统等问题。

参考文献 (References):

- [1] Sutherland B R. Internal Gravity Waves [M]. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [2] 程友良. 分层流体中内孤波的研究进展[J]. 力学进展, 1998, 28(3): 383-391. (CHENG You-liang. Advances in studies of internal solitary waves in stratified fluids: A review [J]. *Advances in Mechanics*, 1998, 28(3): 383-391. (in Chinese))
- [3] Chen B F, Huang Y J, Chen B, et al. Surface wave disturbance during internal wave propagation over various types of sea bottoms[J]. *Ocean Engineering*, 2016, 125: 214-225.

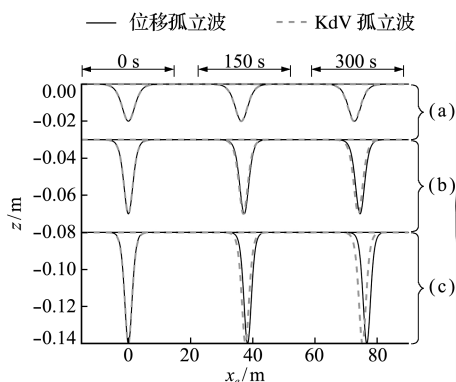


图 2 凹孤立波 ($h_1 = 0.3 \text{ m}, h_2 = 0.7 \text{ m}$)
Fig. 2 Concave solitary wave ($h_1 = 0.3 \text{ m}, h_2 = 0.7 \text{ m}$)

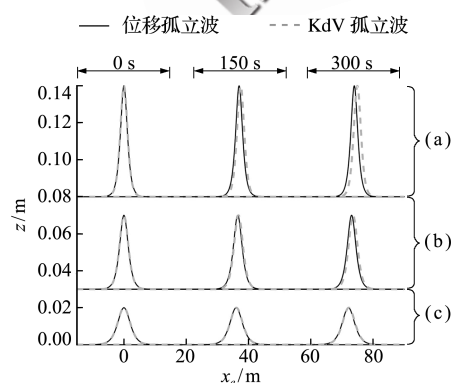


图 3 凸孤立波 ($h_2 = 0.3 \text{ m}, h_1 = 0.7 \text{ m}$)
Fig. 3 Convex solitary wave ($h_1 = 0.7 \text{ m}, h_2 = 0.3 \text{ m}$)

- [4] 李家春. 水面下的波浪——海洋内波[J]. 力学与实践, 2005, **27**(2): 1-6. (LI Jia-chun, Billow under the sea surface—internal waves in the ocean[J]. *Mechanics in Engineering*, 2005, **27**(2): 1-6. (in Chinese))
- [5] Chen M, Chen K, You Y X. Experimental investigation of internal solitary wave forces on a semi-submersible[J]. *Ocean Engineering*, 2017, **141**: 205-214.
- [6] 钟万勰, 姚 征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(1): 151-156. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(1): 151-156. (in Chinese))
- [7] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics* [M]. Beijing: High Education Press, 2006. (in Chinese))
- [8] 钟万勰, 吴 锋. 力-功-能-辛-离散[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2016. (ZHONG Wan-xie, WU Feng. *Force-Work-Energy-Symplecticity-Discretization* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2016. (in Chinese))
- [9] 钟万勰, 吴 锋, 孙 雁, 等. 浅水机械激波[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(8): 845-852. (ZHONG Wan-xie, WU Feng, SUN Yan, et al. Shallow water mechanical shock wave[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(8): 845-852. (in Chinese))
- [10] 吴 锋. 基于位移的水波数值模拟——辛方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2017. (WU Feng. *Numerical Modeling of Water Waves Based on Displacement: Symplectic Method* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2017. (in Chinese))
- [11] 姚 征, 钟万勰. 位移法浅水波方程解及其特性[J]. 计算机辅助工程, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Solutions and characteristics of shallow water equation based on displacement method[J]. *Computer Aided Engineering*, 2016, **25**(2): 1-4, 13. (in Chinese))
- [12] 钟万勰, 陈晓辉. 浅水波的位移法求解[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2006, **21**(4): 486-493. (ZHONG Wan-xie, CHEN Xiao-hui. Solving shallow water waves with the displacement method[J]. *Journal of Hydrodynamics(Ser A)*, 2006, **21**(4): 486-493. (in Chinese))
- [13] 吴 锋, 钟万勰. 浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): 1-13. (WU Feng, ZHONG Wan-xie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 1-13. (in Chinese))
- [14] Wu F, Zhong W X. A shallow water equation based on displacement and pressure and its numerical solution[J]. *Environmental Fluid Mechanics*, 2017, **17**(6): 1099-1126.
- [15] 钟万勰, 高 强, 彭海军. 经典力学辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics-Its Symplectic Description* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013. (in Chinese))
- [16] 吴 锋, 钟万勰. 基于祖冲之类方法具有保辛性[J]. 计算力学学报, 2015, **32**(4): 447-450. (WU Feng, ZHONG Wan-xie. The Zu-type method is symplectic[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(4): 447-450. (in Chinese))
- [17] Wu F, Zhong W X. On displacement shallow water wave equation and symplectic solution[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **318**: 431-455.
- [18] Liu P, Li Z L, Luo R Z. Modified $(2+1)$ -dimensional displacement shallow water wave system: Symmetries and exact solutions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, **219**(4): 2149-2157.
- [19] Liu P, Fu P K. Modified $(2+1)$ -dimensional displacement shallow water wave system and its approximate similarity solutions[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(9): 090203.
- [20] Liu P, Lou S Y. A $(2+1)$ -dimensional displacement shallow water wave system[J]. *Chinese Physics Letters*, 2008, **25**(9): 3311-3314.
- [21] Wu F, Yao Z, Zhong W X. Fully nonlinear $(2+1)$ -dimensional displacement shallow water wave equation[J]. *Chinese Physics B*, 2017, **26**(5): 054501.
- [22] Kinnmark I. *The Shallow Water Wave Equations: Formulation, Analysis and Application* [M]. Berlin: Springer, 1986.
- [23] Kim D H, Lynett P J. Dispersive and nonhydrostatic pressure effects at the front of surge[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2011, **137**(7): 754-765.

Displacement shallow water internal solitary wave

WU Feng¹, YAO Zheng², SUN Yan³, ZHONG Wan-xie^{*1}

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Transportation Equipments and Ocean Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China;

3. School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Here it is addressed that the internal solitary wave in a water system, which consists of two layers of constant-density incompressible inviscid water. By using the Lagrange coordinate and Hamilton principle, an internal wave equation for shallow water displacement of the two-water system and the corresponding internal solitary displacement wave (DISW) are derived. The numerical tests show good agreement between the DISW and the classical KdV solitary wave, which means it is effective to use the Lagrange coordinate and Hamilton principle to analyze the internal wave problem, and thence a way to develop the symplectic method for it.

Key words: internal solitary wave; Lagrange coordinate; Hamilton principle

<http://www.cjcm.net>

引用本文/Cite this paper:

吴 锋,姚 征,孙 雁,等. 位移浅水内孤立波[J]. 计算力学学报, 2019, 36(3): 297-303.

WU Feng, YAO Zheng, SUN Yan, et al. Displacement shallow water internal solitary wave[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, 36(3): 297-303.