第34卷第5期 计 算 力 学 学 报 Vol. 34, No. 5
2017年10月 Chinese Journal of Computational Mechanics October 2017

DOI:10.7511/jslx201705021

两点边值问题3次Lagrange形函数有限元方程的条件数和预处理

张 衡

(福建师范大学福清分校 电子与信息工程学院,福清 350300)

摘 要:大型病态稀疏线性方程组的求解是科学计算和工程应用中的重要问题之一,采用预处理方法,通过降低条件数来减少病态是解决这一问题的关键。基于3次Lagrange形函数,用有限元方法将积分形式两点边值问题的求解转化成病态七对角方程组的求解。通过研究该方程组的特殊结构,分析了该方程的条件数,找到产生病态的因子(致病因子)。将系数矩阵的大范数部分分解成几个简单矩阵的特殊组合,基于这种特殊分解,设计出预条件子(去病因子),并对预条件子的性能进行了定量分析。结果表明,该预条件子的使用几乎不增加迭代的计算量,预处理后的条件数接近1。

关键词:病态七对角方程组;特别结构;条件数;预条件子

中图分类号:O24 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2017)05-0672-05

1 引 言

大规模稀疏线性方程组的迭代求解是科学计算和工程中经常遇到的问题[1-3],其中方程组的病态(条件数过高)是影响求解效率和精度的瓶颈因素。因此,在迭代求解之前,使用预处理方法来减少方程组的病态,成为提高求解效率和精度的必要措施。

所谓预处理技术是指在求解方程组

$$\mathrm{A}x=b \tag{1}$$

时,如果A的条件数Cond(A)太大,则构造简单的可逆矩阵 P 和 Q,使得 P^{-1} 和 Q^{-1} 容易计算,且 $\mathrm{Cond}(PAQ)\ll\mathrm{Cond}(A)$,从而方程组(1)转化成等价的方程组

$$PAQx'=Pb \tag{2}$$

式中 $x'=Q^{-1}x$,矩阵 P 和 Q 分别称为左右预条件子或者左右预处理器[4]。

在解决实际问题时,经常遇到病态(高条件数)的稀疏线性方程组,而且条件数经常随着问题规模的增加而增加。成功的迭代求解,往往以适当的预条件子作为前提,否则,迭代过程可能很慢,甚至不收敛。然而,目前并没有通用的预条件子,只能针对具体问题,根据预条件子的基本要求,设计具体的预条件子[6-8]。很多计算工作者针对不同的方程组设计了不同的预条件子,但是对预条件子的性能(条件数下降的程度、预处理后的条件数以及对计算量的影响等)多用计算结果说明,鲜见有定量的理论分析结果[9-15]。

使用有限元方法,求解积分形式的两点边值问题时,基于3次Lagrange形函数形成的有限元方程是七对角病态方程组,其总刚度矩阵有特别的结构,针对这种结构,本文讨论了该方程的条件数,找到方程产生高条件数的因素,称之为致病因子,设计了消除致病因素的预条件子,称之为去病因子。将系数矩阵的大范数部分分解成几个简单矩阵的特殊组合,基于这种特殊分解,定量地分析了预条件子的性能(条件数下降的程度和对计算量的影响),说明了在几乎不增加计算量的情况下,预处理后的条件数接近1。

2 有限元方程的形成[16]

用有限元方法,求解积分形式的两点边值问题

$$\int_a^b\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+quv\right)\mathrm{d}x=\int_a^b fv\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

式中 $p=p(x)\geqslant p_{\min}>0$, $q=q(x)\geqslant 0$, $f=f(x)$, $x\in[a,b]$

对 $[a,b]$ 进行如下剖分:

$a=x_0<x_1<\cdots<x_m<x_{m+1}=b$, $h_i=x_i-x_{i-1}$,在 $[x_{i-1},x_i]$ 上取信息点 $x_{i-1}=\bar{x}_{i,1}<\bar{x}_{i,2}<\bar{x}_{i,3}<\bar{x}_{i,4}=x_i$。取3次Lagrange形函数,$\mathrm{N}_i=\mathrm{N}_i(\xi)\in P_3[\xi]$, $\xi\in[0,1]$ $(i=1,2,3)$,则 $\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2+\mathrm{N}_3+\mathrm{N}_4=1$。

收稿日期:2016-05-01;**修改稿收到日期**:2016-09-31.
基金项目:福建省自然科学基金(2014J01006)资助项目.
作者简介:张 衡(1961-),男,博士,教授.

构造式(3)的离散形式:

$$\sum_{i=1}^{m+1}\int_0^1\Big[\frac{p(x_{i-1}+h_i\xi)}{h_i}\sum_{j=1}^{4}v_j^{(i)}N_j'(\xi)\sum_{j=1}^{4}u_j^{(i)}N_j'(\xi)+h_iq(x_{i-1}+h_i\xi)\sum_{j=1}^{4}v_j^{(i)}N_j(\xi)\sum_{j=1}^{4}u_j^{(i)}N_j(\xi)\Big]\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{m+1}\int_0^1\Big[h_if(x_{i-1}+h_i\xi)\sum_{j=1}^{4}v_j^{(i)}N_j(\xi)\Big]\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

式中 $u_j^{(i)}=u(\bar{x}_{i,j})$, $v_j^{(i)}=v(\bar{x}_{i,j})$ $(j=1,2,3,4)$

$u_4^{(i)}=u(x_i)=u_1^{(i+1)}$, $v_4^{(i)}=v(x_i)=v_1^{(i+1)}$[16]

可以将式(4)写成

$$\sum_{i=1}^{m+1}\bar{v}_i\int_0^1\Big\{[p(x_{i-1}+h_i\xi)/h_i]N'N'^{\mathrm{T}}+h_iq(x_{i-1}+h_i\xi)NN^{\mathrm{T}}\Big\}\mathrm{d}\xi\,\bar{u}_i^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}v_i^{\mathrm{T}}\Big[\int_0^1h_if(x_{i-1}+h_i\xi)N^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\xi\Big] \tag{5}$$

式中 $N_i'=N_i'(\xi)$ $(i=1,2,3,4)$

$\bar{v}_i=(v_1^{(i)},v_2^{(i)},v_3^{(i)},v_4^{(i)})$

$\bar{u}_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},u_3^{(i)},u_4^{(i)})$

$N=(N_1,N_2,N_3,N_4)$

$N'=(N_1',N_2',N_3',N_4')$

容易验证:

$$\begin{cases}NN^{\mathrm{T}}=U_3^{\mathrm{T}}(MM^{\mathrm{T}}-\bar{M})U_3+\bar{N}\\ N'N'^{\mathrm{T}}=U_3^{\mathrm{T}}M'M'^{\mathrm{T}}U_3\end{cases} \tag{6}$$

式中 $M=(N_1,N_1+N_2,N_1+N_2+N_3)$

$M'=(N_1',N_1'+N_2',N_1'+N_2'+N_3')$

$$U_n=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&-1\end{pmatrix}_{n\times(n+1)}$$

$$\bar{M}=\begin{pmatrix}N_1&N_1&N_1\\N_1&N_1+N_2&N_1+N_2\\N_1&N_1+N_2&N_1+N_2+N_3\end{pmatrix}$$

$\bar{N}=\mathrm{diag}(N_1,N_2,N_3,N_4)$

从而式(5)可表示为

$$\sum_{i=1}^{m+1}\bar{v}_i[U_3^{\mathrm{T}}P_iU_3+Q_i]\bar{u}_i^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{m}\bar{v}_i\bar{d}_i^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中 $\bar{d}_i=\int_0^1h_if(x_{i-1}+h_i\xi)N\mathrm{d}\xi=(d_1^{(i)},d_2^{(i)},d_3^{(i)},d_4^{(i)})$

$\bar{Q}_i=\int_0^1h_iq(x_{i-1}+h_i\xi)\bar{N}\,\mathrm{d}\xi=\mathrm{diag}(q_1^{(i)},q_2^{(i)},q_3^{(i)},q_4^{(i)})$

$$P_i=\int_0^1\Big\{[p(x_{i-1}+h_i\xi)/h_i]M'M'^{\mathrm{T}}+h_iq(x_{i-1}+h_i\xi)(MM^{\mathrm{T}}-\bar{M})\Big\}\mathrm{d}\xi=\begin{pmatrix}p_{1,1}^{(i)}&p_{1,2}^{(i)}&p_{1,3}^{(i)}\\p_{1,2}^{(i)}&p_{2,2}^{(i)}&p_{2,3}^{(i)}\\p_{1,3}^{(i)}&p_{2,3}^{(i)}&p_{3,3}^{(i)}\end{pmatrix}$$

显然 $P_i=P_i^{\mathrm{T}}$, $\|P_i\|=O(1/h_i)$, $\|Q_i\|=O(h_i)$

将式(7)写成下面的矩阵表达式

$$\bar{v}\left[\bar{U}^{\mathrm{T}}P\bar{U}+\begin{pmatrix}q_1^{(1)}&&\\&Q&\\&&q_4^{(m)}\end{pmatrix}\right]\bar{u}^{\mathrm{T}}=\bar{v}\bar{d}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式中 $U=U_{3m-1}$

$$\bar{U}=\begin{pmatrix}1&&0_{(3m-1)\times1}\\&-U_{3m-1}^{\mathrm{T}}&\\0_{(3m-1)\times1}&&-1\end{pmatrix}$$

$\bar{v}=(v_1^{(1)},v,v_4^{(m)})$, $\bar{u}=(u_1^{(1)},u,u_4^{(m)})$

$\bar{d}=(d_1^{(1)},d,d_4^{(m)})$, $d_1=(d_2^{(1)},d_3^{(1)})$

$d_i=(d_1^{(i)}+d_4^{(i-1)},d_2^{(i)},d_3^{(i)})$

$Q_1=\mathrm{diag}(q_2^{(1)},q_3^{(1)})$

$Q_i=\mathrm{diag}(q_1^{(i)}+q_3^{(i-1)},q_2^{(i)},q_3^{(i)})$

$u_1=(u_2^{(1)},u_3^{(1)})$, $v_1=(v_2^{(1)},v_3^{(1)})$

$u_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},u_3^{(i)})$

$v_i=(v_1^{(i)},v_2^{(i)},v_3^{(i)})$ $(i=2,3,\cdots,m)$

$u=(u_1,\cdots,u_m)$, $v=(v_1,\cdots,v_m)$

$d=(d_1,\cdots,d_m)$

$$P=\begin{pmatrix}P_1&&\\&\ddots&\\&&P_m\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}Q_1&&\\&\ddots&\\&&Q_m\end{pmatrix}$$

由式(8)得到 $v(UPU^{\mathrm{T}}+Q)u^{\mathrm{T}}=vd^{\mathrm{T}}$,从而得到问题(1)的有限元方程

$$(UPU^{\mathrm{T}}+Q)u^{\mathrm{T}}=d^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

总刚度矩阵为

$$A=UPU^{\mathrm{T}}+Q \tag{10}$$

注:将总刚度矩阵写成分解的形式如式(10),可以避免刚度矩阵的拼接计算,而且有利于分析条件数,有利于设计预处理子和算法。

3　有限元方程的条件数

矩阵G的条件数为 $\mathrm{Cond}(G)=\lambda_{\max}^{(G)}/\lambda_{\min}^{(G)}$,其中 $\lambda_{\max}^{(G)}$ 和 $\lambda_{\min}^{(G)}$ 分别为G的最大和最小特征值[16]。

因为 $\|P_i\|=O(1/h_i)$, $\|Q_i\|=O(h_i)$,所以 $\|UPU^{\mathrm{T}}\|\gg\|Q\|$,在总刚度矩阵A中,$UPU^{\mathrm{T}}$ 是A的大范数部分,即主要部分,所以可以通过估计 $\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}})$ 来估计 $\mathrm{Cond}(A)$。因此有 $\mathrm{Cond}(A)=\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}}+Q)\approx\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}})$。

下面讨论 $\mathrm{Cond}(U_nCU_n^{\mathrm{T}})$,C是 $n+1$ 阶对称矩阵。因为

$$U_nU_n^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\lambda_{\max}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})}=4\cos^2[\pi/2(n+1)]$$

$$\lambda_{\min}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})}=4\sin^2[\pi/2(n+1)]$$

所以 $\mathrm{Cond}(U_nU_n^{\mathrm{T}})=\cot^2[\pi/2(n+1)]\approx 4(n+1)^2/\pi^2$

利用 Raylei-Ritz 定理[17]，

$$\lambda_{\max}^{(U_nCU_n^{\mathrm{T}})}\leqslant\lambda_{\max}^{(C)}\lambda_{\max}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})},\ \lambda_{\min}^{(U_nCU_n^{\mathrm{T}})}\geqslant\lambda_{\min}^{(C)}\lambda_{\min}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}(U_nCU_n^{\mathrm{T}})&=\lambda_{\max}^{(U_nCU_n^{\mathrm{T}})}/\lambda_{\min}^{(U_nCU_n^{\mathrm{T}})}\leqslant\\&\lambda_{\max}^{(C)}\lambda_{\max}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})}/\lambda_{\min}^{(C)}\lambda_{\min}^{(U_nU_n^{\mathrm{T}})}=\\&\mathrm{Cond}(C)\mathrm{Cond}(U_nU_n^{\mathrm{T}})\approx\\&\mathrm{Cond}(C)[4(n+1)^2/\pi^2]\end{aligned}$$

所以 UPU^{T} 的条件数为

$$\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{Cond}(P)\mathrm{Cond}(UU^{\mathrm{T}})\approx 36m^2\mathrm{Cond}(P)/\pi^2 \tag{11}$$

如果 $P=\alpha I$，α 是常数，则 $A=\alpha UU^{\mathrm{T}}+Q$，$\mathrm{Cond}(P)=1$，所以有 $\mathrm{Cond}(A)\approx 36m^2/\pi^2$。

显然在总刚度矩阵 $A=UPU^{\mathrm{T}}+Q$ 中，U 的作用如同条件数的放大器，将条件数从 $\mathrm{Cond}(P)$ 放大到 $\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}})\leqslant 36m^2\mathrm{Cond}(P)/\pi^2$，因此 U 是 A 产生病态(高条件数)的重要原因，称 U 为 A 的致病因子。

注：U 与 P 无关，即与两点边值问题(3)无关，只与 A 的阶数有关。

4　有限元方程的预条件子

记 $H=H_{3m-1}$

$$H_n=\mathrm{diag}(\sqrt{1/2},\sqrt{2/3},\cdots,\sqrt{n/(n+1)})\times\begin{bmatrix}1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1/n & \cdots & (n-1)/n & 1\end{bmatrix}$$

则易验证：

$$H_nU_nU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}}=I_n \tag{12}$$

式中 I_n 是 n 阶单位矩阵，因此

$\mathrm{Cond}(H_nU_nU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}})=1$，利用 Raylei-Ritz 定理[17]

$$\lambda_{\max}^{(H_nU_nCU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}})}\leqslant\lambda_{\max}^{(C)}\max_{X\in R^n}\frac{X^{\mathrm{T}}H_nU_nU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}}X}{X^{\mathrm{T}}X}=\lambda_{\max}^{(C)}$$

$$\lambda_{\min}^{(H_nU_nCU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}})}\geqslant\lambda_{\min}^{(C)}\min_{X\in R^n}\frac{X^{\mathrm{T}}H_nU_nU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}}X}{X^{\mathrm{T}}X}=\lambda_{\min}^{(C)}$$

$$\mathrm{Cond}(H_nU_nCU_n^{\mathrm{T}}H_n^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{Cond}(C)$$

所以 $HUPU^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}$ 条件数为

$$\mathrm{Cond}(HUPU^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{Cond}(P) \tag{13}$$

显然，H 的作用如同条件数的消除器，将条件数从 $\mathrm{Cond}(UPU^{\mathrm{T}})\leqslant 36m^2\mathrm{Cond}(P)/\pi^2$ 减少到 $\mathrm{Cond}(HUPU^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}})\leqslant\mathrm{Cond}(P)$，因此 H 能够消除 U 的条件数放大作用，减少病态，称 H 为属于 U 的去病因子。

注：H 与 P 无关，即与两点边值问题(3)无关，只与 A 的阶数有关。

选择 H 和 H^{T} 分别为左右预条件子，将方程(9)转化成

$$HAH^{\mathrm{T}}u'=(HUPU^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}+HQH^{\mathrm{T}})u'=d' \tag{14}$$

式中 $u'=H^{-\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}, d'=H^{\mathrm{T}}d^{\mathrm{T}}$

5　有限元方程预条件子的性能分析和预处理

容易验证：

$$UPU^{\mathrm{T}}=H^{-1}\tilde{P}H^{-\mathrm{T}}+\bar{P}$$

式中

$$\bar{P}_1=\mathrm{diag}\left(\frac{p_{1,1}'^{(1)}-p_{2,2}'^{(1)}}{1},\frac{p_{2,2}'^{(1)}-p_{3,3}'^{(1)}}{2}\right)$$

$$\bar{P}_i=\mathrm{diag}\left(\frac{p_{3,3}'^{(i-1)}-p_{1,1}'^{(i)}}{3i-3},\frac{p_{1,1}'^{(i)}-p_{2,2}'^{(i)}}{3i-2},\frac{p_{2,2}'^{(i)}-p_{3,3}'^{(i)}}{3i-1}\right)$$

$$p_{1,1}'^{(i)}=p_{1,1}^{(i)}+p_{1,2}^{(i)}+p_{1,3}^{(i)},\ p_{2,2}'^{(i)}=p_{2,2}^{(i)}+p_{1,2}^{(i)}+p_{2,3}^{(i)}$$

$$p_{3,3}'^{(i)}=p_{3,3}^{(i)}+p_{2,3}^{(i)}+p_{1,3}^{(i)}$$

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix}P_1' & \\ & \hat{P}\end{bmatrix}-H^{-\mathrm{T}}\breve{P}H^{-1},\ \hat{P}=\begin{bmatrix}\hat{P}_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{P}_m\end{bmatrix}$$

$$P_1'=\mathrm{diag}(p_{2,2}'^{(1)},p_{3,3}'^{(1)}),\ \hat{P}_i=\mathrm{diag}(p_{1,1}'^{(i)},p_{2,2}'^{(i)},p_{3,3}'^{(i)})$$

$$\breve{P}=\begin{bmatrix}\breve{P}_1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \breve{P}_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \breve{P}_m\end{bmatrix},\ \breve{P}_i=\begin{bmatrix}p_{1,2}'^{(i)} & p_{1,3}^{(i)} \\ p_{1,3}^{(i)} & p_{2,3}'^{(i)}\end{bmatrix}$$

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}\bar{P}_1 & & & \\ & \bar{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{P}_m\end{bmatrix}$$

因此 $A=H^{-1}\tilde{P}H^{-\mathrm{T}}+\bar{P}+Q$，方程(14)转化成

$$[\tilde{P}+H(\bar{P}+Q)H^{\mathrm{T}}]u'=d' \tag{15}$$

因为 $\widetilde{P}$ 是块对角矩阵,每个块不超过3阶,所以 $\widetilde{P}$ 可以继续分解成 $\widetilde{P}=LL^{\mathrm{T}}$,利用这个分解,继续进行预处理,将方程(15)转化成

$$[I+\bar{Q}]u''=d'' \tag{16}$$

式中　$d''=L^{-1}d'$, $u''=L^{\mathrm{T}}u'$

$$\bar{Q}=L^{-1}H(\bar{P}+Q)H^{\mathrm{T}}L^{-\mathrm{T}}$$

记　$\alpha=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_{1,1}'^{(i)},p_{2,2}'^{(i)},p_{3,3}'^{(i)}\}$

$\beta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_{1,1}'^{(i)},p_{2,2}'^{(i)},p_{3,3}'^{(i)}\}$

则容易验证

$$\alpha-\beta\geqslant\|H\bar{P}H^{\mathrm{T}}\|,\ \alpha\geqslant\|P\|\geqslant\beta=O(1/h_i)$$

$$\|L\|\geqslant1/\sqrt{\beta}=O(1/\sqrt{h_i}),\ \|Q\|=O(h_i)$$

所以　$\|\bar{Q}\|\leqslant[\alpha-\beta+O(h_i)]/\beta\approx(\alpha-\beta)/\beta$

方程(15)的 P 和方程(16)的 I 分别是系数矩阵的大范数部分,即主要部分,当 $\alpha-\beta$ 很小时,$\mathrm{Cond}(I+\bar{Q})\approx\mathrm{Cond}(I)=1$。

可以取迭代式为

$$u''^{(k+1)}=d''-\bar{Q}u''^{(k)} \tag{17}$$

$\bar{P}$ 和 Q 是对角矩阵,H 是下三角两对角矩阵的逆,L^{-1} 是下三角块对角矩阵的逆,因此无需计算 $\bar{Q}$,即可进行 $\bar{Q}$ 与向量的乘积计算,只需要 $7n(n=3m-1)$ 次计算操作,就可以完成一次 $\bar{Q}$ 与向量的乘积计算。在迭代过程中,每个迭代步只需要 $7n$ 次计算操作,与一般的迭代法相当。由于 $1>\|\bar{Q}\|$,所以理论收敛速度快,又因为 $\mathrm{Cond}(I+\bar{Q})\approx1$,所以理论精度高。

方程(14,15)的系数矩阵仍然是正定对称矩阵,所以仍然可以使用经典 Krylov 子空间方法——共轭梯度法求解,即为预处理共轭梯度法[4],其中主要的计算操作仍然是 $\bar{Q}$ 与向量的乘积,所以计算量几乎没有增加。

6　结　论

稀疏线性方程组的稀疏性,往往隐含着简单的结构,这些简单的结构并不是显式的,所以没有显式通用的预处理方法,通常要针对具体的问题,找到这些特别的简单结构,才能找到影响条件数的主要原因,并提出合适的预处理方法。

使用有限元方法求解积分形式的两点边值问题时,基于3次 Lagrange 形函数形成有限元方程,通过研究该方程总刚度矩阵的结构,找到了影响条件数的主要原因,称之为致病因子。针对该方程总刚度矩阵的特别结构,将刚度矩阵的大范数部分分解成几个结构简单的矩阵组合,基于这种特别的组合,提出预条件子,称之为去病因子,从而提出预处理方法,预处理后矩阵保持正定对称,在基本不增加计算操作数的情况下,使条件数接近1。

参考文献(References):

[1] Jia Z X. The convergence of Krylov subspace methods for large unsymmertric linear systems [J]. *Acta Mathematica Sinica*,1988,**14**(4):507-518.

[2] Van dar Vorst H A,Dekker K. Conjugate gradient type methods and preconditioning[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,1988,**24**(1):73-87.

[3] Young D M,Jea K C. Generalized conjugate-gradient acceleration of nonsymmetrizable iterative methods [J]. *Linear Algebra and Its Applications*,1980,**34**:159-194.

[4] 李荣华.偏微分方程数值解法(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2010.(LI Rong-hua. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (*Second Edition*)[M]. Beijing:Higher Education Press,2010.(in Chinese))

[5] Bai Z Z,Li G Q. Restrictively preconditioned conjugate gradient methods for systems of linear equations [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*,2003,**23**(4):561-580.

[6] Wang Z Q. Restrictively preconditioned Chebyshev method for solving systems of linear equations [J]. *Journal of Engineering Mathematics*,2015,**93**(1):61-76.

[7] Bru R,Marin J,Mas J,et al. Preconditioned iterative methods for solving linear least squares problems [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*,2014,**36**(4):A2002-A2022.

[8] 于春肖,苑润浩,穆运峰.新预处理ILUCG法求解稀疏病态线性方程组[J].数值计算与计算机应用,2014,**35**(1):21-27.(YU Chun-xiao,YUAN Run-hao,MU Yun-feng. New preconditioning ILUCG method for solving sparse ill-conditioned linear equations[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*,2014,**35**(1):21-27.(in Chinese))

[9] Xue Q F,Gao X B,Liu X G. Comparison theorems for a class of preconditioned AOR iterative methods[J]. *Journal of Mathematics*,2014,**34**(3):448-460.

[10] 潘春平,马成荣,曹文方,等.一类预条件AOR迭代

法的收敛性分析[J]. 数学杂志,2013,**33**(3):479-484.(PAN Chun-ping,MA Cheng-rong,CAO Wen-fang,et al. On convergence of a cype of preconditional AOR iterative method [J]. *Journal of Mathematics*, 2013,**33**(3):479-484.(in Chinese))

[11] 罗 芳. L-矩阵的多参数预条件 AOR 迭代法[J]. 数学的实践与认识,2013,**43**(15),277-282.(LUO Fang. On the ulti-parameter precondition AOR iterative method for L-matrices [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2013, **43**(15), 277-282.(in Chinese))

[12] 吴建平,赵 军,马怀发,等. 一般稀疏线性方程组的因子组合型并行预条件研究[J]. 计算机应用与软件,2012,**29**(5):6-9,108.(WU Jian-ping,ZHAO Jun, MA Huai-fa, et al. Generalsparse linear equations system factor combined parallel pre-condition research[J]. *Computer Applications and Software*, 2012,**29**(5):6-9,108.(in Chinese))

[13] 李继成,蒋耀林. 预条件 IMGS 迭代方法的比较定理[J]. 数学物理学报,2011,**31A**(4):880-886.(LI Ji-cheng, JIANG Yao-lin. Comparison theorems for the IMGS iterative method wtih preconditioner[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011,**31A**(4):880-886.(in Chinese))

[14] Pan C. A new effective pre-conditioned Gauss-Seidel iteration method[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2011,**32**(4):267-273.

[15] 林 群. 微分方程数值解法基础教程(第二版)[M]. 北京:科学出版社,2003.(LIN Qun. *Basic Course of Numerical Methods for Differential Equations (Second Edition)*[M]. Beijing: Science Press, 2003.(in Chinese))

[16] 谢冬秀,雷纪刚,陈桂芝. 矩阵理论及方法[M]. 北京:科学出版社,2012.(XIE Dong-xiu, LEI Ji-gang, CHEN Gui-zhi. *Matrix Theory and Methodology* [M]. Beijing: Science Press, 2012.(in Chinese))

Condition number and preprocessing of the finite element equation of two point boundary value problems with cubic Lagrange shape function

ZHANG Heng

(School of Electronic and Information Engineering, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing 350300, China)

Abstract: Solving large sparse ill-conditioned linear equations is very important in scientific computing and engineering applications. The key to solve the problem is reducing the condition number by preprocessing. The finite element system formed in solving two-point boundary value problems of integral form using the finite element method based on cubic Lagrange shape functions is converted into a system of ill-conditioned seven diagonal equations, and the condition number of the system was analyzed by studying the special structure of the equation, and the factor causing ill-conditioning was found. The big norm part of the coefficient matrix was decomposed into an assemble of several simple matrices. The preconditioner was obtained based on the decomposition, and performance analysis of the preconditioner was given in a quantitative manner. The results of analysis show that the condition number is close to 1 after pretreatment without causing more computation.

Key words: ill-conditioned seven diagonal equations; special structure ; condition number; preconditioner

引用本文/Cite this paper:

张 衡. 两点边值问题 3 次 Lagrange 形函数有限元方程的条件数和预处理[J]. 计算力学学报,2017,**34**(5):672-676.

ZHANG Heng. Condition number and preprocessing of the finite element equation of two point boundary value problems with cubic Lagrange shape function[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017,**34**(5):672-676.