

一种具有新型动力放大器压电悬臂梁俘能器 计算模型和解析解

唐礼平, 王建国*

(合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘要: 为了提高压电振动能量俘获的效率, 提出了一种新型的压电悬臂梁俘能器。新的压电俘能器在悬臂梁固定端安装一个新型动力放大器系统, 另一端带有一个有限尺寸的质量块。新型动力放大器由平移及转动约束的弹簧-质量块系统组成。考虑有限尺寸质量块的质量分布效应和平移及转动约束的弹簧刚度等结构参数的影响, 利用广义 Hamilton 原理, 针对带有新型动力放大器的压电式悬臂梁俘能器, 建立了分布参数型运动微分方程, 获得了相应的特征函数, 分析了自振频率和能量俘获效果。分析结果表明, 考虑质量块偏心距和转动惯量可提高能量俘获效率的预测精度; 合理选择动力放大器的平移及转动弹簧刚度可提高能量俘获的效率, 降低俘能器的共振频率。

关键词: 压电悬臂梁; 能量俘获; 新型动力放大器; 分布参数; 解析解

中图分类号: O39

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2017)05-0650-07

1 引言

压电材料在环境监测、结构振动控制、健康监测和振动能量俘获等领域得到广泛应用^[1-3]。随着小尺寸、低能耗的微电子设备技术的不断发展, 化学电池存在尺寸大、寿命有限和需要定期更换等缺点。压电振动俘能器能将环境中的振动能量转换为电能, 较好地解决了电池体积大、寿命短以及需定期更换等弊端^[4-7]。传统的压电俘能器大多采用悬臂梁结构, Mitcheson 等^[8]研究发现, 在悬臂梁的自由端增加一个质块可达到提高能量转换的效率, 并降低共振频率的效果。Roundy 等^[9]将模型简化为质量-弹簧系统, 建立理论模型, 得到了频率、电压和功率的表达式。Erturk 等^[10,11]针对压电悬臂梁提出了分布参数型力电耦合模型, 推导了输出电压、电流和功率的解析表达式。Kim 等^[12]考虑了质块转动惯量的影响, 使建立的理论模型具有更好的精度。He 等^[13]考虑了末端位移与质块质心位移的差异, 以及质量块惯性力作用点与梁的末端位置差异, 建立了悬臂式压电俘能器模型, 提高了预测俘能器输出电压的精度。Aldraihem 等^[14,15]将

常规的悬臂梁模型进行了改进, 在悬臂梁固定端和振动基础之间安装一个动力放大器, 动力放大器由竖向平移弹簧和质量块组成, 建立了具有动力放大器的悬臂梁俘能器的数学模型, 较精确地预测了输出功率。

本文提出一种新的压电悬臂梁俘能器, 该俘能器在压电悬臂梁固定端安装由有限尺寸的质量块、竖向平移弹性约束及转动弹性约束组成的新型动力放大器, 在自由端安装有限尺寸的质量块。与文献^[14,15]不同的是, 新型动力放大器增加了一个转动弹性约束。利用广义 Hamilton 原理, 建立了新型压电式悬臂梁俘能器的分布参数型运动微分方程, 导出了相应的特征函数, 分析了自振频率和能量俘获效果。

2 俘能器的建模

2.1 俘能器的几何模型

图 1 为带有动力放大器的悬臂式压电俘能器的模型。该模型由金属基板、压电层、左端的动力放大器和自由端质量块组成。动力放大器由一个有限尺寸的质量块 (M_f)、竖向平移弹性约束 (k_f) 及转动弹性约束 (k_R) 组成, 并固定在可以振动的基座上。

2.2 无阻尼运动微分方程

图 2 是在外界激励作用下振动的示意图, M

收稿日期: 2016-06-10; 修改稿收到日期: 2016-11-20.

基金项目: 国家自然科学基金(11172087)资助项目.

作者简介: 唐礼平(1984-), 男, 博士生;

王建国*(1954-), 男, 博士, 教授

(E-mail: jianguow@hfut.edu.cn).

和 M_f 分别为梁的端部质块和放大器质块, k_f 和 k_R 分别为竖向和扭转弹簧的刚度, L 为压电梁的长度, t_p 为粘附在金属基板上的压电层的厚度, t_b 为金属基板的厚度, l_0 和 h_0 分别为端部质块 M 在 x - z 坐标内的长度和高度, l_{0f} 和 h_{0f} 分别为放大器质块 M_f 在 x - z 坐标内的长度和高度, M 和 M_f 的宽度与压电梁的宽度均为 b , $e = l_0/2$ 和 $e_f = l_{0f}/2$ 为 M 和 M_f 的偏心距。

压电梁上任意一点在 Z 方向上的位移为

$$w(x, t) = w_r(x, t) + w_b(x, t) \quad (1)$$

式中 $w_r(x, t)$ 为 x - z 坐标系中压电梁的横向位移, $w_b(x, t)$ 为 x - z 坐标系相对于 X - Z 坐标系的位移。

俘能系统的动能

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_t \int_0^L \left(\frac{\partial w_r}{\partial t} + \frac{\partial w_b}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial [w_r(L, t) + e w_r'(L, t)]}{\partial t} + \frac{\partial w_b(L, t)}{\partial t} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} M_f \left(\frac{\partial [w_r(0, t) - e_f w_r'(0, t)]}{\partial t} + \frac{\partial w_b(0, t)}{\partial t} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} J \left[\frac{\partial w_r'(L, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_b'(L, t)}{\partial t} \right] + \\ & \frac{1}{2} J_f \left[\frac{\partial w_r'(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial w_b'(0, t)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

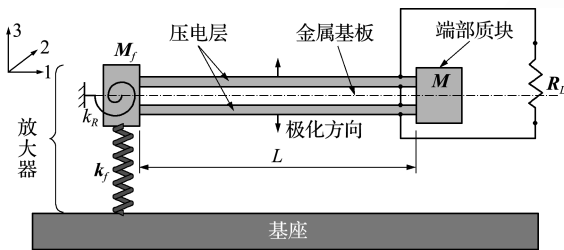


图1 带有放大器的压电俘能器模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the cantilevered piezoelectric energy harvester with a magnifier

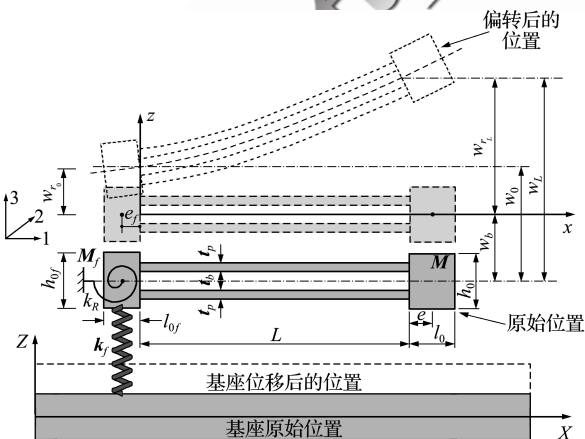


图2 带有放大器的压电俘能器振动前后的位置

Fig. 2 Original and deflected positions of the cantilevered piezoelectric energy harvester with magnifier

式中 $m_t = m_b + 2m_p$ 为压电梁单位长度上的等效质量, J 为自由端质块 M 的转动惯量, J_f 为固端质块 M_f 的转动惯量。

俘能系统的势能

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} k_f w_r^2(0, t) + \frac{1}{2} k_R w_r'^2(0, t) + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \left[E_t I_t \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} \right) - c_{11}^E b d_{31} R_L \left(\frac{dQ_3}{dt} \right) \times \right. \\ & \left. \left(h + \frac{t_p}{2} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $E_t I_t = E_b I_b + \frac{2}{3} c_{11}^E b (3h^2 t_p + 3h t_p^2 + t_p^3)$, 为压电梁的等效弯曲刚度, $E_b I_b$ 是金属基板的弯曲刚度, c_{11}^E 是压电材料的杨氏模量, d_{31} 为压电材料的力电耦合系数, t_p 为压电层的厚度, R_L 为外加电阻, Q_3 为压电层上电量变化, $h = t_b/2$ 。

俘能系统的电能

$$\begin{aligned} W_e = & \frac{1}{2} \int_0^L c_{11}^E b d_{31} R_L \left(\frac{dQ_3}{dt} \right) \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} \right)^2 \left(h + \frac{t_p}{2} \right) dx + \\ & b L \epsilon_{33}^S \left(\frac{R_L^2}{4 t_p} \right) \left(\frac{dQ_3}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^T - d_{31}^2 c_{11}^E$ 为常应变状态下压电材料的介电常数, ϵ_{33}^T 为常应力状态下压电材料的介电常数。

根据广义 Hamilton 原理:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_e + \delta W) dt = 0 \quad (5)$$

式中 $\delta W = -R_L (dQ_3/dt) \delta Q_3$, 为外力做功。

将方程(2~4)代入方程(5), 利用 δw_r 和 δQ_3 的任意性, 得到无阻尼状态的分布参数型力电耦合运动微分方程:

$$\begin{aligned} m_t \left[\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} \right] + E_t I_t \left[\frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} \right] - \\ \Gamma \left(\frac{dQ_3}{dt} \right) \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = \\ - [m_t + M_f \delta(x) + M \delta(x-L)] \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\int_0^L \Gamma \left(\frac{\partial^3 w_r}{\partial x^2 \partial t} \right) dx + \frac{C_p}{2} R_L^2 \left(\frac{d^2 Q_3}{dt^2} \right) = -R_L \left(\frac{dQ_3}{dt} \right) \quad (6b)$$

式中 $\Gamma = c_{11}^E b d_{31} R_L (h + t_p/2)$, $C_p = b L \epsilon_{33}^S / t_p$, $\delta(x)$ 为 Dirac 函数。对应悬臂梁的边界条件为

$$\begin{aligned} \left[E_t I_t \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} - k_R w_r' - J_f \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} + M_f e_f \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} - \right. \\ \left. M_f e_f^2 \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} \right]_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\left[M_f \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + E_t I_t \frac{\partial^3 w_r}{\partial x^3} - M_f e_f \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} + k_f w_r \right]_{x=0} = 0 \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \left[E_t I_t \frac{\partial^3 w_r}{\partial x^3} - M \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} - M e \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} \right]_{x=L} &= 0 \quad (7c) \\ \left[E_t I_t \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} + J \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} + M e \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} + M e^2 \frac{\partial^2 w_r'}{\partial t^2} \right]_{x=L} &= 0 \quad (7d) \end{aligned}$$

在无阻尼状态下,不考虑力电耦合,压电双晶梁自由振动的运动微分方程可以表示为

$$E_t I_t \left[\frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} \right] + m_t \left[\frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (8)$$

利用分离变量法,假设方程(8)的解为

$$w_r(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (9)$$

式中 $\phi_r(x)$ 为第 r 阶的振型函数, $\eta_r(t)$ 为第 r 阶模态的响应函数。

引入无量纲系数 $\bar{x} = x/L$, 并将方程(9)代入方程(8)可得振型函数的通解为

$$\begin{aligned} \phi_r(\bar{x}) &= A_1 \sin \lambda_r \bar{x} + A_2 \cos \lambda_r \bar{x} + \\ &A_3 \sinh \lambda_r \bar{x} + A_4 \cosh \lambda_r \bar{x} \quad (10) \end{aligned}$$

根据 $x=0$ 和 $x=L$ 处的边界条件,由方程(7)可得

$$\begin{aligned} E_t I_t \phi_r''(0) - M_f e_f \omega_r^2 \phi_r(0) - k_R \phi_r'(0) + \\ (J_f + M_f e_f^2) \omega_r^2 \phi_r'(0) = 0 \quad (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t I_t \phi_r'''(0) - M_f \omega_r^2 \phi_r(0) + M_f e_f \omega_r^2 \phi_r'(0) + \\ k_f \phi_r(0) = 0 \quad (11b) \end{aligned}$$

$$E_t I_t \phi_r'''(L) + M \omega_r^2 \phi_r(L) + M e \omega_r^2 \phi_r'(L) = 0 \quad (11c)$$

$$E_t I_t \phi_r''(L) - M e \omega_r^2 \phi_r(L) - (J + M e^2) \omega_r^2 \phi_r'(L) = 0 \quad (11d)$$

式中 ω_r 为俘能器的第 r 阶固有频率, $\omega_r^2 = \lambda_r^4 (E_t I_t) / (m_t L^4)$ 。将方程(10)代入方程(11),可求得包含振型函数中待定常数 A_1, A_2, A_3 和 A_4 四个未知量的齐次线性代数方程组。由于待定常数 A_1, A_2, A_3 和 A_4 不可能同时为 0,故其系数行列式等于 0,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

振型函数的表达式可以写为

$$\begin{aligned} \phi_r(\bar{x}) &= A_r \left[\sin \lambda_r \bar{x} - \frac{\Delta_1}{\Delta} \cos \lambda_r \bar{x} - \right. \\ &\left. \frac{\Delta_2}{\Delta} \sinh \lambda_r \bar{x} - \frac{\Delta_3}{\Delta} \cosh \lambda_r \bar{x} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

式中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_r}{L}, \alpha_1 = k_R - (J_f + M_f e_f^2) \omega_r^2, \alpha_2 = M_f e_f \omega_r^2,$$

$$\alpha_3 = E_t I_t, \alpha_4 = M/m_t, \alpha_5 = M_f \omega_r^2 - k_f$$

$$\alpha_6 = (J_M + M e^2)/m_t, a_{11} = \alpha_0 \alpha_1, a_{12} = \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_0^2$$

$$a_{13} = \alpha_0 \alpha_1, a_{14} = \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_0^2, a_{21} = -\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_0^3$$

$$a_{22} = \alpha_5, a_{23} = -\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_0^3, a_{24} = \alpha_5$$

$$a_{31} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 - 1) \cos \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \sin \lambda_r$$

$$a_{32} = (-e \alpha_4 \alpha_0^2 + 1) \sin \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \cos \lambda_r$$

$$a_{33} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 + 1) \cosh \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \sinh \lambda_r$$

$$a_{34} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 + 1) \sinh \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \cosh \lambda_r$$

$$a_{41} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 + 1) \sin \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \cos \lambda_r$$

$$a_{42} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 + 1) \cos \lambda_r - \alpha_0 \alpha_4 \sin \lambda_r$$

$$a_{43} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 - 1) \sinh \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \cosh \lambda_r$$

$$a_{44} = (e \alpha_4 \alpha_0^2 - 1) \cosh \lambda_r + \alpha_0 \alpha_4 \sinh \lambda_r$$

A_r 为振幅,振型函数的正交性条件为

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_m(\bar{x}) m_t \phi_n(\bar{x}) d\bar{x} + \phi_m(1) M \phi_n(1) + \\ \phi_m'(1) M e \phi_n'(1) + \phi_m'(1) (J + M e^2) \phi_n'(1) + \\ \phi_m'(1) M e \phi_n(1) + \phi_m(0) M_f \phi_n(0) - \\ \phi_m(0) M_f e_f \phi_n'(0) + \phi_m'(0) (J_f + M_f e_f^2) \phi_n'(0) - \\ \phi_m'(0) M e_f \phi_n(0) = \begin{cases} \delta_{mn} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

2.3 系统有阻尼的运动方程

本文计算模型分析过程中,考虑了两种阻尼形式,空气阻尼和粘弹性阻尼,系统在阻尼力作用下的分布参数型运动方程可以表示为

$$\begin{aligned} m_t \left[\frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2} \right] + E_t I_t \left[\frac{\partial^4 w_r}{\partial x^4} \right] + C_a \left[\frac{\partial w_r}{\partial t} \right] + C_s I_t \left[\frac{\partial^3 w_r}{\partial x^4 \partial t} \right] - \\ \Gamma \left[\frac{dQ_3}{dt} \right] \left[\frac{d\delta(x)}{dx} - \frac{d\delta(x-L)}{dx} \right] = - [m_t + \\ M_f \delta(x) + M \delta(x-L)] \left[\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \right] - C_a \left[\frac{\partial w_b}{\partial t} \right] \quad (15a) \end{aligned}$$

$$\int_0^L \Gamma \left[\frac{\partial^3 w_r}{\partial x^2 \partial t} \right] dx + \frac{C_p}{2} R_L^2 \left[\frac{d^2 Q_3}{dt^2} \right] = -R_L \left[\frac{dQ_3}{dt} \right] \quad (15b)$$

式中 C_a 为空气阻尼系数, $C_s I_t$ 为等效的粘弹性阻尼系数。

利用方程(14)给出的振型函数及其正交性条件,方程(15)可转化为常微分方程。假设 $\Psi_n =$

$$\begin{aligned} \Gamma \frac{d\phi_n(x)}{dx} \Big|_{x=L}, \text{ 可得:} \\ \frac{d^2 \eta_n(t)}{dt^2} + 2\zeta_n \omega_n \frac{d\eta_n(t)}{dt} + \omega_n^2 \eta_n(t) - \Psi_n \left[\frac{dQ_3}{dt} \right] = f_n(t) \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \frac{d\eta_n(t)}{dt} + \frac{C_p R_L^2}{2} \frac{d^2 Q_3}{dt^2} + R_L \frac{dQ_3}{dt} = 0 \quad (16b)$$

式中 $f_n(t)$ 为简谐振动状态下外荷载的相应函数,可表示为

$$f_n(t) = - \left[\frac{\partial^2 \omega_b}{\partial t^2} \right] \left[m_t \int_0^L \phi_n(x) dx + M_f \phi_n(0) + M \phi_n(L) \right] - C_a \left[\frac{\partial \omega_b}{\partial t} \right] \int_0^L \phi_n(x) dx \quad (17)$$

在简谐振动状态下,假设激励为

$$\omega_b(x, t) = \phi_b e^{j\omega t} \quad (18)$$

荷载函数的幅值 F_n 的表达式为

$$F_n = \omega^2 \phi_b \left[m_t \int_0^L \phi_n(x) dx + M_f \phi_n(0) + M \phi_n(L) \right] - j\omega \phi_b C_a \int_0^L \phi_n(x) dx \quad (19)$$

在系统稳态响应下可得

$$v(t) = -R_L \cdot j\omega \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\Psi_n F_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega_n \omega} \right] / \left[\frac{C_p}{2} R_L^2 \omega - jR_L + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \Psi_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega_n \omega} \right] e^{j\omega t} \quad (20)$$

$$P(t) = v^2(t) / R_L \quad (21)$$

3 数值分析结果与讨论

以一根均匀的压电梁为例,利用方程(20,21),研究新型压电俘能器的性能。相关的物理参数列入表1。

当 k_R 趋向无穷大时,本文提出的俘能器模型类似于 Aladwani^[15] 的模型。但是在 Aladwani^[15] 的研究中,忽略了自由端质块 M 的偏心距 e 和转动惯量 J 对整个结构振动特性的影响。

当 k_R 趋向无穷大,并且取 $M_f = M = 1.5 \text{ g}$, $e = e_f = 0$, $J = J_f = 0$ 时,计算模型和与 Aladwani^[15] 相同,计算结果与 Aladwani^[15] 的结果基本一致, $P_{\max} = 10.194 \text{ mW}$ (10.2 mW), $f = 28.535 \text{ Hz}$ (29.160 Hz),括号中数值是 Aladwani^[15] 的结果。

表1 俘能器几何参数和材料参数^[15]

Tab.1 Geometric and material properties of the energy harvester^[15]

符号	参数值	符号	参数值
m_t	96 g/m	E_b	20 GPa
b	20 mm	k_f	$k_f = M_f \omega_{n_1}^2$
L	50 mm	d_{31}	$-320 \times 10^{-12} \text{ C/N}$
t_p	0.2 mm	ϵ_{33}^T	$3.98 \times 10^{-8} \text{ F/m}$
t_b	0.2 mm	ζ_n^u	0.0163, 0.0026, 0.0009
M_f	1.5 g	ζ_n^s	0.0037, 0.0234, 0.0655
c_{11}^E	61 GPa		

注: ω_{n_1} 为 $M = 1.5 \text{ g}$, $M_f = 0$, $k_f \rightarrow \infty$ 时,压电梁的自然频率。

3.1 扭转刚度系数 k_R 的影响

为了考察扭转刚度系数 k_R 对输出功率幅值的影响,取自由端质块的质量为 $M = 1.5 \text{ g}$, 偏心距 $e = 0.05 L$, 放大器质块偏心距 $e_f = 0.05 L$, 质量分别为 $M_f = M, 5M$ 和 $10M$, 外界激励为加速度为 1 g 的正弦振动, R_L 分别取 $54 \text{ k}\Omega$, $30 \text{ k}\Omega$ 和 $24 \text{ k}\Omega$ 。

在第1阶振动模式下,由表2和图3可以看出, $M_f = M = 1.5 \text{ g}$ 时, $P_{\max} = 28.756 \text{ mW}$, 对应的 $k_R = 0.0016 k_f$, 与 k_R 趋向无穷大时功率幅值相比 (Aladwani^[15] 提出的动力放大器), 功率幅值增加了 162.37% ; 由表3和图4可以看出, $M_f = 5M = 7.5 \text{ g}$ 时, $P_{\max} = 25.582 \text{ mW}$, 对应的 $k_R = 0.0012 k_f$, 与 k_R 趋向无穷大时功率幅值相比, 功率幅值增加了 29.878% ; 由表4和图5可以看出, $M_f = 10M = 15 \text{ g}$ 时, $P_{\max} = 30.310 \text{ mW}$, 对应的 $k_R = 0.0015 k_f$, 与 k_R 趋向无穷大时功率幅值相比, 功率幅值增加了 10.350% 。由表2~表4和图3~图5可以看出, 功率幅值随 k_R/k_f 值的变大先增大后减小; 共

表2 $M_f = M, R_L = 54 \text{ k}\Omega$ 时第1阶模态输出功率幅值最大值和共振频率

Tab.2 Maximum power output peak amplitude and the resonant frequency of the first vibration mode when $M_f = M, R_L = 54 \text{ k}\Omega$

k_R/k_f	f/Hz	P/mW
0.0005	18.405	21.437
0.001	21.970	27.112
0.0016	23.930	28.756
0.01	27.600	16.980
0.1	28.435	11.022
1	28.435	11.022
10	28.445	10.966
$k_R \rightarrow \infty$	28.445	10.960

表3 $M_f = 5M, R_L = 30 \text{ k}\Omega$ 时第1阶模态输出功率幅值最大值和共振频率

Tab.3 Maximum power output peak amplitude and the resonant frequency of the first vibration mode when $M_f = 5M, R_L = 30 \text{ k}\Omega$

k_R/k_f	f/Hz	P/mW
0.0005	34.865	23.369
0.0012	40.590	25.582
0.005	44.250	22.412
0.01	44.835	21.171
0.1	45.350	19.854
1	45.405	19.713
10	45.410	19.697
$k_R \rightarrow \infty$	45.410	19.697

表 4 $M_f=10\text{ M}$, $R_L=24\text{ k}\Omega$ 时第 1 阶模式
输出功率幅值最大值和共振频率

Tab. 4 Maximum power output peak amplitude
and the resonant frequency of the first
vibration mode when $M_f=10\text{ M}$, $R_L=24\text{ k}\Omega$

k_R/k_f	f/Hz	P/mW
0.0005	43.175	26.484
0.0015	48.755	30.310
0.005	50.635	28.957
0.01	51.020	28.299
0.1	51.350	27.552
1	51.385	27.476
10	51.390	27.468
$k_R \rightarrow \infty$	51.390	27.467

振频率随 k_R/k_f 值增大逐渐增大;当 k_R/k_f 的比值大于 0.1 以后,功率幅值和共振频率相差很小,幅值曲线几乎完全重合。

当 k_R/k_f 较小,介于(0.001~0.002)之间时,对俘能器输出功率增大效果明显。随着 M_f/M 增大,改变 k_R/k_f 比值,对输出功率的增大效果减弱。

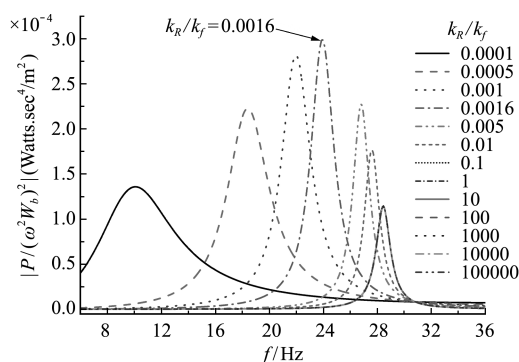


图 3 $M_f=M$, $R_L=54\text{ k}\Omega$ 时不同 k_R/k_f 取值下的功率幅值曲线
Fig. 3 Curve of the peak amplitude of the electrical power output
bases on different values of k_R/k_f when $M_f=M$, $R_L=54\text{ k}\Omega$

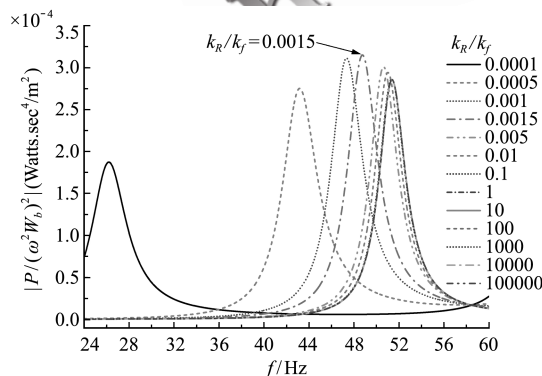


图 5 $M_f=10\text{ M}$, $R_L=24\text{ k}\Omega$ 时不同 k_R/k_f 取值下的功率幅值曲线
Fig. 5 Curve of the peak amplitude of the electrical power output
for different values of k_R/k_f when $M_f=10\text{ M}$, $R_L=24\text{ k}\Omega$

因此合理地选择 k_R/k_f 和 M_f/M , 可以提高能量俘获的效率。

3.2 偏心距 e 的影响

考察自由端质块 M 的偏心距 e 对输出功率幅值的影响,分别取质量为 $M=1.5\text{ g}$, 3 g 和 4.5 g , 偏心距 $e=0.05\sim 0.25\text{ L}$, 放大器质块偏心距 $e_f=0.05\text{ L}$, 质量为 $M_f=1.5\text{ g}$, 扭转刚度系数 $k_R=k_f=M_f\omega_{n_1}^2$, 外界激励为加速度为 1 g 的正弦振动, R_L 分别取 $54\text{ k}\Omega$, $65\text{ k}\Omega$ 和 $71\text{ k}\Omega$ 。

对应于第一共振频率,输出功率峰值 $P_{\max}$ 随 e 值变大而增大,从图 6 可以看出, $M=1.5\text{ g}$, $e=0.25\text{ L}$ 时, $P_{\max}=14.277\text{ mW}$, 比偏心距 $e=0.05\text{ L}$ 时增大了 29.53% , 而峰值共振频率提前了 1.53% ; 从图 7 可以看出, $M=3\text{ g}$, $e=0.25\text{ L}$ 时, $P_{\max}=24.854\text{ mW}$, 比 $e=0.05\text{ L}$ 时增大了 25.69% , 而峰值共振频率提前了 3.13% ; 从图 8 可以看出, $M=4.5\text{ g}$, $e=0.25\text{ L}$ 时, $P_{\max}=34.528\text{ mW}$, 比 $e=0.05\text{ L}$ 时最大功率值增大了 19.18% , 而峰值共振频率提前了 4.41% 。

随 e 值逐渐变大,第二共振频率减小,功率幅值最大值逐渐增大,第一和第二共振频率之间的间

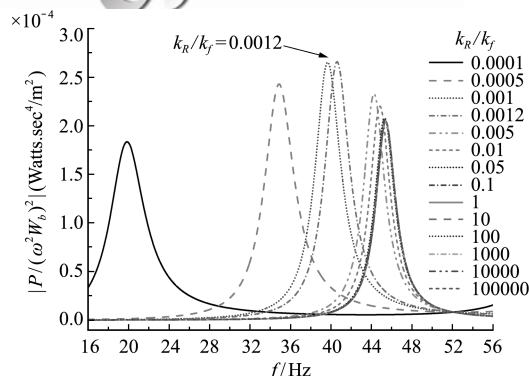


图 4 $M_f=5\text{ M}$, $R_L=30\text{ k}\Omega$ 时不同 k_R/k_f 取值下的功率幅值曲线
Fig. 4 Curve of the peak amplitude of the electrical power output
for different values of k_R/k_f when $M_f=5\text{ M}$, $R_L=30\text{ k}\Omega$

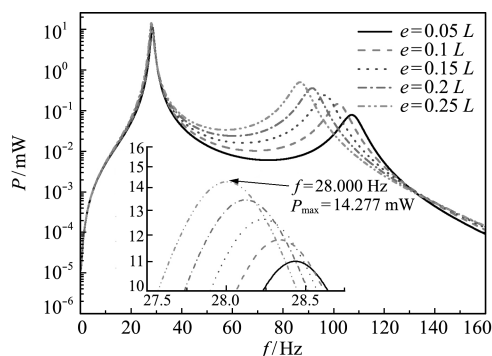
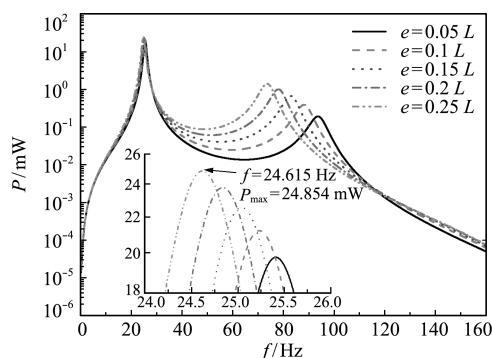
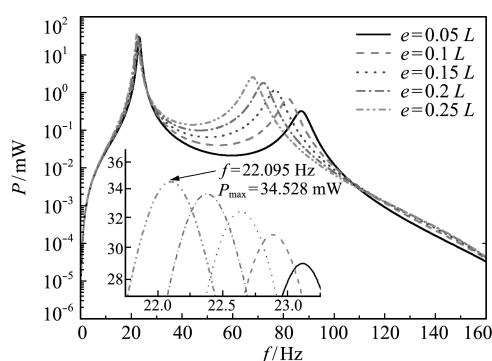


图 6 $M=1.5\text{ g}$, $R_L=54\text{ k}\Omega$ 时的功率幅值曲线

Fig. 6 Curve of the peak amplitude of the power output for
different values of e when $M=1.5\text{ g}$, $R_L=54\text{ k}\Omega$

图7 $M=3\text{ g}$, $R_L=65\text{ k}\Omega$ 时功率幅值曲线Fig. 7 Curve of the peak amplitude of the power output for different values of e when $M=3\text{ g}$, $R_L=65\text{ k}\Omega$ 图8 $M=4.5\text{ g}$, $R_L=71\text{ k}\Omega$ 时功率幅值曲线Fig. 8 Curve of the peak amplitude of the power output for different values of e when $M=4.5\text{ g}$, $R_L=71\text{ k}\Omega$

隔变小。当 M 取值增大时,俘能器的输出功率幅值增大效果随之增强。

4 结 论

本文提出了一种新的压电悬臂梁俘能器,该俘能器在固定端安装由有限尺寸的质量块、竖向平移弹性约束及转动弹性约束组成的新型动力放大器,在自由端安装有限尺寸的质量块,与文献[14,15]不同的是新型动力放大器增加了一个转动弹性约束。计及悬臂梁质量块的偏心距、转动惯量、弹性及转动弹簧刚度的影响,利用广义 Hamilton 原理,建立了新型压电式悬臂梁俘能器的分布参数型运动微分方程,提出了固定端具有有限尺寸的质量块、竖向平移弹性约束及转动弹性约束组成的动力放大器,而另一端(自由端)具有有限尺寸的质量块的悬臂梁的特征函数,研究了新的压电悬臂梁俘能器能量俘获效果。

当 k_R 趋向无穷大时,忽略了自由端质块 M 的偏心距 e 和转动惯量 J 对整个结构振动特性的影响,本文提出的俘能器数学模型类似于 Aladwani^[15] 提出的数学模型。研究结果表明,考虑质量

块偏心距和转动惯量可提高预测能量俘获效率的精度。通过调整动力放大器的 k_R/k_f 和 M_f/M ,带有新型动力放大器的压电悬臂梁俘能器可以有效地提高能量俘获的效率,降低能量俘获系统的共振频率。

参考文献(References):

- [1] Kim M, Hoegen M, Dugundji J, et al. Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester performance [J]. *Smart Materials and Structures*, 2010, **19**(4): 045023.
- [2] Calio R, Rongala U B, Camboni D, et al. Piezoelectric energy harvesting solutions [J]. *Sensors*, 2014, **14**(3): 4755-4790.
- [3] 钱 锋, 王建国, 逢焕平, 等. 压电智能结构模糊自适应控制(FSLC) [J]. 计算力学学报, 2012, **29**(6): 861-866. (QIAN Feng, WANG Jian-guo, PANG Huan-ping, et al. Fuzzy self-learning control of piezoelectric smart structure [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(6): 861-866. (in Chinese))
- [4] Stephen N G. On energy harvesting from ambient vibration [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **293**(1): 409-425.
- [5] Sodano H A, Inman D J, Park G. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials [J]. *Shock and Vibration Digest*, 2004, **36**(3): 197-205.
- [6] Anton S R, Sodano H A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006) [J]. *Smart Materials and Structures*, 2007, **16**(3): 1-21.
- [7] Dutoit N E, Wardle B L, Kim S G. Design considerations for MEMS-Scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters [J]. *Integrated Ferroelectrics*, 2005, **71**(1): 121-160.
- [8] Mitcheson P D, Green T C, Yeatman E M, et al. Architectures for vibration-driven micropower generators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2004, **13**(3): 429-440.
- [9] Roundy S, Wright P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics [J]. *Smart Materials and Structures*, 2004, **13**(5): 1131-1142.
- [10] Erturk A, Inman D J. A distributed parameter electro-mechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2008, **130**(4): 041002.
- [11] Erturk A, Inman D J. On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and*

- Structures, 2008, **19**(11):1311-1325.
- [12] Kim M, Hoegen M, Dugundji J, et al. Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester performance [J]. *Smart Materials and Structures*, 2010, **19**(4):045023.
- [13] He X F, Wen Z Y, Wen Z Q. Modeling and application of piezoelectric vibration-based power generator [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2009, **17**(6):1436-1441.
- [14] Aldraihem O, Baz A. Energy harvester with a dynamic magnifier[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2011, **22**(6):521-530.
- [15] Aladwani A, Aldraihem O, Baz A. A distributed parameter cantilevered piezoelectric energy harvester with a dynamic magnifier[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2014, **21**(7):566-578.

Modeling and analytical solution of piezoelectric cantilevered energy harvester with a new dynamic magnifier

TANG Li-ping, WANG Jian-guo*

(School of Civil and Hydraulic Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: In order to improve the efficiency of piezoelectric vibration energy harvesting, a cantilevered piezoelectric vibration energy harvester is proposed. The new cantilevered piezoelectric energy harvester consists of a new dynamic magnifier (a translation- and rotation-restrained spring-mass system) installed at the restrained end and a tip mass at the free end. Taking into account the translation and rotation-restrained stiffness, and the distribution effect of the tip mass over a finite length, a distributed parameter model of piezoelectric cantilevered energy harvesters is developed by using the generalized Hamilton's principle. The eigen-function and natural frequency formulation of the presented model are obtained. The efficiency of energy harvesting is investigated. The analytical results show that the accuracy of predicting energy harvesting efficiency can be improved by considering the eccentricity of mass and moment of inertia. A reasonable selection of the translational and rotational spring stiffness can improve energy harvesting efficiency, and reduce the resonant frequency of the energy harvesting system.

Key words: piezoelectric cantilevered beam; energy harvesting; new dynamic magnifier; distributed parameter; analytical solution

引用本文/Cite this paper:

唐礼平, 王建国. 一种具有新型动力放大器压电悬臂梁俘能器计算模型和解析解[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(5):650-656.

TANG Li-ping, WANG Jian-guo. Modeling and analytical solution of piezoelectric cantilevered energy harvester with a new dynamic magnifier[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(5):650-656.