

索-梁组合结构主共振响应的时滞反馈控制

彭剑^{*1}, 李禄欣¹, 向明姣¹, 赵跃宇²

(1. 湖南科技大学 土木工程学院, 湘潭 411201; 2. 湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082)

摘要:基于时滞加速度反馈控制策略对索-梁组合结构进行振动控制。根据 Hamilton 原理推导了索-梁组合结构非线性振动控制方程, 运用多尺度法得到时滞反馈作用下索-梁组合结构主共振的一阶近似解, 得出系统响应与控制参数的关系以及响应峰值和临界激励值与时滞参数的表达式。结果表明, 主共振的响应存在多解和跳跃现象, 调节控制增益和时滞值, 可以有效抑制大幅振动。

关键词:时滞反馈; 主共振; 索-梁结构; 振动控制

中图分类号:U443.38; O321

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2017)05-0638-06

1 引言

索和梁这两种结构单元通过一定的连接方式组成不同结构形式的缆索结构体系, 以其受力形式简单、材料力学性能优良、施工方便且跨越能力大等优点, 在实际工程中有着广泛的应用。如土木工程中大跨度斜拉桥的斜拉索和主梁、集装箱起重机的拉索和起重臂及现代化体育场馆的索和梁等都可以简化为索-梁组合结构。随着工程结构向高、轻、大方向发展, 此类结构在外部荷载下的非线性特征凸显。因此, 探究其大幅振动机理以及对其进行振动控制已迫在眉睫。

索-梁耦合系统振动控制已受到愈来愈多的关注, 正在逐渐形成新的研究热点。然而, 目前已有研究大都忽略了由拉索固有柔性和梁固有弹性带来的耦合力学连接条件, 特别是在拉索上安装阻尼器后, 不能完全确定索-梁组合结构中的模态函数, 建立的耦合力学模型也相对简单, 非线性动力学研究内容不够深入, 振动控制主要集中在拉索的控制方面。Zhou 等^[1]对支承运动作用的拉索振动控制进行了研究。梁栋等^[2]研究了索梁动力耦合对 MR 阻尼器减振效果的影响^[2]。文献[3, 4]从主动刚度控制方面对索进行了研究。这些研究较少涉及受控拉索的非线性动力学研究。Susumpow 等^[5]考

虑到在小幅振动范围内, 拉索的横向振动与纵向振动相互耦合, 成功利用拉索在支座附近的纵向振动对拉索的横向振动实施了减振。理论上, 可以直接借鉴这种主动控制理论中的制动器来控制支承运动作用下的拉索大幅振动^[6]。Magaña 等^[7]则从非线性局部控制出发研究了柔性索-梁结构的振动问题。王志奎等^[8]研究了索-梁耦合结构 Hopf 分岔的反控制。可以发现, 对于单索或单梁而言, 其非线性行为以及时滞影响下的振动控制问题是非常复杂的^[9]。很显然, 由斜拉索和梁组成的组合结构更为复杂^[10]。

另一方面, 时滞反馈控制方法在振动控制领域有了较大发展^[11]。本文基于 Hamilton 原理, 精细分析了索-梁的连接条件和边界条件, 建立了比较完备的索-梁组合结构面内运动非线性方程, 进而利用时滞反馈控制对索-梁组合结构的大幅振动进行控制。着重探讨时滞对受控系统的影响, 从而为索-梁组合结构的振动控制提供一种新思路。

2 数学模型

如图 1 所示的索-梁组合结构受控系统, 索和梁端的锚固端记为 A 和 B, 连接处记为 C, D 点和 E 点, 分别为时滞反馈控制系统中的传感器布点和作动器布点位置, 作动器距离连接处距离为 a 。索的参照系以连接处为坐标原点, 建立如图 1 所示的 $O-X_c Y_c$ 坐标系。梁的参照系以锚固点 B 为原点, 坐标系 $O-X_b Y_b$ 如图 1 所示。 d 表示斜拉索的垂度, l_c 和 l_b 分别表示索长和梁长。 U_c 和 V_c , U_b 和 V_b 分别表示索和梁在各自坐标系下的轴向和面内位移。假设索和梁的应力应变满足胡克定律, 且各

收稿日期: 2016-06-13; 修改稿收到日期: 2016-12-07.

基金项目: 国家自然科学基金(11402085); 国家重点基础研究发展计划(973 计划, 2015CB057702); 湖南省自然科学基金(2017JJ3086); 湖南省研究生科研创新项目(CX2016B544)资助项目.

作者简介: 彭剑^{*} (1982-), 男, 博士, 讲师
(E-mail: pengjian@hnu.edu.cn).

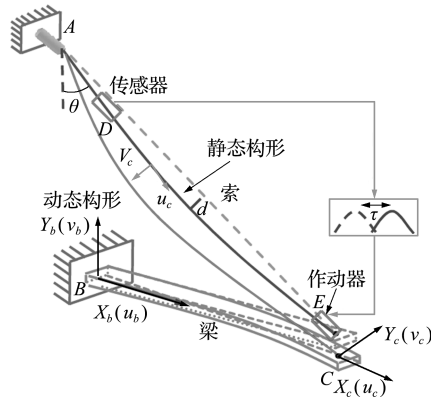


图1 索-梁组合结构振动控制简化模型
Fig.1 Model of vibration control of cable-stayed beam

点受力均匀,索只承受拉力;忽略索的抗弯刚度、抗扭刚度及抗剪刚度;忽略梁的轴向位移,不计梁的非线性。索的轴向应变 ϵ 和梁的应变 e 分别为

$$\begin{aligned}\epsilon &= U'_c + y' V'_c + (U_c'^2 + V_c'^2)/2 \\ e &= U'_b + (U_b'^2 + V_b'^2)/2\end{aligned}\quad (1)$$

式中 $()'$ 表示对 x 的求导。拉索的静态构形 y 的表达式为

$$y = 4d[x_c/l_c - (x_c/l_c)^2] \quad (2)$$

根据 Hamilton 原理,可以得到索-梁组合结构的非线性控制方程:

$$\begin{aligned}m_c \ddot{U}_c + C_u \dot{U}_c &= \frac{\partial}{\partial x} [(H + E_c A_c \epsilon(x, t)) U'_c] \\ m_c \ddot{V}_c + C_v \dot{V}_c - m_c g \cos \theta &= \frac{\partial}{\partial x} \{ [H + E_c A_c \epsilon(x, t)] \times \\ &\quad (y' + V'_c) \} - K \ddot{V}_c(t - \tau) \delta(x - a)\end{aligned}$$

$$m_b \ddot{V}_b + C_{bv} \dot{V}_b + E_b I_b V_b''' = 0 \quad (3)$$

式中 $()'$ 表示对 t 求导, $m_{c,b}$ 分别表示拉索(梁)的单位长度质量线重, C_u 和 C_v 表示索单位长度的粘性阻尼系数, C_{bv} 为梁单位长度的粘性阻尼系数同, g 为重力加速度, θ 为拉索的倾斜角, H 为拉索的初始轴力, $E_{c,b}$ 分别表示拉索(梁)的弹性模量, A_c 为拉索的横截面积, I_b 为梁横截面的惯性矩, K 为控制增益, τ 为控制系统的时滞量。

垂度 d 表示为

$$d = m_c g l_c^2 \cos \theta / 8 H \quad (4)$$

因此,系统的无量纲化方程为^[10]

$$\begin{aligned}\ddot{v}_c - \frac{1}{\omega_c^2} [v'_c + \alpha(b y'_c + v'_c) \hat{\epsilon}^*(t)]' &= \\ -k \ddot{v}(t - \tau) \delta(x - a) \\ \ddot{v}_b + \frac{1}{\omega_b^4} V_b''' &= 0 \\ \hat{\epsilon}^*(t) &= v_b(1, t) \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad \int_0^1 [b y' v'_c + \frac{1}{2} v_c'^2] dx_c\end{aligned}\quad (5)$$

采用 Galerkin 方法离散时滞微分方程组(5),设

$$\begin{aligned}v_c(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{ci}(x) q_i(t) \\ v_b(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{bi}(x) q_i(t)\end{aligned}\quad (6)$$

式中 $\phi_{ci}(x)$ 和 $\phi_{bi}(x)$ 分别为索和梁的振型函数, $q_i(t)$ 为整体的第 i 阶模态振动函数。将方程(6)代入系统方程(5),并考虑外部荷载作用,可得

$$\begin{aligned}\ddot{q}_n(t) + \mu_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) + \sum_{i,j} \Lambda_{nij} q_i q_j + \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \Gamma_{nijk} q_i(t) q_j(t) q_k(t) &= F_n \cos(\Omega t) - k_n \ddot{q}_n(t - \tau)\end{aligned}\quad (7)$$

式中 ξ_c 和 ξ_b 分别为索和梁的结构阻尼比, F_n 为外激励幅值, Ω 为外激励频率, f_c 和 f_b 分别为作用在索和梁上的外部荷载,且有

$$\begin{aligned}\mu_n &= (\xi_c \int_0^1 \phi_{cn}^2 dx + \xi_b J \int_0^1 \phi_{bn}^2 dx) / M_n \\ M_n &= \int_0^1 \phi_{cn}^2 dx_c + J \int_0^1 \phi_{bn}^2 dx_b \\ \Lambda_{nij} &= - (3 \alpha b \int_0^1 \phi'_{cn} \phi'_{ci} \phi'_{cj} dx + 4 \sin \theta \cos \theta \times \\ &\quad \alpha \int_0^1 \phi'_{cn} \phi'_{ci} \phi'_{cj} \phi'_b(1) dx) / 2 M_n \omega_c^2 \\ \Gamma_{nijk} &= - (\alpha \int_0^1 \phi'_{cn} \phi'_{ci} \phi'_{cj} \phi'_{ck} dx) / 2 M_n \omega_c^2 \\ F_n &= - (\int_0^1 f_c \phi_{cn} dx + J \int_0^1 f_b \phi_{bn} dx) / M_n \\ \omega_n &= \omega_2 / \omega_1, \quad k_n = \phi_{cn}(a) K, \quad J = m_b l_b^3 / m_c l_c^3\end{aligned}$$

3 线性稳定性分析

将方程(7)线性化,可得

$$\ddot{q}_n(t) + \mu_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = -k_n \ddot{q}_n(t - \tau) \quad (8)$$

方程(8)的解由以下形式给出:

$$q_n = A_n e^{(\xi_n + i \lambda_n) t} \quad (9)$$

式中 A_n 为振幅, ξ_n 为阻尼系数, λ_n 为响应频率。将方程(9)代入方程(8),分离实虚部并令其分别等于0,则有

$$\begin{aligned}\lambda_n(2 \xi_n + \mu_n) e^{\xi_n \tau} - k_n [(\xi_n^2 - \lambda_n^2) \sin(\lambda_n \tau) - \\ 2 \xi_n \lambda_n \cos(\lambda_n \tau)] = 0\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}(\lambda_n^2 - \xi_n^2 - \mu_n \xi_n - \omega_n^2) e^{\xi_n \tau} - k_n [(\xi_n^2 - \lambda_n^2) \cos(\lambda_n \tau) + \\ 2 \xi_n \lambda_n \sin(\lambda_n \tau)] = 0\end{aligned}\quad (11)$$

令 $\xi_n = 0$, 代入方程(10,11)可得线性稳定性的边界^[11]

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} = \frac{\hat{\tau}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \hat{\lambda}_{nq}} \left[\tan^{-1} \frac{\hat{\lambda}_{nq} \mu_n}{\hat{\lambda}_{nq}^2 - \omega_n^2} + j\pi \right] \quad (j=0, 1, \dots) \\ \hat{k}_n = \pm \sqrt{(1 - \omega_n^2 / \hat{\lambda}_{nq}^2)^2 + (\mu_n / \hat{\lambda}_{nq}^2)^2}\end{aligned}\quad (12)$$

式中 $\hat{\lambda}_{nq}$ 是稳定性边界的临界时滞反馈频率。

考虑梁的第一阶模态 ($n=1$) 时滞反馈的线性自由响应, 图 2(a) 给出了当 $\tau=1.2, \mu_1=0.02$ 时, 最小的两个时滞频率 λ_1 和 λ_2 随着控制增益 k_1 的变化。图 2(b) 呈现了两个时滞频率对应的阻尼比 ξ_1 和 ξ_2 随着 k_1 的变化, 其中梁及索的几何尺寸和材料特性参数如下。梁线重 $m_b=1.6 \times 10^4$ kg/m, 惯性矩 $I_b=2.4$ m⁴, 长度 $l_b=30$ m, 弹性模量 $E_b=3.5 \times 10^{10}$ N/m²。索线重 $m_c=62$ kg/m, 长度 $l_c=95.82$ m, 弹性模量 $E_c=2 \times 10^{11}$ N/m², 截面积 $A_c=7.6 \times 10^{-3}$ m², 倾角 $\theta=18.25$, 索力 $H=4.49$ MN。

注意当 $k_1 \approx 0$ 时, λ_1 的值非常接近第一阶模态固有频率 $\omega_1=1$, 对应的阻尼比 ξ_{11} 和 ξ_{12} 均为负阻尼, 且 $|\xi_{11}| < |\xi_{12}|$ 。因此, 对于小的增益, 第一时滞频率占主导地位梁的平凡时滞响应是稳定的。随着 k_1 增加, λ_1 偏离 ω_1 变得更小, 更为衰弱, 而 k_1 的变化对 λ_2 的影响不大, 但可显著降低对应的阻尼比 ξ_2 。当 $k_1 > 0.3$ 时, 第二时滞频率对应的阻尼比大于第一时滞频率对应的阻尼比, 因此, λ_2 占主导地位。此时, 梁的平凡时滞响应仍然保持稳定。当 k_1 进一步增加, 在 $k_1 \approx 0.45$ 时, ξ_2 从负值变到了正值, 梁的平凡时滞响应失去稳定, 因此, 一个小的扰动会导致非平凡响应。

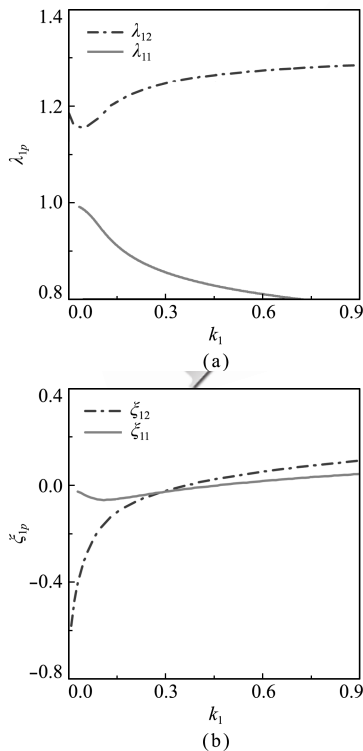


图 2 频率和阻尼比随控制增益的变化曲线

Fig. 2 Frequency and damping variation with control gain

4 主共振分析

采用多尺度法求解受控系统的主共振解, 设方程(7)解的形式为

$$q_n(t; \epsilon) = q_{n0}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon q_{n1}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 q_{n2}(T_0, T_1, T_2) + O(\epsilon^3) \quad (13)$$

式中 $T_i = \epsilon^i t$, ($i=0, 1$), 因此, 在主共振情况下, 调整阻尼项、非线性项及外激励项的系数, 即

$$\mu_n = O(\epsilon^2), \Lambda_{nnn} = O(\epsilon), \Gamma_{nnnn} = O(\epsilon^2), k_n = O(\epsilon^2) \\ F_n = O(\epsilon^2), \Omega = 1 + \epsilon^2 \sigma, \sigma = O(1)$$

式中 $\epsilon (0 < \epsilon \leq 1)$ 为小参数, σ 为调谐参数。将方程(13)代入方程(7), 并令两端 ϵ^0, ϵ^1 和 ϵ^2 的系数相等, 得

$$O(\epsilon^0): D_0^2 q_{n0} + q_{n0} = 0 \quad (14)$$

$$O(\epsilon^1): D_0^2 q_{n1} + q_{n1} = -2D_0 D_1 q_{n0} - \Lambda q_{n0}^2 \quad (15)$$

$$O(\epsilon^2):$$

$$D_0^2 q_{n2} + q_{n2} = -2D_0 D_2 q_{n0} - D_1^2 q_{n0} - 2D_0 D_1 q_{n1} - \\ \mu_n D_0 q_{n0} - 2\Lambda_{nnn} q_{n0} q_{n1} - \Gamma_{nnnn} q_{n0}^3 - \\ k_n D_0^2 q_{n0}(T_0 - \tau, T_1, T_2) + \\ F_n \cos(T_0 + \sigma T_2) \quad (16)$$

方程(14)的解可记为

$$q_{n0} = A_n(T_1, T_2) e^{iT_0} + cc \quad (17)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, cc 代表前面各项的共轭复数。将方程(17)代入方程(15)中, 可得

$$D_0^2 q_{n1} + q_{n1} = -2iD_1 A_n e^{iT_0} - \\ \Lambda_{nnn} (A_n^2 e^{2iT_0} + A_n \bar{A}_n) + cc \quad (18)$$

消去方程(18)的久期项, 得到 $A_n(T_2)$ 是 T_2 的复函数, 因而方程(18)的解为

$$q_{n1} = \Lambda_{nnn} (-A_n \bar{A}_n + \frac{1}{3} A_n^2 e^{2iT_0}) + cc \quad (19)$$

将方程(17, 19)代入方程(16), 可得

$$D_0^2 q_{n2} + q_{n2} = -2D_0 D_2 A_n e^{iT_0} - D_1^2 A_n e^{iT_0} - \\ 2D_0 D_1 \Lambda_{nnn} (-A_n \bar{A}_n + \frac{1}{3} A_n^2 e^{2iT_0}) - \\ \mu_n D_0 A_n e^{iT_0} - 2\Lambda_{nnn} \left[\frac{1}{3} A_n^3 e^{3iT_0} - \frac{5}{3} A_n^2 \bar{A}_n e^{iT_0} \right] - \\ \Gamma_{nnnn} (A_n^3 e^{3iT_0} + 3A_n^2 \bar{A}_n e^{iT_0}) + \\ k_n e^{-i\tau} A_n e^{iT_0} + (F_n/2) e^{i\sigma T_2} e^{iT_0} + cc \quad (20)$$

消去方程(20)的久期项, 有

$$-2iA_n' - i\mu_n A_n + k_n A_n e^{-i\tau} + \left[\frac{10}{3} \Lambda_{nnn} - 3\Gamma_{nnnn} \right] \times \\ A_n^2 \bar{A}_n + (F_n/2) e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (21)$$

$$\text{令 } A_n(T_2) = \frac{1}{2} a_n(T_2) e^{i\beta_n(T_2)} \quad (22)$$

式中 α_n 和 β_n 是 T_2 的实函数,将方程(22)代入方程(21),分离实虚部,得

$$\begin{aligned} a'_n = & -\frac{\mu_n}{2} a_n - \frac{k_n a_n}{2} \sin \tau + \frac{F_n}{2} \sin \gamma_n \\ a_n \gamma'_n = & \sigma a_n + \frac{k_n a_n}{2} \cos \tau + \left[\frac{5}{12} \Lambda_{nnn} - \frac{3}{8} \Gamma_{nnnn} \right] \times \\ & a_n^3 + (F_n/2) \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\gamma_n(T_2) = \sigma T_2 - \beta_n(T_2)$ 。可得主共振的幅频响应方程为

$$\frac{F_n^2}{4} = \frac{1}{4} \mu_e^2 a_n^2 + \left[\sigma_e + \frac{5}{12} \Lambda_{nnn} a_n^2 - \frac{3}{8} \Gamma_{nnnn} a_n^2 \right]^2 a_n^2 \quad (24)$$

式中 $\mu_e = \mu_n + k_n \sin \tau$, $\sigma_e = \sigma + k_n \cos \tau/2$ 。

研究主共振响应幅值的峰值和临界激励幅值,由方程(24)可知,当 $\sigma_e + \frac{5}{12} \Lambda_{nnn} a_n^2 - \frac{3}{8} \Gamma_{nnnn} a_n^2 = 0$ 时, a_n^2 有最大值。因此,可得主共振响应幅值的峰值为

$$a_p = F_n / [\mu_n + k_n \sin \tau] \quad (25)$$

在方程(24)中,令 $B = a_n^2$,则有

$$\frac{F_n^2}{4} = \frac{1}{4} \mu_e^2 B + \left[\sigma_e + \left(\frac{5}{12} \Lambda_{nnn} - \frac{3}{8} \Gamma_{nnnn} \right) B \right]^2 B \quad (26)$$

对方程(26)两边求导,可得

$$\begin{aligned} \sigma_e^\pm = & \left[\frac{3}{4} \Gamma_{nnnn} - \frac{5}{6} \Lambda_{nnn} \right] B \pm \\ & \frac{1}{2} \left[4 \left(\frac{5}{12} \Lambda_{nnn} - \frac{3}{8} \Gamma_{nnnn} \right)^2 B^2 - \mu_e^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (27)$$

由式(27)可知,当 $\sigma_e = \left[\frac{3}{4} \Gamma_{nnnn} - \frac{5}{6} \Lambda_{nnn} \right] B$, $\sigma_e = \mu_e$, 可得相应的临界激励幅值为

$$f_{\text{crit}} = \sqrt{2\mu_e^3 / \left[\frac{3}{4} \Gamma_{nnnn} - \frac{5}{6} \Lambda_{nnn} \right]} \quad (28)$$

5 数值分析与讨论

对受控索-梁结构第一阶模态的主共振响应进行数值分析,讨论其与增益和时滞量之间的关系。

选取 $f_1 = 0.003$, $\mu_1 = 0.02$, 图3给出了当控制增益 $k_1 = 0.3$ 时,不同时滞值情况下受控梁第一模态($n=1$)主共振响应的幅频曲线。其中增益值和时滞量的选取根据图4时滞对响应峰值的一个影响,选取了一个周期中的几个参数进行对比。可以看出,随着时滞 τ 的增大,响应幅值先减小后增

大。值得指出的是,图4给出的主共振响应的峰值曲线也证明了这一点,当时滞 $\tau \in (k\pi, k\pi + \pi/2)$ ($k=0, 1, \dots$), 响应幅值随着 τ 增大而减小,且增长速率明显高于时滞值增长速率,且随着时滞值增大,幅频响应曲线的弯曲程度减弱。同时可以发现,不同的时滞值对应幅频曲线存在多值区域和跳跃现象,而在 $\tau \in (k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$ 区间则递增,呈现出周期性变化(周期 $T=\pi$)。

图5给出了不同时滞 τ 值和 σ 值的情况下系统第一阶模态的响应幅值-激励幅值曲线,这些曲线直接由方程(24)得到。可以看出,随着调谐参数 σ 的变化,曲线有单值和多值的,并且不难发现,不稳定值仅出现在多值曲线上,随着 σ 值的增大即激励频率的增大,出现了多值到单值的转换,同时可以发现,随着时滞 τ 增大,系统响应幅值相应增大,曲线弯曲程度增强。

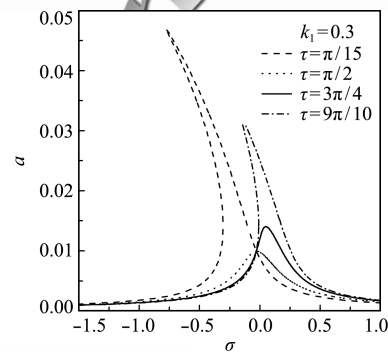


图3 不同时滞值时受控索-梁结构主共振响应幅频曲线
Fig. 3 Amplitude-frequency curves of the primary resonance response of cable-stayed beam with time delay

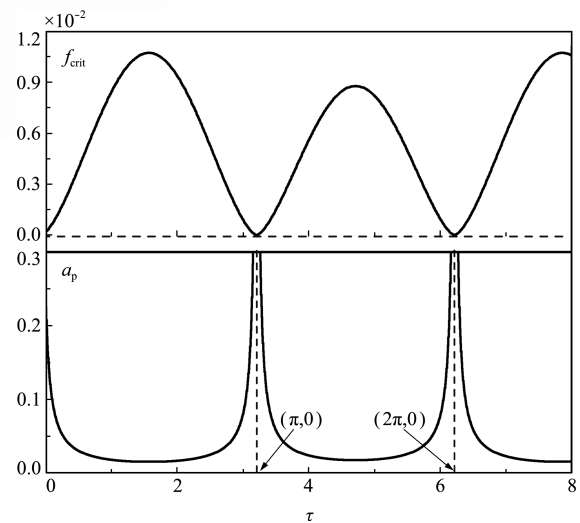


图4 时滞影响下受控索-梁结构主共振响应峰值和临界激励幅值曲线

Fig. 4 Curves of the peak amplitude and critical excited amplitude of the primary resonance response of cable-beam structure with time delay

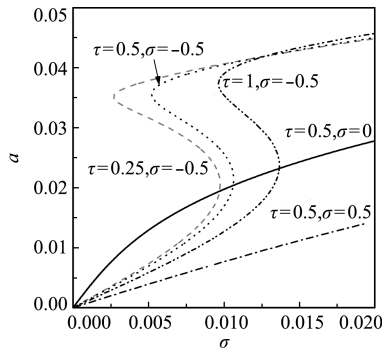


图5 时滞作用下主共振响应幅值-激励幅值曲线
Fig. 5 Response-excitation amplitude curve of the primary resonance with time delay

6 结 论

本文针对受控索-梁耦合系统,采用时滞加速度反馈对该系统的主共振响应进行了解析研究,得到其一阶近似解,并对系统主共振响应进行了参数分析。结果表明,主共振幅频响应受时滞值周期性影响,在区间 $(k\pi, k\pi + \pi/2)$, $(k=0, 1, \dots)$ 其振幅随时滞值增大而减小,而在区间 $(k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$,其振幅随时滞值增大而增大,且存在多值区域和跳跃现象。因此,当控制增益值取定时,必须控制时滞量的选取范围,以免导致系统响应的显著增大,甚至失稳。通过调整控制增益和时滞值,相当于改变了系统的阻尼与外界激励频率和系统频率直接的关系。从而可以避免共振,最终达到减振的效果。因此,在具体的控制系统设计时,应注重控制增益和时滞值的选取,以达到最佳控制效果。

附录 线性特征问题

引入如下变量:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_c \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_c(x) \\ \phi_b(x) \end{bmatrix} e^{i(\omega/\omega_0)t} \quad (1)$$

式中 ω 为系统的频率。将方程(A1)代入方程(5)并线性化有

$$\phi_c''(x) + \omega_{vc}^2 \phi_c(x) = 8ab\epsilon^*, \quad \phi_b''''(x) - \omega_{vb}^4 \phi_b(x) = 0 \quad (2)$$

连接条件如下:

$$\begin{aligned} \phi_c(0) - \phi_b(1)\cos^2\theta &= 0, K\phi_b'''(1) = -\epsilon^* \sin\theta \\ \phi_c(1) &= 0, \phi_b(0) = 0, \phi_b'(0) = 0, \phi_b''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\epsilon^*(t) = \phi_b(1)\sin\theta\cos\theta + \int_0^1 b\gamma_c'^* \phi_c' dx$ 。

通过求解,可得到索和梁的振型分别为

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \phi_b(1)\cos\theta \left[\chi\cos\omega_{vc}x - \frac{1}{\sin\omega} \times \right. \\ &\quad \left. (\cos\theta + \chi)\sin\omega_{vc}x + \sin\theta + \chi \right] \end{aligned}$$

$$\phi_b(x) = c \left[\sin ax - \sinh ax - \frac{\sin a + \sinh a}{\cos a + \cosh a} \times (\cos ax + \cosh ax) \right] \quad (4)$$

式中

$$\chi = \frac{-4b\rho\cos\theta + \left[\omega_{vc}\sin\theta - \frac{\sin\theta\omega_{vc}^3}{8ab} \right] \left[4bv + \frac{\omega_{vc}^3}{8ab} \right]}{4b(\cos\omega_{vc} - 1)\rho - \sin\omega_{vc}(4bv + \omega_{vc}^3/8ab)}$$

$$a = \sqrt{\omega_{vc} [m_b l_b^4 / (E_b I_b)]^{1/2}}$$

$$\rho = 2 - 2\cos\omega_{vc}\sin\omega_{vc}$$

$$v = -\omega_{vc} - \omega_{vc}\cos\omega_{vc} + 2\sin\omega_{vc}$$

参考文献(References):

- [1] Zhou Q, Nielsen S R K, Qu W L. Semi-active control of shallow cables with magnetorheological dampers under harmonic axial support motion[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **311**(3): 683-706.
- [2] 梁 栋, 陈顺伟, 孔丹丹, 等. 索梁动力耦合对非线性拉索阻尼器减振效果的影响分析[J]. *工程力学*, 2012, **29**(9): 237-244. (LIANG Dong, CHEN Shun-wei, KONG Dan-dan, et al. Effects of coupling vibration between girder and cable on performance of non-linear cable dampers for cable-stayed bridges[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(9): 237-244. (in Chinese))
- [3] Fujino Y, Warnitchai P, Pacheco B M. Active stiffness control of cable vibration[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**(4): 948-953.
- [4] Wang L Y, Xu Y L. Active stiffness control of wind-rain-induced vibration of prototype stay cable[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **74**(1): 80-100.
- [5] Susumpow T, Fujino Y. Active control of multimodal cable vibrations by axial support motion[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, **121**(9): 964-972.
- [6] Raftoyiannis I G, Michaltsos G T. Movable anchorage systems for vibration control of stay-cables in bridges[J]. *Engineering Structures*, 2016, **112**(1): 162-171.
- [7] Magaña M E, Volz P, Miller T. Nonlinear decentralized control of a flexible cable-stayed beam structure[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, **119**(4): 523-526.
- [8] 王志军, 唐驾时, 罗迎社. 索-梁耦合结构 Hopf 分岔的反控制[J]. *固体力学学报*, 2016, **37**(1): 90-94. (WANG Zhi-qing, TANG Jia-shi, LUO Ying-she. Anti-control of the Hopf bifurcation of the cable-stayed beam[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2016, **37**(1): 90-94. (in Chinese))

- [9] 彭 剑,赵珖冰,孙测世,等.磁流变阻尼器-斜拉索控制系统中的时滞效应[J].工程力学,2014,**31**(4): 155-159. (PENG Jian, ZHAO Yao-bing, SUN Ce-shi, et al. Time delay effects in MR damper-stay cable control systems[J]. *Engineering Mechanics*, 2014,**31**(4): 155-159. (in Chinese))
- [10] 王志攀,赵珖冰,孙测世,等.索-梁组合结构的建模及面内动力特性分析[J].固体力学学报,2014,**35**(3): 308-312. (WANG Zhi-qing, ZHAO Yao-bing, SUN Ce-shi, et al. Modeling and in-plane dynamics analysis of the cable-stayed beam[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014,**35**(3): 308-312. (in Chinese))
- [11] Alhazza K A, Majeed M A. Free vibrations control of a cantilever beam using combined time delay feedback [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2012,**18**(5): 609-621.

Primary resonance of cable-stayed beam with time-delayed feedback control

PENG Jian^{*1}, LI Lu-xin¹, XIANG Ming-jiao¹, ZHAO Yue-yu²

(1. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The vibration control of a cable-stayed beam is carried out by using the method of the time-delayed acceleration feedback control. A nonlinear control model of cable-stayed beam can be established according to Hamilton's principle. Using the method of multiple scales, the first-order approximate response of the primary resonance of cable-stayed beam with time-delayed feedback is obtained. Then the relationship between the system response and the control parameters is obtained. Moreover, the response peak and the critical excitation amplitude are obtained. The results show that there exist, multiple solutions and jumping phenomena occur in the primary resonance response, and the large-amplitude vibration can be effectively suppressed by regulating control gain and time delay.

Key words: time-delay feedback; primary resonance; cable-stayed beam; vibration control

引用本文/Cite this paper:

彭 剑,李禄欣,向明姣,等.索-梁组合结构主共振响应的时滞反馈控制[J].计算力学学报,2017,**34**(5):638-643.

PENG Jian, LI Lu-xin, XIANG Ming-jiao, et al. Primary resonance of cable-stayed beam with time-delayed feedback control[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017,**34**(5): 638-643.