

含界面裂纹 Reissner 板弯曲问题分析的奇异单元

张兆军¹, 王 珊², 姚伟岸^{*1}

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024; 2. 北京航天微系统研究所, 北京 100094)

摘 要:首先,采用特征函数渐近展开法,推导了 Reissner 板弯曲界面裂纹尖端附近位移场渐近展开的前两阶显式表达式,并利用所获得的位移场渐近表达式构造了一种可用于 Reissner 板弯曲界面裂纹分析的奇异单元。然后,将该奇异单元与外部的常规有限单元相结合,开展了含界面裂纹 Reissner 板弯曲断裂问题的数值分析。奇异单元可以较好地描述裂纹尖端附近的内力场与位移场,其优势是它与常规单元进行连接时不需要使用过渡单元,并且可以直接给出应力强度因子等断裂参数的高精度数值结果。最后,通过两个数值算例验证了本文方法的有效性。

关键词:界面裂纹; Reissner 板; 奇异单元; 应力强度因子

中图分类号: O346.1; O242.2

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2017)05-0608-07

1 引 言

双材料界面裂纹问题是复合材料构件断裂分析中经常遇到的情况。Williams^[1]首次研究了双材料界面裂纹问题,发现裂纹尖端应力奇异性是复数,表明应力场有明显的振荡性。随后, Rice 等^[2]采用不同方法对平面界面裂纹问题做了进一步的研究,给出了复应力强度因子的计算表达式。在界面裂纹的研究中,平面断裂问题是受关注最多的内容,形成了比较成熟和系统的分析方法。然而对于板弯曲断裂问题,研究工作比较少而且分散。Sih 等^[3]采用 Kirchhoff 板理论首先研究了含双材料界面裂纹板的弯曲问题,并且将特征方程与平面问题的特征方程做了一些类比。基于 Kirchhoff 板理论所获得的应力场与对应的三维弹性解不相符。相比较而言,基于 Reissner 板理论推导得到的解能够更真实地反映裂纹尖端应力应变场的特性,所以更适合于板的弯曲断裂问题分析^[4]。

有限元法是目前应用最广泛的一种数值方法。但是,常规单元在处理应力奇异性问题时有较严重的网格依赖性,而且求解精度也不能保证。为了克服常规单元在处理裂纹等奇异性问题上的困难并提高计算精度和效率,一类带有奇异性的特殊单元

得到了发展。文献[5,6]采用辛本征展开解构造出了一类任意高阶精度解析奇异单元。

基于 Reissner 板理论,本文采用特征函数渐近展开的方法推导给出双材料结合板界面裂纹尖端附近位移场的前两阶渐近表达式,并利用渐近展开解构造了一个特殊的位移模式奇异单元。

2 分析模型和基本方程

如图 1 所示,考虑一个厚度为 h 的含界面裂纹双材料板。以裂纹尖端为原点建立极坐标系 (r, θ) ,并记界面上下分别为材料 1 和材料 2,其杨氏模量、剪切模量和泊松比分别记为 E_1, G_1, ν_1 和 E_2, G_2 和 ν_2 。

基于 Reissner 板理论,各向同性双材料板的弯曲问题在极坐标下的基本方程为

$$D_j \left[\frac{\partial^2 \Psi_{rj}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} - \frac{\Psi_{rj}}{r^2} + \frac{1-\nu_j}{2r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{rj}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_j}{2r} \frac{\partial^2 \Psi_{\theta j}}{\partial r \partial \theta} - \frac{3-\nu_j}{2r^2} \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial \theta} \right] + C_j \left[\frac{\partial w_j}{\partial r} - \Psi_{rj} \right] = 0 \quad (1a)$$

$$D_j \left[\frac{1+\nu_j}{2r} \frac{\partial^2 \Psi_{rj}}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-\nu_j}{2r^2} \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial \theta} + \frac{1-\nu_j}{2} \frac{\partial^2 \Psi_{\theta j}}{\partial r^2} + \frac{1-\nu_j}{2r} \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{\theta j}}{\partial \theta^2} - \frac{1-\nu_j}{2r^2} \Psi_{\theta j} \right] + C_j \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} - \Psi_{\theta j} \right] = 0 \quad (1b)$$

$$C_j \left[\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} - \left[\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial \theta} \right] \right] + q(r, \theta) = 0 \quad (1c)$$

收稿日期: 2016-07-04; 修改稿收到日期: 2016-11-14.

基金项目: 国家自然科学基金(10772039)资助项目.

作者简介: 张兆军(1984-), 男, 博士生;

王 珊(1981-), 女, 博士, 高级工程师;

姚伟岸^{*}(1963-), 男, 博士, 教授

(E-mail: ywa@dlut.edu.cn).

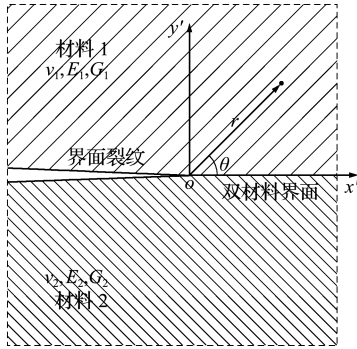


图1 含界面裂纹 Reissner 板
Fig.1 Reissner plate with an interface crack

式中 下标 j 用以区分两种不同材料的各物理量。 w_j 为板的挠度, Ψ_{rj} 和 $\Psi_{\theta j}$ 是变形前垂直于中面的直线段在变形后的转角, $q(r, \theta)$ 为板面的横向荷载。 $D_j = E_j h^3 / 12(1 - \nu_j^2)$ 和 $C_j = 5G_j h / 6$ 分别为板的抗弯刚度和抗剪刚度。

极坐标下截面内力用广义位移分量表示为

$$\begin{cases} M_{rj} = -D_j \left[\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \nu_j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial \theta} + \frac{\Psi_{rj}}{r} \right) \right] \\ M_{\theta j} = -D_j \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial \theta} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \nu_j \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} \right] \\ M_{r\theta j} = -\frac{(1 - \nu_j) D_j}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_{\theta j}}{\partial r} - \frac{\Psi_{\theta j}}{r} \right] \\ Q_{rj} = C_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial r} - \Psi_{rj} \right) \\ Q_{\theta j} = C_j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} - \Psi_{\theta j} \right) \end{cases} \quad (2)$$

假设两种材料之间是理想粘接, 则 $\theta = 0$ 处界面上的位移协调条件和内力平衡条件分别为

$$\begin{cases} w_1(r, 0) = w_2(r, 0) \\ \Psi_{r1}(r, 0) = \Psi_{r2}(r, 0) \\ \Psi_{\theta1}(r, 0) = \Psi_{\theta2}(r, 0) \end{cases}, \begin{cases} M_{\theta1}(r, 0) = M_{\theta2}(r, 0) \\ M_{r\theta1}(r, 0) = M_{r\theta2}(r, 0) \\ Q_{\theta1}(r, 0) = Q_{\theta2}(r, 0) \end{cases} \quad (4)$$

此外, 假设裂纹表面无外力作用, 则裂纹面上的边界条件为

$$\begin{cases} M_{\theta1}(r, \pi) = 0 \\ M_{r\theta1}(r, \pi) = 0 \\ Q_{\theta1}(r, \pi) = 0 \end{cases}, \begin{cases} M_{\theta2}(r, -\pi) = 0 \\ M_{r\theta2}(r, -\pi) = 0 \\ Q_{\theta2}(r, -\pi) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

将式(2,3)代入式(4,5), 可以得到用广义位移表示的界面条件和边界条件。

3 裂纹尖端场的渐近展开解

假设裂纹尖端附近没有体力项, 并将三个广义位移写成如下双重幂级数形式^[7,8]。

$$\begin{cases} \Psi_{rj}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} r^{\lambda_n+i} a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) \\ \Psi_{\theta j}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} r^{\lambda_n+i} b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) \\ w_j(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} r^{\lambda_n+i} c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) \end{cases} \quad (6)$$

式中 λ_n 表示第 n 个特征值, $a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$, $b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 和 $c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 是特征解渐近展开中各阶角分布函数。

将展开式(6)代入平衡方程(1), 按 r 的同幂次项重新排列并令其系数之和等于 0, 可以得到关于 $a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$, $b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 和 $c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 的递推线性微分方程组。然后, 结合相同阶次的定解条件, 就可以确定 $a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$, $b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 和 $c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 的显式表达式。类似于文献[8]的推导过程, 可获得界面裂纹双材料 Reissner 板弯曲问题的特征方程为

$$(k^2 \sin^2 \lambda \pi + \cos^2 \lambda \pi) \cos \lambda \pi \sin^3 \lambda \pi = 0 \quad (7)$$

式中

$$k = \frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_2)\xi - (1 - \nu_1)(1 + \nu_2)}{2[(1 + \nu_1)\xi + (1 + \nu_2)]} \quad (8)$$

$$\xi = D_1(1 - \nu_1) / D_2(1 - \nu_2) \quad (9)$$

显然, 特征方程(7)可分解成以下三个方程

$$\sin^3 \lambda \pi = 0, \cos \lambda \pi = 0 \quad (10a, 10b)$$

$$k^2 \sin^2 \lambda \pi + \cos^2 \lambda \pi = 0 \quad (10c)$$

其非 0 特征值分别为

$$\lambda^{(a)} = n \quad (\text{三重}) \quad (11a)$$

$$\lambda^{(b)} = (2n - 1)/2 \quad (11b)$$

$$\lambda^{(c)} = (2n - 1)/2 \pm si \quad (11c)$$

式中 $n = 1, 2, \dots$, 而

$$s = \ln[(1 - k)/(1 + k)] / 2\pi \quad (12)$$

根据裂纹尖端应变能有限原则, 特征值中已略去所有实部小于 0 的根。零特征值也是方程(10a)的三重根, 它的特征解是板的三个刚体位移。将特征值回代到边值问题的代数方程组, 就可以得到 $a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$, $b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 和 $c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta)$ 的显式表达式, 即可给出裂纹尖端附近位移场的特征展开解为

$$\begin{cases} \tilde{F}_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{i=0}^1 r^{\lambda_n+i} a_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) = \beta^{(\lambda_n)} F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) \\ \tilde{F}_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{i=0}^1 r^{\lambda_n+i} b_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) = \beta^{(\lambda_n)} F_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) \\ \tilde{F}_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = \sum_{i=0}^1 r^{\lambda_n+i} c_{ij}^{(\lambda_n)}(\theta) = \beta^{(\lambda_n)} F_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) \end{cases} \quad (13)$$

式中 $\beta^{(\lambda_n)}$ 为角分布函数中独立的待定系数, 而 $F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)$, $F_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta)$ 和 $F_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)$ 是已知的函数,

其具体表达式将在下文中直接给出。

(1) 因为 $\lambda^{(a)}$ 为三重根, 而且有三个独立的待定系数, 所以对应特征值 $\lambda^{(a)}$ 的位移场特征展开解有互相独立的三个, 可分别取为

$$\begin{cases} F_{wa1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{w11}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + B_{w11}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{ra1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{r11}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + B_{r11}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{\theta a1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{\theta11}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + B_{\theta11}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta] \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} F_{wa2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} A_{w12}^{(j)} \cos \lambda_n \theta \\ F_{ra2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{r12}^{(j)} \cos(\lambda_n+2)\theta + B_{r12}^{(j)} \cos \lambda_n \theta] \\ F_{\theta a2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{\theta12}^{(j)} \sin(\lambda_n+2)\theta + B_{\theta12}^{(j)} \sin \lambda_n \theta] \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} F_{wa3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{w13}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + B_{w13}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{ra3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{r13}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + B_{r13}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{\theta a3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{\theta13}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + B_{\theta13}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta] \end{cases} \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} A_{w11}^{(j)} = -B_{w11}^{(j)} = -1 + \nu_j \\ A_{r11}^{(j)} = -A_{\theta11}^{(j)} = (\lambda_n + 1)(1 + \nu_j) \\ B_{r11}^{(j)} = -\lambda_n(1 + \nu_j) + 3 - \nu_j \\ B_{\theta11}^{(j)} = \lambda_n(1 + \nu_j) + 3 - \nu_j \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} A_{w12}^{(j)} = 1 \\ A_{\theta12}^{(j)} = -A_{r12}^{(j)} = B_{r12}^{(j)} = \frac{-\lambda_n C_j}{2D_j(\lambda_n+1)(1-\nu_j)} \\ B_{\theta12}^{(j)} = (\lambda_n+2)C_j/[2D_j(\lambda_n+1)(1-\nu_j)] \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} A_{w13}^{(j)} = [\lambda_n(1-\nu_j) + 3 + \nu_j]/(\lambda_n+1) \\ B_{w13}^{(j)} = -1 + \nu_j \\ A_{r13}^{(j)} = A_{\theta13}^{(j)} = -(\lambda_n-1)(1+\nu_j) \\ B_{r13}^{(j)} = \lambda_n(1+\nu_j) - 3 + \nu_j \\ B_{\theta13}^{(j)} = \lambda_n(1+\nu_j) + 3 - \nu_j \end{cases} \quad (19)$$

(2) 对应特征值 $\lambda^{(b)}$ 的位移场特征解可取为

$$\begin{cases} F_{wa2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} A_{w2}^{(j)} \sin \lambda_n \theta \\ F_{ra2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{r2}^{(j)} \sin(\lambda_n+2)\theta + B_{r2}^{(j)} \sin \lambda_n \theta] \\ F_{\theta a2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{\theta2}^{(j)} \cos(\lambda_n+2)\theta + B_{\theta2}^{(j)} \cos \lambda_n \theta] \end{cases} \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} A_{w2}^{(j)} = 1/C_j \\ A_{r2}^{(j)} = A_{\theta2}^{(j)} = -(\lambda_n+2)(1+\nu_j)m_j - n_j \\ B_{r2}^{(j)} = [\lambda_n(1+\nu_j) - 2(1-\nu_j)]m_j + p_j \\ B_{\theta2}^{(j)} = [\lambda_n(1+\nu_j) + 4]m_j + n_j \end{cases} \quad (21)$$

而中间变量为

$$\begin{cases} m_j = (\nu_1 - \nu_2) / \{D_2(\lambda_n+1)(1-\nu_2) \times \\ [(1-\nu_1)(1+\nu_2) - \\ \xi(1+\nu_1)(1-\nu_2)](1-\nu_j)\} \\ n_j = (\nu_j \lambda_n + \nu_j + 1) / [D_j(\lambda_n+1)(1-\nu_j)^2] \\ p_j = (\nu_j \lambda_n + \nu_j - 1) / [D_j(\lambda_n+1)(1-\nu_j)^2] \end{cases} \quad (22)$$

(3) 对应特征值 $\lambda^{(c)}$ 的位移场特征解可取为

$$\begin{cases} F_{wa3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n+1} [A_{w3}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + B_{w3}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta + C_{w3}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + D_{w3}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{ra3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{r3}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + B_{r3}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta + C_{r3}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + D_{r3}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta] \\ F_{\theta a3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) = r^{\lambda_n} [A_{\theta3}^{(j)} \sin(\lambda_n+1)\theta + B_{\theta3}^{(j)} \sin(\lambda_n-1)\theta + C_{\theta3}^{(j)} \cos(\lambda_n+1)\theta + D_{\theta3}^{(j)} \cos(\lambda_n-1)\theta] \end{cases} \quad (23)$$

因为 $\lambda^{(c)}$ 为复数型本征值, 使得式(23)中 24 个展开项系数的具体表达式较复杂, 本文不再一一列出。实际上, 在形成下面数值方法的过程中, 这些系数也可以通过数值求解的方式给出。

4 奇异单元的构造

如图 2 所示, 以裂纹尖端为圆心构造一个圆形的奇异单元。根据展开定理, 奇异单元内部的位移场可由前面给出的裂纹尖端场的渐近展开表达式加上三个板的刚体位移构成

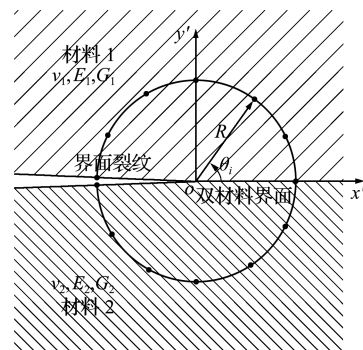


图 2 界面裂纹尖端奇异单元

Fig. 2 A novel singular element near an interface crack tip

$$\begin{aligned} w_j(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{N_1} [\beta_{a1}^{(\lambda_n)} F_{wa1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \beta_{a2}^{(\lambda_n)} F_{wa2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \beta_{a3}^{(\lambda_n)} F_{wa3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta)] + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_b^{(\lambda_n)} F_{wbj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \sum_{n=1}^{N_3} \beta_c^{(\lambda_n)} F_{wcj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + a_0 r \cos \theta + \\ & b_0 r \sin \theta + w_0 \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{rj}(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{N_1} [\beta_{a1}^{(\lambda_n)} F_{ra1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \beta_{a2}^{(\lambda_n)} F_{ra2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \beta_{a3}^{(\lambda_n)} F_{ra3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta)] + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_b^{(\lambda_n)} F_{rbj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \sum_{n=1}^{N_3} \beta_c^{(\lambda_n)} F_{rcj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + a_0 \cos \theta + b_0 \sin \theta \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\theta j}(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{N_1} [\beta_{a1}^{(\lambda_n)} F_{\theta a1j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \beta_{a2}^{(\lambda_n)} F_{\theta a2j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \beta_{a3}^{(\lambda_n)} F_{\theta a3j}^{(\lambda_n)}(r, \theta)] + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_b^{(\lambda_n)} F_{\theta bj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) + \\ & \sum_{n=1}^{N_3} \beta_c^{(\lambda_n)} F_{\theta cj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) - a_0 \sin \theta + b_0 \cos \theta \end{aligned} \quad (24c)$$

式中 $N_i (i=1, 2, 3)$ 表示从位移场展开式中截取的项数, $\beta_{a1}^{(\lambda_n)}, \beta_{a2}^{(\lambda_n)}, \beta_{a3}^{(\lambda_n)}, \beta_b^{(\lambda_n)}, \beta_c^{(\lambda_n)}$ 以及 a_0, b_0 和 w_0 是待定系数。

在极坐标下, Reissner 型板弯曲的广义曲率 κ 与平均横向剪切应变 γ 可以表示为

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial r & 0 \\ 0 & -1/r & -\partial/r\partial\theta \\ 0 & -\partial/r\partial\theta & -\partial/\partial r + 1/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & -1 & 0 \\ \partial/r\partial\theta & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \Psi_r \\ \Psi_\theta \end{Bmatrix} \quad (26)$$

将奇异单元位移模式(24)代入式(25, 26)得

$$\kappa_j = B_{bj} \beta, \quad \gamma_j = B_{sj} \beta \quad (27)$$

式中 β 为由待定系数组成的广义位移向量

$$\begin{aligned} \beta = & [\beta_{a1}^{(\lambda_1)}, \dots, \beta_{a1}^{(\lambda_{N_1})}, \beta_{a2}^{(\lambda_1)}, \dots, \beta_{a2}^{(\lambda_{N_1})}, \\ & \beta_{a3}^{(\lambda_1)}, \dots, \beta_{a3}^{(\lambda_{N_1})}, \beta_b^{(\lambda_1)}, \dots, \beta_b^{(\lambda_{N_2})}, \\ & \beta_c^{(\lambda_1)}, \dots, \beta_c^{(\lambda_{N_3})}, a_0, b_0, w_0]^T \end{aligned} \quad (28)$$

而 B_{bj} 和 B_{sj} 分别对应板的弯曲变形和剪切变形, 由相应的位移函数通过合适的微分求得

$$B_{bj} = [B_{b1j}, B_{b2j}, \dots, B_{b(3N_1+N_2+N_3)j}, 0, 0, 0] \quad (29)$$

$$B_{sj} = [B_{s1j}, B_{s2j}, \dots, B_{s(3N_1+N_2+N_3)j}, 0, 0, 0] \quad (30)$$

式中

$$B_{bij} = \begin{Bmatrix} -\partial F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/\partial r \\ -F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/r - \partial F_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/r\partial\theta \\ (1/r - \partial/\partial r) F_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) - \partial F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/r\partial\theta \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$B_{sij} = \begin{Bmatrix} \partial F_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/\partial r - F_{rj}^{(\lambda_n)}(r, \theta) \\ \partial F_{wj}^{(\lambda_n)}(r, \theta)/r\partial\theta - F_{\theta j}^{(\lambda_n)}(r, \theta) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

而 $\mathbf{0}$ 表示的是零向量。

于是可给出奇异单元的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} (\kappa_j^T D_{bj} \kappa_j + \gamma_j^T D_{sj} \gamma_j) dA \quad (33)$$

式中

$$D_{bj} = \begin{bmatrix} D_j & \nu_j D_j & 0 \\ \nu_j D_j & D_j & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_j) D_j/2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$D_{sj} = \begin{bmatrix} C_j & 0 \\ 0 & C_j \end{bmatrix} \quad (35)$$

将式(27)代入式(33), 整理可得

$$U = \beta^T K_{se}^* \beta / 2 \quad (36)$$

式中 K_{se}^* 是对应于广义位移向量 β 的刚度阵

$$K_{se}^* = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} (B_{bj}^T D_{bj} B_{bj} + B_{sj}^T D_{sj} B_{sj}) dA \quad (37)$$

对于圆形奇异单元, 式(37)的积分可以解析求得。

假设奇异单元上有 n 个节点与常规有限单元连接, 并且每个节点上有 3 个独立的位移分量, 即奇异单元的节点位移向量为

$$\delta = [\omega_1, \Psi_{x1}, \Psi_{y1}, \omega_2, \Psi_{x2}, \Psi_{y2}, \dots, \omega_n, \Psi_{xn}, \Psi_{yn}]^T \quad (38)$$

根据式(24)可以得到节点位移向量 δ 与广义位移向量 β 之间的关系为

$$\delta = T \beta \quad (39)$$

式中 T 为转换矩阵。本文取 n 为奇数, 并且令 $N_1 = N_2 = N_3 = (n-1)/2$, 此时的转换矩阵 T 是一个可逆的方阵, 于是可以得到

$$\beta = T_{3n \times 3n}^{-1} \delta \quad (40)$$

将式(40)代入式(36), 可得

$$U = \delta^T K_{se} \delta / 2 \quad (41)$$

式中 K_{se} 就是对应于节点位移向量 δ 的刚度阵

$$K_{se} = T^{-T} K_{se}^* T^{-1} \quad (42)$$

将奇异单元刚度阵 K_{se} 直接组装到结构的总刚度阵中, 就可以进行有限元计算。获得奇异单元上的节点位移后, 通过式(40)可以求得奇异单元位移模式中的展开项系数。

类比于平面问题中双材料界面裂纹应力强度因子的定义, Reissner 板弯曲问题中界面裂纹应力强度因子可定义为

$$(\sigma_\theta + i\tau_{\theta r})|_{\theta=0} = \frac{K_1(z) + iK_2(z)}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{L}\right)^{is} \quad (43a)$$

$$K_3(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z}(r, \theta, z)|_{\theta=0} \quad (43b)$$

式中 K_1, K_2 和 K_3 是 Reissner 板弯曲界面裂纹的三个应力强度因子, L 为一固定的特征长度, 本文取为中心裂纹长度的 $1/2$ 或单边裂纹的长度。根据式(2,3), 由奇异元的位移场(24)可以直接给出应力强度因子的计算公式为

$$\begin{cases} K_1 = \frac{12\sqrt{2\pi R}}{h^2} \operatorname{Re}[\beta_c^{(\lambda_1)} F_{M_0}^{(j)}(L/R)^{is}] \\ K_2 = \frac{12\sqrt{2\pi R}}{h^2} \operatorname{Re}[\beta_c^{(\lambda_1)} F_{M_{r0}}^{(j)}(L/R)^{is}] \\ K_3 = \beta_b^{(\lambda_1)} \frac{3}{4h} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \end{cases} \quad (44)$$

式中 $\beta_c^{(\lambda_1)}$ 和 $\beta_b^{(\lambda_1)}$ 分别为特征值 $\lambda_1^{(c)} = 0.5 + is$ 和 $\lambda_1^{(b)} = 0.5$ 对应的展开项系数, R 为奇异元半径, 而

$$f_{M_0}^{(j)} = -\frac{D_j}{R}[(\nu_1 \lambda_1^{(c)} + 1)(A_{r3}^{(j)} + B_{r3}^{(j)}) + (\lambda_1^{(c)} + 1)A_{\theta 3}^{(j)} + (\lambda_1^{(c)} - 1)B_{\theta 3}^{(j)}] \quad (45)$$

$$f_{M_{r0}}^{(j)} = -\frac{D_j(1-\nu_j)}{2R}[(\lambda_1^{(c)} + 1)C_{r3}^{(j)} + (\lambda_1^{(c)} - 1)(D_{r3}^{(j)} + (\lambda_1^{(c)} - 1)(C_{\theta 3}^{(j)} + D_{\theta 3}^{(j)}))] \quad (46)$$

5 数值算例

通过两个数值算例来验证本文方法的有效性。常规有限单元选择采用混合插值的 MITC4 四边形等参元^[9]。

算例 1 如图 3 所示, 考虑一边长为 $2L$ 的双材料结合方板, 在双材料界面上包含一条长 $2a$ 的中心裂纹, 板的厚度为 h 。板的四边分别承受两种不同工况, (1) 均匀弯矩 M_l 作用; (2) 均匀扭矩 M_n 作用。

由于结构左右对称, 受到的荷载分别为对称和反对称荷载, 所以仅需取 $1/2$ 进行计算, 并在裂纹尖端设置一个半径为 R 的奇异单元。在计算过程

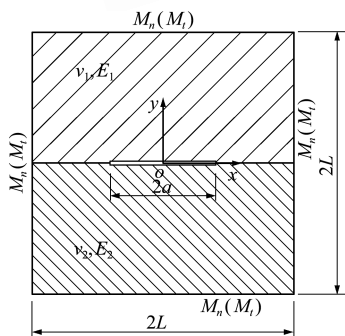


图 3 含中心界面裂纹方板

Fig. 3 Square plate with a center interface crack

中, 取板边长 $2L = 20a$ 。当 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 板厚度为 $h = a$, 而两种材料的杨氏模量之比取不同值时, 通过本文方法给出的两种工况下裂纹尖端无量纲化应力强度因子 $\tilde{K}_i = K_i h^2 / 6M \sqrt{\pi a}$ ($i = 1, 2, 3$) 的数值结果分别如图 4 和图 5 所示。可以看出, 当杨氏模量之比趋于 1 时, 本文所得到的结果趋于单材料问题的解析解^[4,10]。当 $E_1/E_2 = 2.5$ 时, 表 1 和表 2 分别给出了泊松比取不同值时两种工况下不同厚度板的数值结果。

表 1 工况(1)下应力强度因子的数值结果

Tab. 1 Numerical results of SIFs under load case (1)

(ν_1, ν_2)	(0.3, 0.15)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.25)	(0.3, 0.3)
$h/a = 1$				
$\tilde{K}_1$	0.68880	0.69030	0.69199	0.69387
$\tilde{K}_2$	0.13669	0.13044	0.12446	0.11874
$\tilde{K}_3$	0.08543	0.08855	0.09149	0.09426
$h/a = 1.5$				
$\tilde{K}_1$	0.73339	0.73480	0.73649	0.73846
$\tilde{K}_2$	0.11878	0.11217	0.10579	0.09964
$\tilde{K}_3$	0.08162	0.08387	0.08596	0.08791
$h/a = 2$				
$\tilde{K}_1$	0.76960	0.77083	0.77241	0.77436
$\tilde{K}_2$	0.10884	0.10195	0.09526	0.08876
$\tilde{K}_3$	0.07932	0.08082	0.08219	0.08343

表 2 工况(2)下应力强度因子的数值结果

Tab. 2 Numerical results of SIFs under load case (2)

(ν_1, ν_2)	(0.3, 0.15)	(0.3, 0.2)	(0.3, 0.25)	(0.3, 0.3)
$h/a = 1$				
$\tilde{K}_1$	0.04430	0.03793	0.03175	0.02574
$\tilde{K}_2$	0.45751	0.45901	0.46073	0.46272
$\tilde{K}_3$	-0.06581	-0.06417	-0.06253	-0.06088
$h/a = 1.5$				
$\tilde{K}_1$	0.04729	0.04027	0.03343	0.02675
$\tilde{K}_2$	0.56033	0.56122	0.56238	0.56389
$\tilde{K}_3$	-0.04913	-0.04770	-0.04625	-0.04480
$h/a = 2$				
$\tilde{K}_1$	0.04780	0.04031	0.03299	0.02580
$\tilde{K}_2$	0.63421	0.63448	0.63507	0.63606
$\tilde{K}_3$	-0.03700	-0.03582	-0.03461	-0.03339

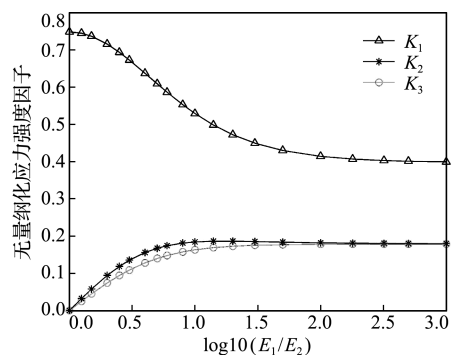


图 4 工况(1)下应力强度因子随杨氏模量比值的变化

Fig. 4 Variation of the SIFs with respect to the ratios of Young's modulus under load case (1)

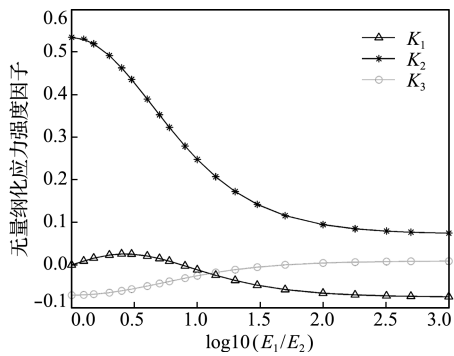


图5 工况(2)下应力强度因子随杨氏模量比值的变化
Fig.5 Variation of the SIFs with respect to the ratios of Young's modulus under load case (2)

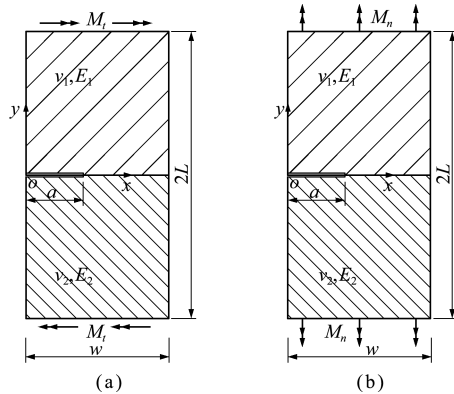


图6 含单边界面裂纹矩形板
Fig.6 Rectangular plate with a single edge interface crack

需要说明的是,以上算例中常规单元的数目不超过1062个,而奇异单元半径取为 $R=0.1h$,节点数目取为17,计算结果基本稳定。根据文献[11]的研究结果,如果裂纹尖端的位移场渐近展开表达式中特征解展开的项数越多,那么奇异单元的半径可以取的范围会越大。

算例2 考虑如图6所示的含单边界面裂纹的双材料矩形板,板的长和宽分别为 $2L$ 和 W ,板的厚度为 h ,裂纹长度为 a 。两种材料的泊松比分别为 ν_1 和 ν_2 ,杨氏模量分别为 E_1 和 E_2 。板的上下两边分别承受两种不同工况,(a)均匀弯矩 M_i 作用;(b)均匀扭矩 M_n 作用。

在计算过程中板的尺寸取 $L=W=10a$,当 $\nu_1=\nu_2=0.3$,而两种材料的杨氏模量之比取不同值时,通过本文方法给出的两种工况下不同厚度板的无量纲化应力强度因子的数值结果分别列入表3和表4。为参考比较,表3和表4也分别给出了含单边裂纹的单材料Reissner板应力强度因子的参考解^[11]。由表3和表4可知,当杨氏模量之比趋于1时,本文方法得到的结果趋于单材料问题的解,再次表明本文方法的有效性。

表3 工况(a)下应力强度因子的数值结果
Tab.3 Numerical results of SIFs under load case (a)

E_1/E_2		5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4. 999	单材料 参考解
$h/a=1$	$\widetilde{K}_1$	0. 5836	0. 6853	0. 7300	0. 7525	0. 7484
	$\widetilde{K}_2$	0. 3233	0. 2204	0. 1315	0. 0000	0
	$\widetilde{K}_3$	0. 2170	0. 1405	0. 0822	0. 0000	0
$h/a=1. 5$	$\widetilde{K}_1$	0. 6576	0. 7360	0. 7701	0. 7872	0. 7845
	$\widetilde{K}_2$	0. 2964	0. 1978	0. 1171	0. 0001	0
	$\widetilde{K}_3$	0. 2079	0. 1333	0. 0777	0. 0000	0
$h/a=2$	$\widetilde{K}_1$	0. 7164	0. 7777	0. 8043	0. 8175	0. 8154
	$\widetilde{K}_2$	0. 2749	0. 1809	0. 1065	0. 0001	0
	$\widetilde{K}_3$	0. 1997	0. 1274	0. 0741	0. 0000	0

表4 工况(b)下应力强度因子的数值结果
Tab.4 Numerical results of SIFs under load case (b)

E_1/E_2	5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4.999	单材料 参考解	
$h/a=1$	$\tilde{K}_1$	0.6574	0.4395	0.2603	0.0001	0
	$\tilde{K}_2$	0.2316	0.3909	0.4625	0.4989	0.4909
	$\tilde{K}_3$	0.1606	0.2262	0.2545	0.2685	0.2690
$h/a=1.5$	$\tilde{K}_1$	0.6234	0.4063	0.2381	0.0001	0
	$\tilde{K}_2$	0.2483	0.3786	0.4359	0.4647	0.4565
	$\tilde{K}_3$	0.2065	0.2570	0.2784	0.2889	0.2902
$h/a=2$	$\tilde{K}_1$	0.5880	0.3763	0.2189	0.0001	0
	$\tilde{K}_2$	0.2527	0.3606	0.4072	0.4305	0.4227
	$\tilde{K}_3$	0.2484	0.2873	0.3036	0.3117	0.3134

需要说明的是,本文方法对复杂几何形状和任意荷载作用下的板弯曲问题都是适用的。

6 结 论

基于Reissner板理论,本文采用特征函数渐近展开的方法推导了双材料界面裂纹尖端附近的广义位移场,给出了其渐近展开前两阶的显式表达式。利用推导得到的位移场渐近表达式,构造了一种位移模式的奇异单元。将该奇异单元与外部的常规有限单元进行连接,对含界面裂纹板弯曲断裂问题进行了有限元数值分析。本文方法主要有两个优点,(1)裂纹尖端只需要布置一个奇异单元而不需要网格加密,同时奇异单元是位移型单元,与常规有限单元连接不需要过渡单元,可以方便地集成到现有的有限元程序中,便于分析实际工程中含界面裂纹板弯曲断裂问题;(2)应力强度因子 K_1 , K_2 和 K_3 可直接通过奇异项的系数和显式表达式计算给出,而不需要额外的后处理过程。

参考文献(References):

- [1] Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media [J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959, **49**(2): 199-204.
- [2] Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1965, **32**(2): 418-423.
- [3] Sih G C, Rice J R. The bending of plates of dissimilar materials with cracks [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, **31**(3): 477-482.
- [4] Hartranft R J, Sih G C. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks [J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1968, **47**(1): 276-291.
- [5] Yao W A, Hu X F. A singular finite element on the mixed-mode bimaterial interfacial cracks [J]. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2012, **13**(4): 219-226.
- [6] Yao W A, Wang S. An analytical singular element for interface cracks in bi-material Kirchhoff plate bending [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, **91**: 103-116.
- [7] 柳春图. 承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形 [J]. *固体力学学报*, 1983, **9**(3): 441-448. (LIU Chun-tu. Stresses and deformations near the crack tip for bending plate [J]. *Acta Mech Solida Sin*, 1983, **9**(3): 441-448. (in Chinese))
- [8] 钱俊, 龙取球. Reissner 板切口尖端应力应变场 [J]. *应用数学和力学*, 1992, **13**(4): 297-306. (QIAN Jun, LONG Yu-qiu. The expression of stress and strain at the tip of notch in Reissner plate [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **13**(4): 297-306. (in Chinese))
- [9] Bathe K J, Bucalem M L, Brezzi F. Displacement and stress convergence of our MITC plate bending elements [J]. *Engineering Computations*, 1990, **7**(4): 291-302.
- [10] Delate F, Erdogan F. The effect of transverse shear in a cracked plate under skew-symmetric loading [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, **46**(3): 618-624.
- [11] Yao W A, Zhang Z J, Hu X F. A singular element for reissner plate bending problem with V-shaped notches [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, **74**: 143-156.

A singular element for Reissner plate bending problem with interface cracks

ZHANG Zhao-jun¹, WANG Shan², YAO Wei-an^{*1}

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. Beijing Aerospace Microsystems Institute, Beijing 100094, China)

Abstract: On the basis of Reissner's plate theory, the expressions of the first two order asymptotic displacement field around the tip of an interface crack are derived using William's eigenfunction series expansion method. And using the deduced generalized displacement field, a novel displacement-mode singular finite element is constructed, which can well depict the characteristic of displacement and singular internal force fields around the crack tip. One advantage of this method is that transition elements are not required between the singular element and the conventional finite element. Moreover, the stress intensity factors can all be determined directly by the coefficients of the asymptotic series terms. Finally, two numerical examples are analysed to demonstrate the performance of the present method.

Key words: interface crack; Reissner plate; singular element; stress intensity factor

引用本文/Cite this paper:

张兆军, 王珊, 姚伟岸. 含界面裂纹 Reissner 板弯曲问题分析的奇异单元 [J]. *计算力学学报*, 2017, **34**(5): 608-614.

ZHANG Zhao-jun, WANG Shan, YAO Wei-an. A singular element for Reissner plate bending problem with interface cracks [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(5): 608-614.