

加权最小二乘法求解 Rayleigh 阻尼系数的讨论

王淮峰¹, 楼梦麟², 张如林^{*3}

(1. 厦门理工学院 土木工程与建筑学院, 厦门 361000; 2. 同济大学 土木工程防灾重点实验室, 上海 200092;
3. 中国石油大学(华东) 储运与建筑工程学院, 青岛 266580)

摘 要: 合理确定 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数对于准确计算场地地震响应有重要影响。本文提出以 $|H|_i^2 |H|_j^2 |A|_i^2$ 为权重系数, 采用加权最小二乘法求解 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数, 以提高土层地震反应时程分析的计算精度。以上海某处地质剖面建立深覆盖土层有限元模型, 计算其在 28 条各具代表性的基岩场地地震波激励下的动力反应, 与其他研究成果对比分析, 验证本文方法的精度及适用性。

关键词: Rayleigh 阻尼矩阵; 比例系数; 深覆盖土层; 地震响应; 时程分析

中图分类号: O241.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2017)05-0603-05

1 引 言

结构体系阻尼的形成涉及较多的影响因素, 其形成机理极为复杂, 目前尚难以定量。基于粘滞阻尼模型的 Rayleigh 阻尼矩阵由于数学处理的方便性而得到广泛应用。Rayleigh 阻尼矩阵是由结构体系的质量矩阵和刚度矩阵线性组合而成, 可通过选取结构的两个振型频率 (ω_j 和 ω_k) 及对应振型阻尼比 (ζ_j 和 ζ_k), 利用振型正交性来确定质量比例系数和刚度比例系数。这样, 除了这两阶振型之外, 由 Rayleigh 阻尼矩阵确定的其他振型阻尼比都与真实的振型阻尼比不一致, 因此, 会高估或低估这些振型对结构动力响应的贡献, 使得结构动力响应的计算结果出现偏差。

工程计算和研究工作中广泛使用 Rayleigh 阻尼矩阵, 但是关于 Rayleigh 阻尼矩阵对结构动力响应计算结果所带来影响的认识并不深入。其原因之一是, 以往大量工程结构的基频高于或接近于外部动力作用主要分量的激励频率, 使得结构的低阶振型对结构总动力响应起主要控制作用, 因此往往选取结构的两个低阶振型来确立 Rayleigh 阻尼矩阵, 由于低阶振型的计算阻尼比与真实阻尼比一致, Rayleigh 阻尼矩阵带来的计算误差很小。文献

[1-3] 的研究表明, 当结构基频远低于外部动力作用主要分量的激励频率时, 仅选择结构的两个低阶振型对应的频率和阻尼比来计算 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数, 将低估结构的动力反应。为改进 Rayleigh 阻尼矩阵的数值建模, 有研究工作^[4-7] 选择结构或者地震波的某些特定频率 (及对应的阻尼比) 来确定 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数, 这些特定频率包括结构基频、其他对结构反应有显著贡献的高阶振型频率、激励时程的反应谱 (或傅氏谱) 的峰值或谱曲线重心对应的频率以及场地特征频率等。

为避免选取参考频率的经验性和任意性, 刘红石^[8] 提出采用加权最小二乘法从振型阻尼比误差最小的角度计算 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数, 建议以权重系数反映各阶振型对动力反应贡献的差异, 但没有提出相应的权重系数。Yang 等^[9] 提出以峰值应变能系数 $\gamma_i^2 M_i^* S_{vi}^2$ (其中 γ_i 为第 i 阶振型的参与系数, M_i^* 为第 i 阶振型的广义质量, S_{vi} 为第 i 阶振型的速度反应谱值) 作为权重系数, 而潘旦光等^[10] 建议以 $\gamma_i^2 \phi_{ki}^2 S_{ui}^{\prime 2}$ (其中 ϕ_{ki} 为第 i 阶振型向量的第 k 个元素, $S_{ui}^{\prime}$ 为第 i 阶振型的位移反应谱对振型阻尼比的导数) 作为权重系数。这些方法都是双参数优化方法。董云等^[11] 提出基于结构基频的单参数优化方法, 不仅考虑结构基本振型对结构地震反应的重要性, 也使得计算过程简化, 便于工程应用。

除加权最小二乘法外, Spears 等^[12] 提出以控制 $\sum_{i=1}^n M_{ei} A_i$ (其中 M_{ei} 为第 i 阶振型的有效质量,

收稿日期: 2016-08-01; 修改稿收到日期: 2016-11-27.

基金项目: 国家自然科学基金 (51608462, 51408609); 福建省教育厅资助 (JAT160349); 厦门理工学院高层次人才 (YKJ15011R) 资助项目.

作者简介: 张如林* (1983-), 男, 博士, 讲师
(E-mail: zhangrulin@upc.edu.cn).

A_i 为频率与第 i 阶振型频率一致的单自由度体系的最大加速度响应) 接近于 0 为目标, 通过迭代的方法求解 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数。王淮峰等^[13] 基于完全二次项平方根振型组合方法 (CQC), 以土层表面加速度反应峰值的误差为控制目标, 同时将土层基频作为参考频率之一, 建立加速度反应峰值误差与 Rayleigh 阻尼系数的函数关系, 进而以误差最小为原则形成了求解 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数的方法。

重大工程场地的地震安全性评价工作中通常需要对土层的地震反应进行分析。而深覆盖土层场地基频往往较低 (如上海约 300 m 厚的土层, 其基频约 0.5 Hz), 远低于常见基岩地震波主要分量的激励频率。因此, 要较准确地计算此类场地的地震响应, 首先需要合理选择确定 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数的参考振型频率。本文以深覆盖土层地震反应计算为例, 通过建立新的权重系数, 改进计算 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数的加权最小二乘法, 以提高计算结果的准确性。

2 加权最小二乘法求解 Rayleigh 阻尼系数

Rayleigh 阻尼矩阵采用质量矩阵和刚度矩阵的线性组合形式:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (1)$$

式中 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 分别是同一结构体系的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, α 为质量比例系数, β 为刚度比例系数。

根据振型的正交性, 由 Rayleigh 阻尼矩阵计算所得的动力系统各阶振型阻尼比可表示为

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \quad (2)$$

式中 ω_i 是第 i 阶振型的圆频率, ζ_i 为第 i 阶振型阻尼比的近似计算值。图 1 为振型阻尼比计算值与频率的关系。显然, 位于两阶参考振型频率 (ω_j 和 ω_k) 之间的频率所对应的计算振型阻尼比小于真实振型阻尼比, 而两阶参考振型频率之外的计算振型阻尼比大于真实振型阻尼比, 会造成高估或低估这些振型对结构动力响应的贡献。

质量比例系数 α 和刚度比例系数 β 通常选取两阶参考振型频率及其对应的振型阻尼比进行计算:

$$\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} = \frac{2\zeta}{\omega_j + \omega_k} \begin{Bmatrix} \omega_j\omega_k \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

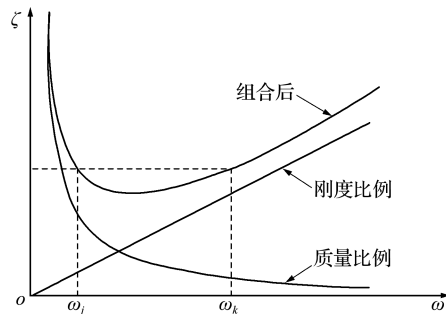


图 1 振型阻尼比计算值与频率的关系

Fig. 1 Relationship between calculated value of modal damping ratio and frequency

此时, 在选取两阶参考频率时存在较强的经验性和任意性。因此, 为了使由式 (2) 确定的第 i 阶振型阻尼比尽可能接近于真实阻尼比, 由加权最小二乘法来确定其中的 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数 (α 和 β) 是较为合理的选择。

根据加权最小二乘法, 由 Rayleigh 阻尼矩阵计算得到的各阶振型阻尼比的加权离差平方和为

$$y(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n Q_i \left[\frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} - \zeta_i \right]^2 \quad (4)$$

式中 Q_i 为第 i 阶振型阻尼比的权重系数, n 为结构的自由度数, 但一般取保留振型的个数。

$$\frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial y(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (5)$$

可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2 \left[\sum_{i=1}^n Q_i \omega_i \zeta_i \sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\zeta_i}{\omega_i} \sum_{i=1}^n Q_i \omega_i^2 \right]}{\left(\sum_{i=1}^n Q_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{i=1}^n Q_i \omega_i^2} \\ \beta &= \frac{2 \left[\sum_{i=1}^n Q_i \frac{\zeta_i}{\omega_i} \sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\zeta_i}{\omega_i^2} \sum_{i=1}^n Q_i \omega_i \zeta_i \right]}{\left(\sum_{i=1}^n Q_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{i=1}^n Q_i \omega_i^2} \end{aligned} \quad (6)$$

对于权重系数 Q_i , 文献[9]建议采用 $\gamma_i^2 M_i^* S_{vi}^2$, 文献[10]建议采用 $\gamma_i^2 \phi_{ki}^2 S_u'^2$ 。根据频域计算理论, 本文建议采用 $|H|_i^2 |H|_i'^2 |A|_i^2$ 作为权重系数, 其中 $|H|$ 为结构的频率响应函数的幅值, $|H|' = \partial |H| / \partial \zeta$ 为频率响应函数幅值对阻尼比的导数, $|A|$ 为动力激励加速度傅里叶谱的谱值。

对于频率响应函数幅值对阻尼比的导数 $|H|' = \partial |H| / \partial \zeta$ 的计算, 可采用数值微分方法中的中点公式:

$$|H|' = \frac{\partial |H|}{\partial \zeta} \approx \frac{|H(\zeta_i + \epsilon)| - |H(\zeta_i - \epsilon)|}{2\epsilon} \quad (7)$$

式中 ϵ 是接近于 0 的实数, 表示关于 ζ_i 的增量。

当 ϵ 趋向于 0 时, $[|H(\zeta_i + \epsilon)| - |H(\zeta_i - \epsilon)|]/2\epsilon$ 趋向于 $\partial |H|/\partial \zeta$ 。

3 数值算例分析讨论

3.1 土层模型和输入地震波

以文献[13]选用的上海某处地质剖面建立土层有限元模型并进行地震反应分析,从而讨论以 $|H|_i^2|H|_i'^2|A|_i^2$ 为权重系数采用加权最小二乘法计算 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数的精度。图 2 为地表频率响应函数的幅值 $|H|$ 。土层的物理力学特性、有限元建模方法及输入地震波的选择与文献[13]一致。

3.2 Rayleigh 阻尼系数计算方法

在计算 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数时,分别采用本文提出的以 $|H|_i^2|H|_i'^2|A|_i^2$ 为权重系数的加权最小二乘法、文献[9]和文献[10]建议的分别以 $\gamma_i^2 M_i^* S_{vi}^2$ 和 $\gamma_i^2 \phi_{ki}^2 S_u'^2$ 为权重系数的加权最小二乘法以及文献[6]和文献[13]建议的方法,并对对比分析计算结果。

3.3 数值计算结果

为方便计算和比较分析,在土层地震反应计算中假定土层的各阶振型阻尼比为 5%。为验算本文方法的计算精度,土层模型地震反应分析的精确解采用振型叠加法计算。

以土层场地地表点地震响应的误差为标准,来讨论不同 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数计算方法的精度,定义为

$$e = (|r^R|_{\max} - |r^M|_{\max})/|r^M|_{\max} \times 100\% \quad (8)$$

式中 $|r^M|_{\max}$ 是采用振型叠加法计算所得的对应于真实阻尼的土层峰值反应, $|r^R|_{\max}$ 是基于 Rayleigh 阻尼矩阵计算所得的土层同一峰值反应。

本文分别取土层地表峰值位移和峰值加速度为控制目标,进行了不同 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数计算方法下的土层地震反应计算和计算结果

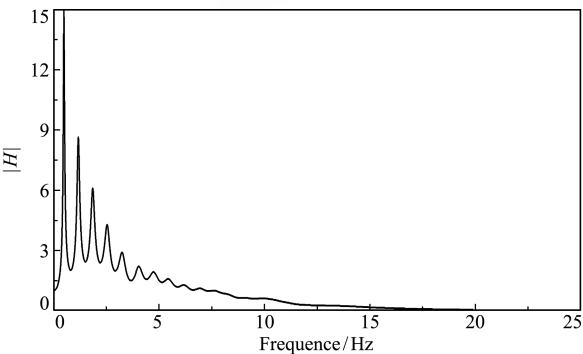


图 2 土层频率响应函数的幅值
Fig. 2 Amplitude of frequency response function of soil model

对比分析。图 3 给出了采用不同 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数计算方法时,土层地表位移反应峰值和加速度反应峰值的相对误差 e , 表 1 为相对误差 e 的平均值和标准差。显然,位移反应的误差及离散度均小于加速度反应。

采用文献[9]的方法,位移反应的误差较大,加速度反应的误差较小(位移反应峰值的误差在 -2.2%~19.0%之间,加速度反应峰值的误差在 -13.9%~16.4%之间)。采用文献[10]的方法,位移反应的误差很小,而加速度反应的误差较大且基本为负值(位移反应峰值的误差在 -8.4%~3.7%

表 1 相对误差统计数据
Tab. 1 Statistical data of relative errors

Rayleigh 阻尼系数计算方法	位移		加速度	
	平均值/%	标准差/%	平均值/%	标准差/%
本文方法	-0.3	2.1	-4.7	9.2
文献[9]方法	2.6	5.0	-1.3	7.0
文献[10]方法	0.1	2.3	-12.1	15.3
文献[6]方法	6.1	10.4	17.9	24.8
文献[13]方法	4.7	7.8	9.7	12.5

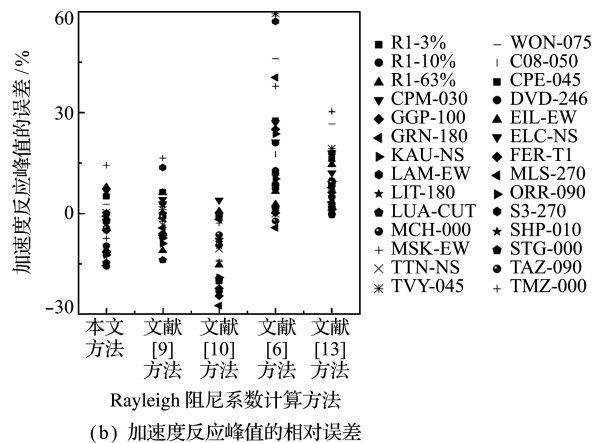
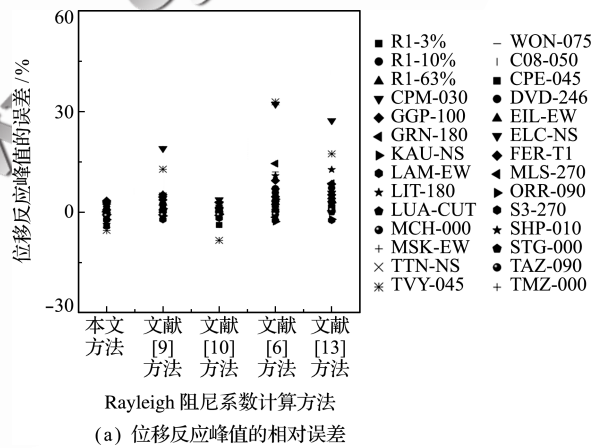


图 3 地表动力反应的相对误差
Fig. 3 Relative errors of displacement and acceleration

之间,加速度反应峰值的误差在 $-27.5\%\sim 3.9\%$ 之间),应用于工程实践中将使得计算结果偏于不安全。采用文献[6]的方法,位移反应和加速度反应的误差较大且基本为正值(位移反应峰值的误差在 $-2.8\%\sim 32.9\%$ 之间,加速度反应峰值的误差在 $-4.3\%\sim 59.4\%$ 之间),应用于工程实践中将使得计算结果过于保守。采用文献[13]的方法,位移反应的误差范围与文献[6]相比基本不变,而加速度反应的精度有了较好的提升(位移反应峰值的误差在 $-2.4\%\sim 27.3\%$ 之间,加速度反应峰值的误差在 $-0.5\%\sim 30.3\%$ 之间),同样误差基本为正值。

与其他方法相比,采用本文方法,位移反应和加速度反应的误差最小(位移反应峰值的误差在 $-5.4\%\sim 3.4\%$ 之间,加速度反应峰值的误差在 $-15.8\%\sim 14.3\%$ 之间),且误差的离散度较小(位移反应峰值误差的标准差为 2.1% ,加速度反应峰值误差的标准差为 9.2%)。本文方法的位移精度基本与文献[10]的方法一致,但加速度反应的精度有较大的提升。本文方法的加速度精度基本与文献[9]的方法一致,但位移反应的精度有较大的提升。总体而言,采用本文方法得到的位移反应和加速度反应都有较好的计算精度,位移反应峰值的误差基本可以控制在 $\pm 5\%$ 以内,加速度反应峰值的误差基本可以控制在 $\pm 15\%$ 以内。

4 结 论

重大工程场地的地震安全性评价工作中,通常需要对土层的地震反应进行分析,而深覆盖土层场地基频往往较低,远低于基岩地震波主要分量的激励频率。因此,要较准确地计算此类场地的地震响应,首先需要合理地选择和确定 Rayleigh 阻尼矩阵比例系数的参考振型频率。本文提出以 $|H_i|^2|H_j|^2|A_i|^2$ 为权重系数,采用加权最小二乘法计算 Rayleigh 阻尼矩阵的比例系数,以提高土层地震反应时程分析的计算精度。以上海某处地质剖面建立深覆盖土层有限元模型,计算其在 28 条各具代表性的基岩场地地震波激励下的动力反应及计算精度,并与其他研究成果对比分析,结论如下。① 土层表面位移反应的误差及离散度均小于加速度反应;② 采用文献[9]的方法,位移反应的误差较大,加速度反应的误差较小;③ 采用文献[10]的方法,位移反应的误差很小,而加速度反应的误差较大且基本为负值,应用于工程实践中将使

得计算结果偏于不安全;④ 采用文献[6]的方法,位移反应和加速度反应的误差较大且为正值,应用于工程实践中将使得计算结果过于保守;⑤ 采用文献[13]的方法,位移反应的误差范围与文献[6]相比基本不变,而加速度反应的精度有较好的提升,同样误差基本为正值;⑥ 与其他方法相比,采用本文方法,位移反应和加速度反应的误差最小,位移反应峰值的误差基本可以控制在 $\pm 5\%$ 以内,加速度反应峰值的误差基本可以控制在 $\pm 15\%$ 以内,同时,不同地震波激励下误差的离散度较小,具有较好的适用性。

参考文献(References):

- [1] 楼梦麟,张静. 结构爆破地震反应计算中的阻尼模型[J]. 防护工程, 2009, **31**(1): 15-19. (LOU Meng-lin, ZHANG Jing. Damping model for blasting seismic response analysis of structure[J]. *Protective Engineering*, 2009, **31**(1): 15-19. (in Chinese))
- [2] 楼梦麟,隋 磊,沈 飞. 不同阻尼矩阵建模对超高层结构地震反应分析的影响[J]. 结构工程师, 2013, **29**(1): 55-61. (LOU Meng-lin, SUI Lei, SHEN Fei. Effects of damping matrix modeling on seismic response of super high-rise structure[J]. *Structural Engineering*, 2013, **29**(1): 55-61. (in Chinese))
- [3] 马俊玲,丁海平. 土层地震反应分析中不同阻尼取值的影响比较[J]. 防灾减灾工程学报, 2013, **33**(5): 517-523. (MA Jun-ling, DING Hai-ping. Comparative study on influence of different damping values in soil-layer seismic response analysis[J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2013, **33**(5): 517-523. (in Chinese))
- [4] Chopra A K. *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering (2nd Edition)*[M]. New Jersey: Upper Saddle River, Prentice-Hall, 2001.
- [5] Hudson M, Idriss I M, Beikae M. User's Manual for QUAD4M: A Computer Program to Evaluate the Seismic Response of Soil Structures Using Finite Element Procedures and Incorporating a Compliant Base [R]. Berkeley: University of California, 1994.
- [6] 楼梦麟,邵新刚. 深覆盖土层 Rayleigh 阻尼矩阵建模问题的讨论[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(7): 1272-1279. (LOU Meng-lin, SHAO Xin-gang. Discussion on modeling issues of Rayleigh damping matrix in soil layers with deep deposit [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(7): 1272-1279. (in Chinese))

- [7] 丁海平,马俊玲.基于场地特征周期的瑞利阻尼确定方法[J].岩土力学,2013,34(s2):35-40. (DING Hai-ping, MA Jun-lin. A method for determining Rayleigh damping based on site characteristic period[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(s2): 35-40. (in Chinese))
- [8] 刘红石.相对误差与 Rayleigh 阻尼比例系数的确定[J].湖南工程学院学报,2001,11(3-4):36-38. (LIU Hong-shi. Relative error and determination of Rayleigh damping scale coefficient[J]. *Journal of Hunan Institute of Engineering*, 2001, 11(3-4): 36-38. (in Chinese))
- [9] Yang D B, Zhang Y G, Wu J Z. Computation of Rayleigh damping coefficients in seismic time-history analysis of spatial structures[J]. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2010, 51(2): 125-135.
- [10] 潘旦光,高莉莉,李小翠.求解 Rayleigh 阻尼系数的加权最小二乘法[J].计算力学学报,2015,32(1):70-76. (PAN Dan-guang, GAO Li-li, LI Xiao-cui. Weighted least squares method for solving Rayleigh damping coefficients[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, 32(1): 70-76. (in Chinese))
- [11] 董云,楼梦麟.基于结构基频确定 Rayleigh 阻尼系数的优化方法及其讨论[J].湖南大学学报(自然科学版),2014,41(2):8-13. (DONG Yun, LOU Meng-lin. An optimization solution for Rayleigh damping coefficients based on the fundamental frequency of structure[J]. *Journal of Hunan University (Natural Science)*, 2014, 41(2): 8-13. (in Chinese))
- [12] Spears R E, Jensen S R. Approach for selection of Rayleigh damping parameters used for time history analysis[J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2012, 134(6): 61801-61807.
- [13] 王淮峰,楼梦麟,张如林.深覆盖土层动力响应时程分析中 Rayleigh 阻尼系数的确定[J].岩土工程学报,2016, 38(3): 468-476. (WANG Huai-feng, LOU Meng-lin, ZHANG Ru-lin. Determining Rayleigh damping parameters for time history analysis of soil layers with deep deposit[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(3): 468-476. (in Chinese))

Discussion on weighted least-squares method for solving Rayleigh damping coefficients

WANG Huai-feng¹, LOU Meng-lin², ZHANG Ru-lin^{*3}

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Xiamen University of Technology, Xiamen 361000, China;

2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

3. School of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: The appropriate determination of Rayleigh coefficients for the damping matrix is significant for accurate analysis of soil layers with deep deposit. $|H|_i^2 |H|_i'^2 |A|_i^2$ was proposed to be the weighting coefficient of weighted least-squares method, which is widely used to obtain Rayleigh damping coefficients, to enhance computation accuracy of time-history analysis of seismic response of soil model. Dynamic response of a typical soil model with deep deposit, exciting by 28 typical seismic waves, was analyzed to verify the accuracy and applicability of the proposed method

Key words: Rayleigh damping matrix; damping parameters; soil layers with deep deposit; seismic response; time-history analysis

引用本文/Cite this paper:

王淮峰,楼梦麟,张如林.加权最小二乘法求解 Rayleigh 阻尼系数的讨论[J].计算力学学报,2017,34(5):603-607.

WANG Huai-feng, LOU Meng-lin, ZHANG Ru-lin. Discussion on weighted least-squares method for solving Rayleigh damping coefficients[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, 34(5): 603-607.