

DOI: 10.7511/jslx201705004

非结构网格质量对梯度重构及 无粘流动模拟精度的影响

王年华^{*1}, 张来平^{1,2}, 马戎¹, 赫新^{1,2}

(1. 中国空气动力研究与发展中心 计算空气动力研究所, 绵阳 621000;

2. 中国空气动力研究与发展中心 空气动力学国家重点实验室, 绵阳 621000)

摘要:综合利用理论分析和数值测试手段,研究了非结构格心型有限体积离散中梯度重构算法的计算精度,分别给出了非结构算法中常用的基于 Green-Gauss 公式(GG 方法)和基于 Least squares 方法(LSQ 方法)的梯度重构方法达到至少一阶精度的条件。其中,GG 方法在面积分低阶项不能互相抵消的情况下,要求面心插值精度达到至少二阶;而 LSQ 方法对于任意网格均能实现梯度重构一阶精度。在各向同性网格上的梯度重构精度数值测试验证了数学推导结论;进一步通过制造解方法量化无粘流动数值离散误差,结合网格收敛性测试研究了网格质量(网格点随机扰动、网格弯曲度和网格倾斜度等因素)以及网格类型(三角形和四边形)对无粘流动模拟精度的影响,验证了理论分析结论。

关键词:非结构网格;梯度重构方法;数值模拟精度;制造解方法;网格收敛性研究

中图分类号:O35 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2017)05-0555-09

1 引言

随着计算流体力学 CFD(Computational Fluid Dynamics)的发展,非结构网格生成技术及非结构网格算法得到了广泛的研究和应用。非结构网格在处理复杂外形时具有极大的灵活性及高效性,网格生成自动化程度高,同时又能较为方便地实现网格自适应。尽管与结构网格相比,非结构网格存在上述诸多优势,但是非结构网格及算法在计算效率和精度方面仍存在一些不足。

如今,名义上二阶精度的非结构有限体积方法已经广泛应用于 CFD 工程实践中,然而有限体积离散的实际精度却一直是 CFD 研究者关注的问题。

在 20 世纪 90 年代,Roe^[1]和 Giles^[2]就对格点型的 Jameson 格式进行了数学分析和数值精度测试,并且揭示了截断误差收敛性和离散误差收敛性之间的关系。Lindquist^[3]也针对 Jameson 格式初步研究比较了三角形网格和四边形网格对计算精度的影响,证明了三角形网格在一定条件下可以达到与四边形网格相同的精度。

自从 Barth 等^[4]提出限制型的分段线性重构方法以来,基于梯度重构的迎风格式逐渐发展为最受欢迎的有限体积离散格式之一。通常这些离散格式需要至少一阶精度的梯度重构,以确保二阶精度的有限体积离散。

一般来说,在非结构网格上,通常有基于 Green-Gauss 公式的梯度重构方法(简称 GG 方法)和基于最小二乘法(Least squares)的梯度重构方法(简称 LSQ 方法)。这两种梯度重构方法的精度均受到网格类型和网格质量等因素的影响,这些因素也间接影响到流动模拟精度。

在上述研究中,一部分工作侧重于这两种梯度重构方法的比较。如 Aftosmis 等^[5]比较了不同限制器以及不同网格类型对两种梯度重构方法精度的影响,发现在规则网格上,两种方法精度相同,而在扭曲的网格上,LSQ 方法更具优势。Sozer 等^[6]发现在不规则的网格上,采用反距离加权面心插值的 GG 方法和采用简单平均面心插值的 GG 方法不相容,导致不能达到一阶精度。而尽管 LSQ 方法能够在任意的网格上保持一阶精度^[7],其在长细比较大的曲面网格上也会出现精度下降现象^[8]。虽然已经对各种梯度重构方法做了大量的比较分析,但是究竟哪一种是最好^[6]的方法并无定论,并且梯度重构方法精度降阶的根本原因也没有得到较好的解释。

收稿日期:2016-07-06;修改稿收到日期:2016-10-16.

基金项目:国家自然科学基金(11532016)资助项目.

作者简介:王年华*(1992-),男,硕士生

(E-mail:nianhuawong@126.com);

张来平(1968-),男,研究员,博士生导师.

另一部分工作则侧重于网格类型和网格质量等因素对梯度重构精度乃至流动模拟精度的影响^[9-12]。如 Diskin 等^[9]通过大长细比网格上梯度重构方法的精度研究,发现精度下降只发生在网格尺度较大的方向。除此之外,其他网格因素,如网格拉伸、弯曲度、倾斜度以及三维的非平面效应也对梯度重构精度有相应影响^[12]。一些研究者试图找到既能保持较高精度,同时又能在各种网格上保持计算稳定性的算法^[12,13],但是网格对计算精度的影响比较复杂^[14],也远没有得到完全澄清。

本文将综合利用理论分析和数值测试的手段,分析非结构格心型有限体积离散中梯度重构算法的计算精度,分别给出 GG 方法和 LSQ 方法的梯度重构算法达到至少一阶精度的条件,并利用在各向同性网格上的梯度重构精度数值测试验证理论推导的结论。在此基础上,进一步通过制造解方法量化无粘流动数值离散误差,结合网格收敛性测试研究网格质量(网格点随机扰动、网格弯曲度和网格倾斜度等)以及网格类型(三角形和四边形)对无粘流动模拟精度的影响。这些研究结果对于非结构网格生成及非结构算法改进具有一定的指导意义。

2 数值方法

2.1 控制方程及空间离散

本文的研究均基于积分形式的 Euler 方程^[15]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}_c dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q} d\Omega \quad (1)$$

式中 \mathbf{W} 为守恒变量, \mathbf{F}_c 为无粘通量矢量, \mathbf{Q} 为源项。在本文考虑的问题中,源项为 0。

方程采用格心型非结构有限体积法进行离散。空间离散采用 Roe 格式^[16]:

$$(\mathbf{F}_c)_{ij} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_c(\mathbf{W}_R) + \mathbf{F}_c(\mathbf{W}_L) - \overline{A_{Roe}} (\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L)] \quad (2)$$

由式(2)可以看出,通过控制体界面的对流通量矢量 \mathbf{F}_c 需要控制体界面左右状态的值 \mathbf{W}_L 和 \mathbf{W}_R 来计算得到,而面左右状态通常通过原始变量 U 的重构来确定。

2.2 变量重构

(1) 一阶重构

如图 1 所示,假设流动原始变量 U 在控制体内为常数,得到一阶空间离散精度的变量重构(由原始变量 U 很容易得到守恒变量 \mathbf{W}_L 和 \mathbf{W}_R , 以下不再赘述):

$$U_L = U_i, U_R = U_j \quad (3)$$

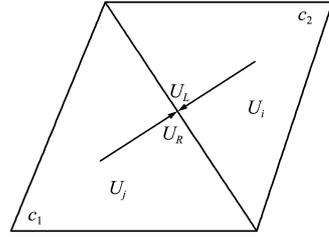


图 1 控制体交界面左右状态的重构
Fig. 1 Solution reconstruction on interface of two neighboring control volumes

(2) 二阶重构

假设流动原始变量在控制体内线性变化,通过梯度插值求解面左右状态可以达到二阶空间离散精度:

$$U_L = U_i + \nabla U_i \cdot \mathbf{r}_L, U_R = U_j + \nabla U_j \cdot \mathbf{r}_R \quad (4)$$

本文不考虑限制器,同时,空间离散二阶精度要求式(4)梯度项 ∇U_i 的计算达到至少一阶精度。那么,如何准确地进行梯度重构对于非结构有限体积离散就显得尤为重要。

3 梯度重构方法数学分析

3.1 基于 Green-Gauss 公式的梯度重构方法

Green-Gauss 公式具有如下形式,

$$\int_{\Omega} \nabla U d\Omega = \oint_{\partial\Omega} U \mathbf{n} ds \quad (5)$$

其离散形式为

$$(\nabla U)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} U_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} \quad (6)$$

式中 $(\nabla U)_i$ 即为需要求解的控制体中心的梯度, V_i 为控制体的体积。 N_F 为控制体边界面的数量, U_{ij} 为控制体界面中心的值, $\mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij}$ 为界面面积矢量。考虑在所有项都精确的情况下,通过式(6)可以精确求解重构线性函数的梯度。实际发现式(6)唯一可能引入误差的就是面心值(界面中心点的值) U_{ij} 的求解。

以下就面心值插值精度与 GG 方法梯度重构精度的关系进行推导。

从梯度重构达到一阶精度的要求出发推导其必要条件,首先要求梯度重构达到一阶精度:

$$(\nabla U)_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} U_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} = (\nabla U)_{i, \text{exact}} + O(h) \quad (7)$$

假设面心值插值可以写成

$$U_{ij} = \hat{U}_{ij} + a_{ij} + b_{ij} O(h) + c_{ij} O(h^2) \quad (8)$$

式中 \hat{U}_{ij} 为面心值的精确值, a_{ij} , b_{ij} 和 c_{ij} 为常数。

将式(8)代入式(7),当 $\sum_{j=1}^{N_F} [a_{ij} + b_{ij} O(h)] \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} \neq 0$

及 $\sum_{j=1}^{N_F} [c_{ij}O(h^2)] \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} \neq 0$ 时,可以得到:

$$\begin{aligned}
 (\nabla U)_i &= \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} [\hat{U}_{ij} + a_{ij} + b_{ij}O(h) + c_{ij}O(h^2)] \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} = \\
 &= \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} \hat{U}_{ij} \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} [a_{ij} + b_{ij}O(h)] \cdot \\
 &= \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} + \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_F} [c_{ij}O(h^2)] \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} \sim \\
 &= (\nabla U)_{i_exact} + [a_{ij}O(1) + b_{ij}O(h)] \cdot \\
 &= O(h^2)/O(h^3) + c_{ij}[O(h^2) \cdot O(h^2)/O(h^3)] \sim \\
 &= (\nabla U)_{i_exact} + a_{ij}O(h^{-1}) + b_{ij}O(1) + c_{ij}O(h) \quad (9)
 \end{aligned}$$

一方面,当 $\sum_{j=1}^{N_F} [a_{ij} + b_{ij}O(h)] \mathbf{n}_{ij} \Delta S_{ij} = 0$, 即面积分的低阶项互相抵消时,GG 方法可以达到一阶甚至更高阶精度(取决于 c_{ij} 是否为 0)。另一方面,当面积分低阶项不能互相抵消时,要求常数 a_{ij} 和 b_{ij} 必须为 0,此时,面心值插值达到二阶精度。

因此,对于 GG 方法,在面积分低阶项不能互相抵消的情况下,面心值插值精度达到二阶才能保证梯度重构一阶精度。

以下列出两种具有代表性的 GG 方法。具体方法细节可参考文献[6,8]。

(1) GG-Cell 方法

采用相邻单元算术平均的方式求解面心值,无法保证在任意网格上面心值插值的二阶精度,因而在不满足该条件时,梯度重构精度降阶至 0 阶。

(2) GG-LSQ 方法

采用最小二乘插值方法求解面心值,能够保证在任意非结构网格上的面心值插值达到二阶精度,因此保证了梯度重构在任意网格上保持一阶精度。

文献[6]在对采用算术平均方式进行面心值插值的 GG-Cell(文献记为 GG-Simple)方法进行梯度重构精度测试时发现,在不规则网格、细长的三角形和四边形网格以及任意多边形网格上,GG-Cell 方法不相容,其梯度重构精度阶下降到 0 阶,文献[8]也指出当面心不平分相邻单元中心连线时,GG-Cell 方法无法保持梯度重构一阶精度,而本文从理论分析的角度给出了 GG 方法保持至少一阶精度的条件及精度降阶的原因。

3.2 基于 Least squares 的梯度重构方法

由泰勒级数展开忽略二阶及以上高阶项得到

$$U_j = U_i + (\nabla U)_i \cdot \mathbf{r}_{ij} \quad (10)$$

对所有模板单元在 i 处展开,得到

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \Delta x_{i1} & \theta_1 \Delta y_{i1} & \theta_1 \Delta z_{i1} \\ \theta_2 \Delta x_{i2} & \theta_2 \Delta y_{i2} & \theta_2 \Delta z_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_j \Delta x_{ij} & \theta_j \Delta y_{ij} & \theta_j \Delta z_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_N \Delta x_{iN} & \theta_N \Delta y_{iN} & \theta_N \Delta z_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 (U_1 - U_i) \\ \theta_2 (U_2 - U_i) \\ \vdots \\ \theta_j (U_j - U_i) \\ \vdots \\ \theta_N (U_N - U_i) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 N 为模板中单元的数量, θ_j 为各个方程的加权系数,通常取为 1 或者单元 i 和单元 j 距离的倒数。方程(11)中未知数数目少于方程个数,只能得到其最小二乘意义上的解,方程的最小二乘解即为需要求解的梯度。

由于式(10)仅忽略了泰勒级数展开中的二阶及以上的高阶项,因此容易发现,LSQ 方法对于任意的非结构网格都能达到至少一阶精度,本文从理论分析的角度得到了与文献[7]一致的结论。

不同大小模板的 LSQ 方法具有不同的精度,是否采用距离加权对精度也有相应影响,本文仅考虑采用紧致模板且不加权的基本 LSQ 方法,下文记作 LSQ 方法,具体方法细节可参考文献[6,8],关于加权的采用扩充模板的 LSQ 方法,其分析与不加权的紧致模板 LSQ 方法类似,在此不再赘述。

4 梯度重构精度数值测试

第 3 节推导了 GG 方法和 LSQ 方法保持一阶精度的条件,也预测了 GG-Cell 方法在不满足条件时将出现精度降阶的情况。本节将通过数值实验来验证上述结论。

4.1 测试网格

选择如图 2 所示的 4 种网格进行测试,其中 grid1 和 grid3 分别为规则四边形网格和规则直角三角形网格,而 grid2 和 grid4 分别为引入随机扰动后的不规则四边形网格和不规则三角形网格。

精度测试考察的对象包括两个方面,一是通过网格收敛性测试得到方法的数值精度阶,该指标考察的是随着网格加密,误差下降的速率,即所谓精度阶;二是数值计算的绝对误差,即与精确解的差异,后文也称作精度。

4.2 测试结果

对非线性函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos xy$, 在 5 套依次加密的网格上进行梯度重构精度测试,图 3(a~d)依次给出了在四种网格上的 x 方向梯度离散误差随网格尺度减小时的收敛情况。图中,

x 坐标为网格尺度大小, y 坐标为 x 方向梯度离散误差的 L_1 模, 图中同时给出了一阶精度和二阶精度参考曲线。

图 3(a, c) 显示, 对于规则的矩形网格和规则的直角三角形网格, 三种方法的精度及精度阶几乎相同, 梯度算法均能达到至少一阶精度。对于矩形网格, 三种方法均达到了二阶精度; 而对于三角形网格仅达到一阶精度, 且 LSQ 方法的绝对误差稍低。

图 3(b, d) 显示, 对于引入节点扰动后的不规则四边形网格和不规则三角形网格, GG-Cell 方法出现了精度降阶现象, 而 GG-LSQ 方法和 LSQ 方法仍能保持至少一阶精度的梯度重构, 且 LSQ 方

法的绝对误差相对更低。

分析 GG-Cell 降阶的原因, 正如上述提到的, GG-Cell 方法和 GG-LSQ 方法的最大差别在于面心值的插值方法。对于 grid1 和 grid3, 网格规则等距分布, 且面心均分相邻单元中心的连线, GG-Cell 方法采用算术平均求解面心值的方式能够达到面心插值的二阶甚至更高阶精度; 而对于不规则网格 grid2 和 grid4, 容易证明, 算术平均的面心插值方式不能保证面心值插值的二阶精度, 因而导致梯度重构精度降阶。而 GG-LSQ 方法能够保证在任意非结构网格上面心插值的二阶精度, 从而确保了梯度重构达到至少一阶精度。以上的数值结果验证了第 3 节对梯度重构方法的数学分析结论。

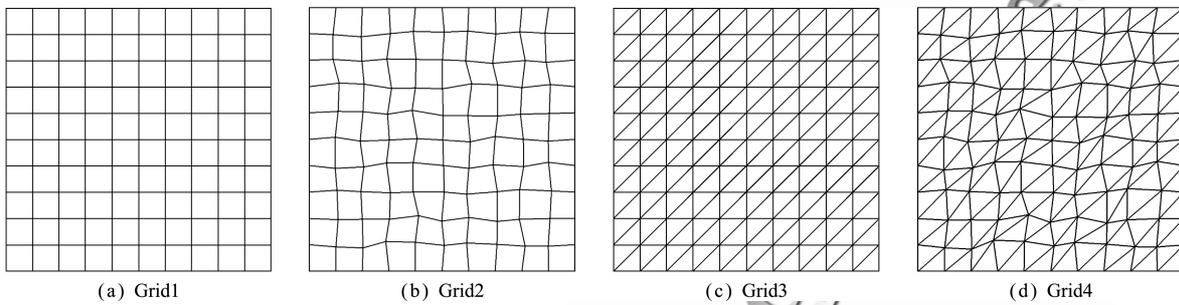


图 2 梯度重构测试网格
Fig. 2 Grids for gradient reconstruction tests

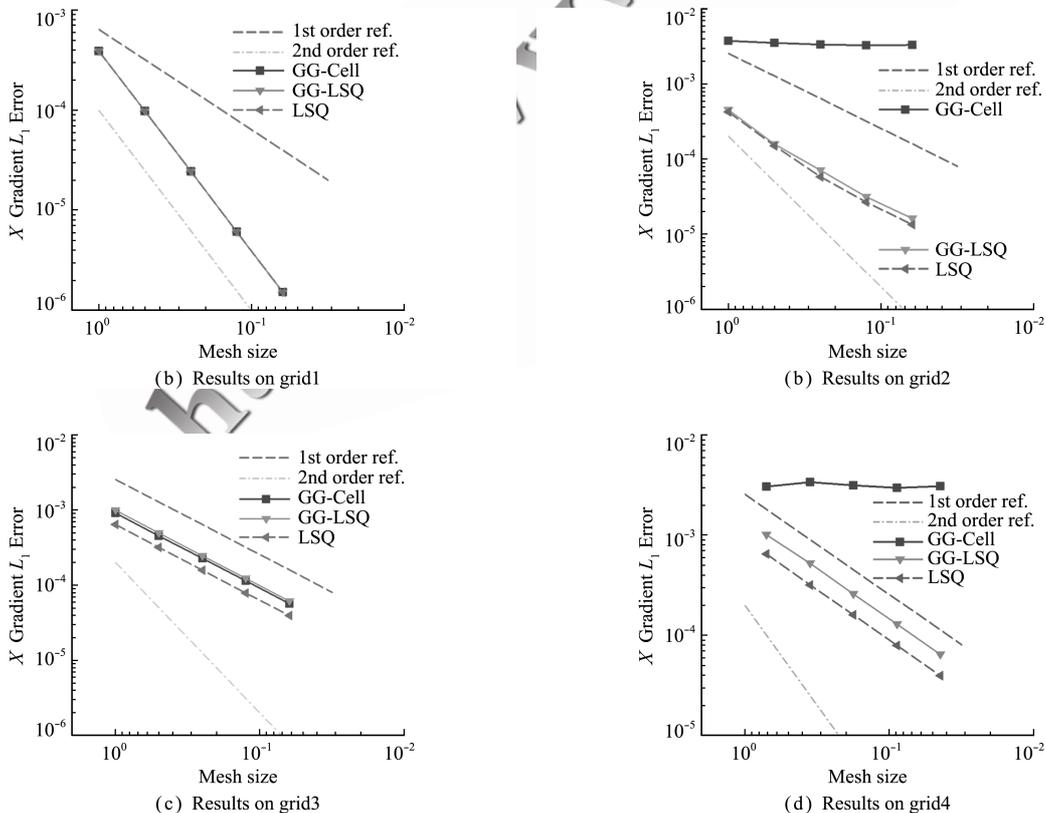


图 3 x 方向梯度离散误差网格收敛性测试结果
Fig. 3 Gradient discretization errors in x -direction

5 网格质量对计算精度的影响

通过上述分析,可以看出,在不同的网格质量和网格类型的情况下,梯度重构精度将受到不同程度的影响。本节将通过制造解方法量化数值离散误差,结合网格收敛性测试,研究不同网格质量和网格类型对无粘流动模拟精度的影响。

5.1 制造解方法

通常,需要一个精确解来测试离散格式的计算精度。但是大多数的可压缩粘性流动的精确解都过于简单,不能完整地体现控制方程的所有项。为了解决这个问题,Roache等^[17]提出了制造解方法MMS(Method of Manufactured Solutions)。

制造解方法的思路是选择任意的制造解代入原始的控制方程,一般来说,制造解不能满足原始的控制方程,代入控制方程后,右端项不为0,可以把引入的右端项设为源项。因而,制造解可以理解为带源项的修正方程(式(12))的精确解。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot F - \nabla \cdot F_v = S \quad (12)$$

在离散网格上利用数值方法求解修正的控制方程,得到数值解,数值解与精确解的差值即为离散误差。由此,便可以分析网格和离散方法对离散误差的影响,同时也可以分析离散误差随网格尺度变化的收敛情况。文献[12]指出只要制造解源项的处理方式与控制方程的离散方法在数值精度上相容,MMS方法是评价数值格式特性的有效方法。

本文将选择式(13)的无粘 Euler 制造解^[12]进行精度测试研究,制造解流场云图如图4所示。边界条件为 Dirichlet 边界,通过公式推导得到解析形式的源项,消除源项离散的误差。

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_0 + \rho_x \sin\left[\frac{\alpha_{\rho x} \pi x}{L}\right] + \rho_y \sin\left[\frac{\alpha_{\rho y} \pi y}{L}\right] + \\ &\quad \rho_{xy} \cos\left[\frac{\alpha_{\rho xy} \pi xy}{L^2}\right] \\ u(x, y) &= u_0 + u_x \sin\left[\frac{\alpha_{ux} \pi x}{L}\right] + u_y \sin\left[\frac{\alpha_{uy} \pi y}{L}\right] + \\ &\quad u_{xy} \cos\left[\frac{\alpha_{uxy} \pi xy}{L^2}\right] \\ v(x, y) &= v_0 + v_x \sin\left[\frac{\alpha_{vx} \pi x}{L}\right] + v_y \sin\left[\frac{\alpha_{vy} \pi y}{L}\right] + \\ &\quad v_{xy} \cos\left[\frac{\alpha_{vxy} \pi xy}{L^2}\right] \\ P(x, y) &= P_0 + P_x \sin\left[\frac{\alpha_{Px} \pi x}{L}\right] + P_y \sin\left[\frac{\alpha_{Py} \pi y}{L}\right] + \\ &\quad P_{xy} \cos\left[\frac{\alpha_{Pxy} \pi xy}{L^2}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

5.2 测试网格

第4节已经指出网格类型和网格扰动会对梯度重构精度产生影响。本节进一步考虑网格倾斜度和网格弯曲度对流动模拟精度的影响。制造解精度测试网格采用图2和图5所示的grid1~grid8的8种网格。

其中 grid5 和 grid6 是在规则矩形网格 grid1 和规则三角形网格 grid3 的基础上整体倾斜一定角度 σ 得到的; grid7 和 grid8 为曲面上的四边形网格和三角形网格, grid7 网格单元形状为梯形,存在一定的弯曲度。

如图6所示,弯曲度 Γ 根据式(14)来定义^[9], 其中 y_i 为 i 点在直角坐标系中的 y 坐标, R 为半径, h_θ 和 h_r 分别为 θ 方向和 r 方向的网格尺度, AR 为长细比。当保持网格尺度 h_θ 不变,增大长细比 AR 时,弯曲度 Γ 增大。

$$\Gamma = \frac{|y_1 - y_0|}{|y_3 - y_0|} = \frac{R - R \cos h_\theta}{2h_r} \approx \frac{Rh_\theta^2}{2h_r} = AR \frac{h_\theta}{2} \quad (14)$$

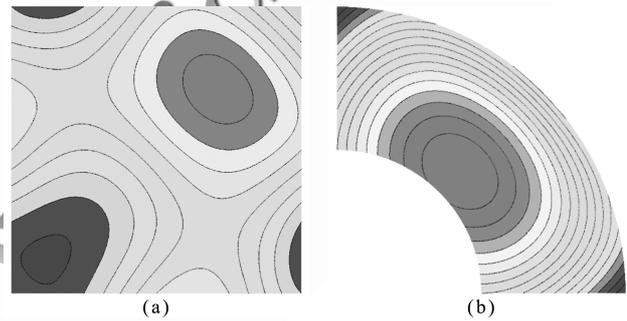


图4 两种 Euler 制造解流场密度云图

Fig. 4 Density contours of two Euler manufactured solutions

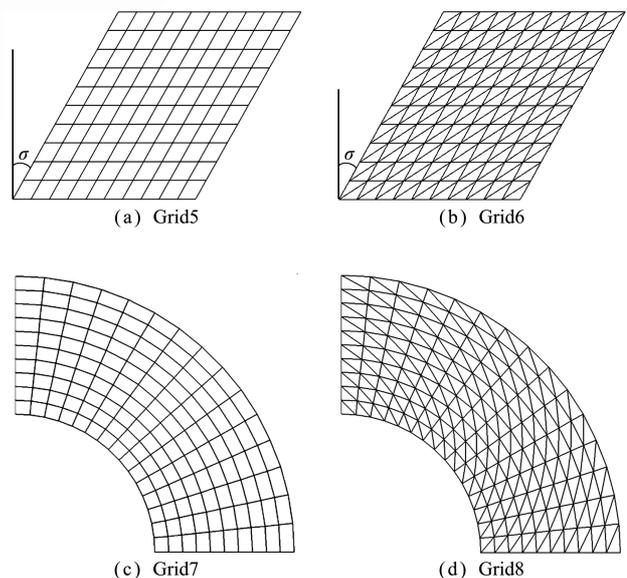


图5 制造解精度测试网格
Fig. 5 Grids for MMS tests

可以看出,网格越稀疏,弯曲度越大;当网格加密时,梯形网格逐渐接近矩形,弯曲度变小,平直矩形网格的弯曲度为0。

5.3 测试结果

网格收敛性测试选取5套依次加密的网格,数值模拟制造解流动,测试离散误差随网格尺度减小时的收敛情况。下文通过密度离散误差的 L_1 模随网格尺度(mesh size)变化的收敛结果来研究各种因素对模拟精度的影响。

(1) 网格类型的影响

图7给出了规则网格(grid1和grid3)和扰动后的非规则网格(grid2和grid4)对流动模拟精度的

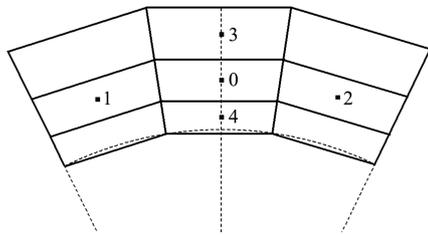
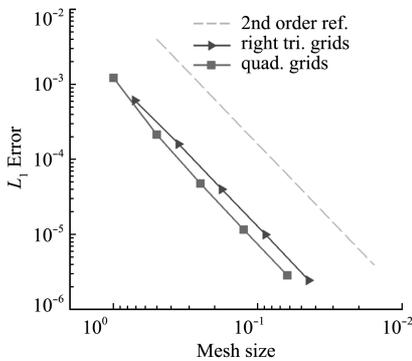


图6 曲面上的四边形网格
Fig. 6 Quadrilateral grids on curved surface

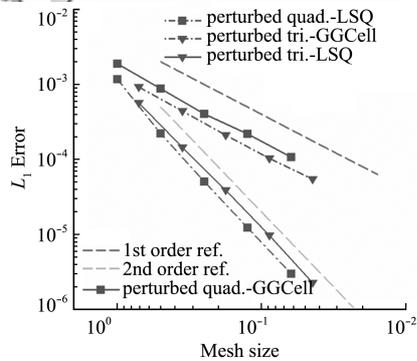
的影响。在图7(a)中,LSQ方法和GG-Cell方法的精度完全一致,因此只画出其中一种。由图7(a)可以看出,在规则网格上,四边形网格精度略高于三角形网格;在图7(b)中,LSQ方法表现类似,而GG-Cell方法在非规则的三角形网格上表现稍好。综合来看,各向同性网格下,网格类型对于无粘流动的数值模拟精度影响不明显。不过从网格数量的角度来看,虽然四边形网格和三角形网格的特征尺度一致,但是在同样的计算区域内,三角形网格数量大约是四边形网格的2倍,因此,即便是在误差水平大体一致的情况下,四边形网格也显示出了效率优势(高约1倍)。

(2) 网格点随机扰动的影响

图8给出了GG-Cell和LSQ两种方法在规则四边形网格(grid1)、扰动四边形网格(grid2)、规则三角形网格(grid3)和扰动三角形网格(grid4)上的精度收敛曲线。可以看到,网格扰动导致采用GG-Cell方法的流动模拟精度下降至一阶,流动求解绝对误差明显增大,而LSQ方法则对网格扰动不敏感。

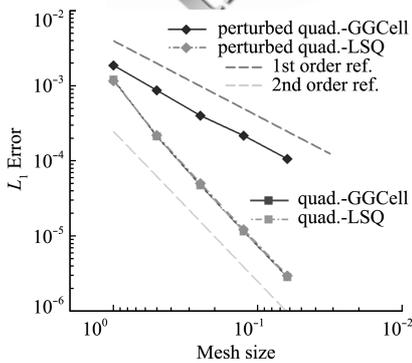


(a) Regular grids

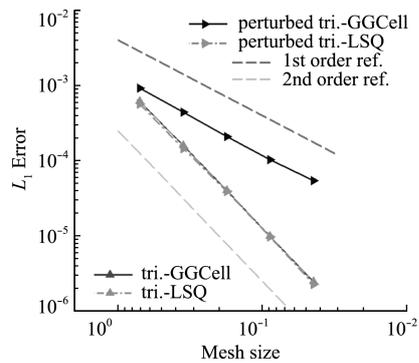


(b) Perturbed grids

图7 网格类型对流动模拟精度的影响
Fig. 7 Mesh type effects on numerical accuracy



(a) Quadrilateral grids



(b) Triangular grids

图8 网格扰动对流动模拟精度的影响
Fig. 8 Mesh perturbation effects on numerical accuracy

(3) 网格倾斜度的影响

图 9 给出了四边形网格(grid5)和三角形网格(grid6)倾斜角度分别为 0°,10°,30°,50°和 80°时的精度收敛曲线。结果显示,网格倾斜时,离散格式仍能保持二阶精度;但是随着倾斜角增大,绝对误差明显增大,即流动模拟精度出现了明显的下降,尤其是在倾斜角度从 50°增大到 80°时,绝对误差显著增大。

(4) 网格弯曲度的影响

图 10(a)给出了在曲面各向同性四边形网格(grid7)和三角形网格(grid8)上 GG-Cell 和 LSQ 方法的精度收敛曲线。结果显示,精度仍然达到二阶,在该情况下,网格弯曲度并未明显导致流动模拟精度降阶。其原因是在网格加密过程中,弯曲度极小,梯形网格近似于矩形网格,尽管径向交界面

的面心不平分左右单元的连线,但是面心与左右单元连线中点之间的位置偏差很小,导致面心插值误差中由位置偏差决定的误差一阶项比由网格尺度决定的误差二阶项还小,掩盖了一阶项,使面心插值呈现出二阶精度,梯度重构达到一阶精度,从而流动模拟达到二阶精度。

其次,同样可以看出,对于曲面各向同性网格,不同网格类型对流动模拟精度影响也不明显。但是,考虑到计算效率的因素,在同等精度的情况下,四边形网格在计算效率和资源消耗方面更具优势。

图 10(b)显示,当长细比 AR 增大,即弯曲度增大时,虽然仍然能够保持二阶精度,但是绝对误差明显增大。因此,在实际的无粘流动模拟中,在曲率较大的局部区域(如机翼前缘)适当加密网格可以减小网格弯曲度,有效提高流动模拟精度。

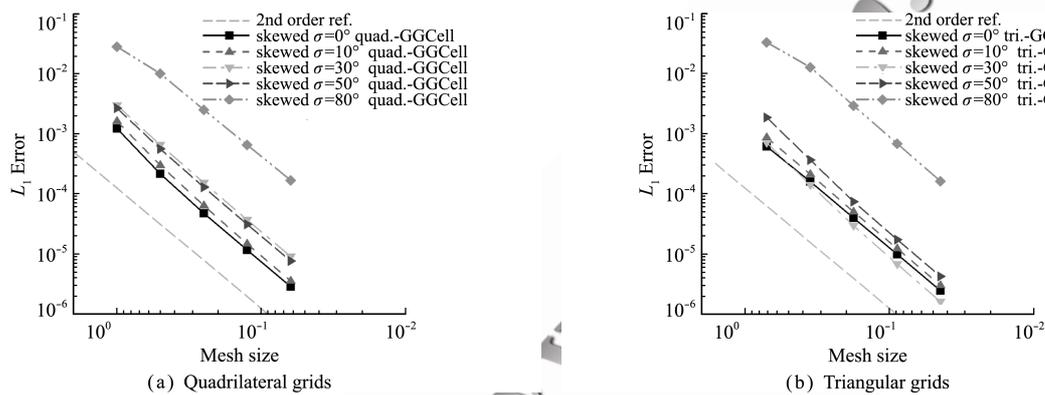


图 9 网格倾斜度对流动模拟精度的影响
Fig. 9 Mesh skewness effects on numerical accuracy

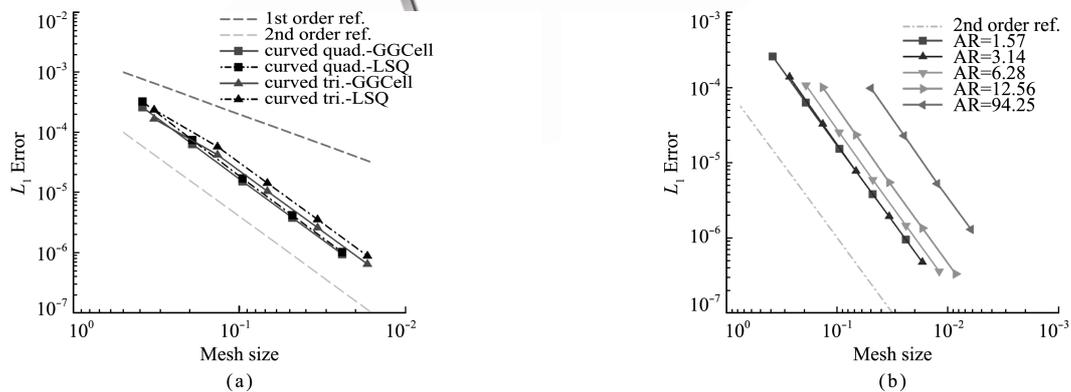


图 10 网格弯曲度对流动模拟精度的影响
Fig. 10 Mesh curvature effects on numerical accuracy

6 结 论

(1) 本文推导了两类常见的非结构网格梯度重构方法达到至少一阶精度的条件,GG 方法在面

值积分不能互相抵消的情况下,要求面心值插值达到二阶精度;而 LSQ 方法能够在任意非结构网格上达到至少一阶精度。梯度数值精度测试验证了数学推导结论。

(2) 本文针对各向同性网格,采用制造解方法模拟无粘流动,定量研究了网格质量及网格类型对流动模拟精度的影响。结果表明,在各向同性网格中,网格类型对梯度重构精度影响较大,但是对流动模拟精度影响并不明显。

(3) 网格质量对于计算结果的精度确有较大影响。网格扰动会导致GG-Cell方法以及其他不满足条件的GG方法梯度重构精度降阶,进而导致流动模拟精度降阶,模拟精度严重降低,而LSQ方法则对网格扰动不敏感。网格倾斜度虽不会使流动模拟的数值精度降阶,但是仍会降低模拟精度,导致绝对误差明显增大;在所考虑的情况下,网格弯曲度不会使流动模拟精度降阶,但是弯曲度增大时,绝对误差会明显增大。

(4) 在采用LSQ方法进行梯度重构时,四边形网格和三角形网格的计算精度大体一致,但是从计算效率的角度来看,四边形网格具有明显的优势。

本文仅对各向同性网格的无粘流动计算进行了精度分析。后续研究将针对各向异性网格,对网格长细比、拉伸比和弯曲度等因素对粘性流动模拟精度的影响进行研究。

参考文献(References):

- [1] Roe P L. Error Estimates for Cell-Vertex Solution of Compressible Euler Equations [R]. NASA Contract Report 178235, 1987.
- [2] Giles M B. Accuracy of node-based solutions on irregular meshes [A]. 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics [C]. 1989.
- [3] Lindquist D R. A Comparison of Numerical Schemes on Triangular and Quadrilateral Meshes [D]. Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- [4] Barth T J, Jespersen D C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes [A]. 27th Aerospace Sciences Meeting [C]. 1989.
- [5] Aftosmis M, Gaitonde D, Tavares T S. Behavior of linear reconstruction techniques on unstructured meshes [J]. *AIAA Journal*, 1995, **33** (11): 2038-2049.
- [6] Sozer E, Brehm C, Kiris C C. Gradient calculation methods on arbitrary polyhedral unstructured meshes for cell-centered CFD solvers [A]. 52nd Aerospace Sciences Meeting [C]. National Harbor, Maryland, 2014.
- [7] Smith T M, Barone M F, Bond R B, et al. Comparison of reconstruction techniques for unstructured mesh vertex centered finite volume schemes [A]. 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference [C]. 2007.
- [8] Mavriplis D J. Revisiting the Least-Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes [R]. NIA Report No. 2003-06.
- [9] Diskin B, Thomas J L. Accuracy of Gradient Reconstruction on Grids with High Aspect Ratio [R]. NIA Report No. 2008-12.
- [10] Diskin B, Thomas J L, Nielsen E J, et al. Comparison of node-centered and cell-centered unstructured finite-volume discretizations: viscous fluxes [A]. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting [C]. Orlando, 2009.
- [11] Diskin B, Thomas J L. Comparison of node-centered and cell-centered unstructured finite-volume discretizations: inviscid fluxes [J]. *AIAA Journal*, 2011, **49** (4): 836-854.
- [12] Katz A, Sankaran V. Mesh quality effects on the accuracy of CFD solutions on unstructured meshes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230** (20): 7670-7686.
- [13] Katz A, Sankaran V. High aspect ratio grid effects on the accuracy of Navier-Stokes solutions on unstructured meshes [J]. *Computers and Fluids*, 2012, **65**: 66-79.
- [14] Diskin B, Thomas J L. Effects of mesh regularity on accuracy of finite-volume schemes [A]. 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition [C]. Nashville, Tennessee, 2012.
- [15] Blazek J. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Application* [M]. ELSEVIER, 2001.
- [16] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43** (2): 357-372.
- [17] Roache P J, Steinberg S. Symbolic manipulation and computational fluid dynamics [J]. *AIAA Journal*, 1984, **22** (10): 1390-1394.

Mesh quality effects on the accuracy of gradient reconstruction and inviscid flow simulation on isotropic unstructured grids

WANG Nian-hua^{*1}, ZHANG Lai-ping^{1,2}, MA Rong¹, HE Xin^{1,2}

(1. Computational Aerodynamics Institute, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China;
2. State Key Laboratory of Aerodynamics, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract: The accuracy of gradient reconstruction methods implemented in unstructured cell-centered finite-volume discretization schemes were analyzed both theoretically and numerically. Conditions were derived for methods based on the Green-Gauss formula (GG methods) and methods based on the least squares approach (LSQ methods) to achieve at least first-order gradient reconstruction. For GG methods, second-order approximation of surface midpoint value is required when no cancellation effect occurs. On the other hand, LSQ methods are at least first-order accurate on arbitrary unstructured grids. Numerical testing on gradient reconstruction accuracy verified the mathematical conclusions. Solution errors of inviscid flow simulation were quantified using the Method of Manufactured Solutions (MMS). Grid convergence studies were performed to examine the effects of mesh quality, such as mesh perturbation, curvature, skewness and mesh type on the accuracy of inviscid flow simulation.

Key words: unstructured grids; gradient reconstruction; numerical accuracy; Method of Manufactured Solutions; grid convergence study

<http://www.cjcm.net>

引用本文/Cite this paper:

王年华,张来平,马戎,等.非结构网格质量对梯度重构及无粘流动模拟精度的影响[J].计算力学学报,2017,34(5):555-563.

WANG Nian-hua,ZHANG Lai-ping,MA Rong,et al. Mesh quality effects on the accuracy of gradient reconstruction and inviscid flow simulation on isotropic unstructured grids [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2017,34(5):555-563.