

双曲面摩擦摆支座典型桥梁的地震响应研究

廖平¹, 赵人达^{*1}, 贾毅¹, 邱新林², 庞立果²

(1. 西南交通大学 土木工程学院 桥梁系, 成都 610031; 2. 广东省南粤交通潮漳高速公路管理中心, 广州 510101)

摘要:为研究不同因素对粤东高烈度地区双曲面摩擦摆支座高速公路典型桥梁工程地震响应的影响,选取潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55)m为研究对象,该桥所有墩梁之间均采用双曲面摩擦摆支座。采用 ANSYS 有限元软件建立全桥模型,基于时程分析法研究了多种因素下桥梁结构的地震响应。研究表明,在纵桥向地震动激励下,桩土的相互作用对各桥墩墩底地震响应影响显著;栓钉全部剪断比栓钉全部不剪断的各桥墩墩底弯矩和剪力分布更均匀,桥墩上的固定支座栓钉不剪断将会增加该桥墩的弯矩、剪力以及支座剪力,但对其他桥墩的影响较小;该研究成果可应用于带栓钉的摩擦摆支座桥梁的地震响应分析。

关键词:双曲面摩擦摆支座;栓钉剪断;地震响应;非线性时程分析法;桩土作用;二期恒载

中图分类号:O324

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2017)04-0529-06

1 引言

粤东地区处于我国五大地震带之一的华南地震区的东南沿海外带地震带,为 IX 度地震设防区域。位于粤东高烈度地区的潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55)m 采用了双曲面摩擦摆减隔震支座,此类型支座由 Zayas 等^[1]提出。由于该支座存在圆弧滑动面,故具有较强的自复位能力,并且该支座还具有较高的稳定性和良好的力学性能^[2,3],已在中小跨度公路桥梁、大跨度铁路桥梁及建筑结构中得到广泛应用。在正常使用荷载作用和小震作用下,该支座可以依靠上部结构自重产生的摩擦力来保持平衡,但对于大跨度铁路桥梁,列车产生的制动力较大,必须在摩擦摆支座中增设栓钉才能抵抗;在罕遇地震作用下,可通过栓钉的剪切破坏后摩擦摆支座的自由摆动来耗散地震能量,栓钉提供的水平承载力可以通过抗震栓钉的数量和直径进行调整^[4]。

潮安韩江特大桥主桥在横桥向每个支座均设置有横向限位栓钉,在纵桥向仅固定支座设置有纵向限位栓钉,摩擦摆支座中是否设置栓钉,其恢复力模型有着显著的区别,而栓钉剪断与否对结构的地震响应也有一定程度的影响。目前,国内外学者^[5-12]针对桥梁结构地震响应进行了大量的理论

分析和试验研究,但考虑双曲面摩擦摆支座栓钉剪断对桥梁结构地震响应的影响却鲜有文献提及,夏修身等^[13]对此进行了一定的研究,其在采用 ANSYS 进行分析时,未考虑桩土作用、二期恒载、墩高及部分固定支座栓钉剪断等对桥梁结构地震响应的影响。

本文在进行栓钉剪断对桥梁结构地震响应影响的研究时,所采用的栓钉模拟方法与夏修身等^[13]有所区别,并在一定程度上减小了计算分析时间,且精度相当。在粤东高烈度地区已建高速公路中桥梁工程占有很大比重,且目前这方面的研究还较为欠缺,所以针对粤东地区典型桥梁工程固定支座栓钉剪断对桥梁地震响应的影响进行深入研究具有重大的理论和实践意义。

2 摩擦摆固定支座恢复力模型

根据欧洲规范 Eurocode 8,在单向地震作用下,摩擦摆减隔震支座可简化为双线性模型^[14],文献^[15]指出对于采用摩擦摆支座的减隔震桥梁,若不考虑竖向地震动的影响,摩擦摆支座的滞回模型可以近似采用双线性模型模拟。本文所采用的带栓钉摩擦摆固定支座的恢复力模型与文献^[13]相同,如图 1 所示。摩擦摆支座的初始刚度为

$$K_1' = (\mu \cdot W + P) / D_y'$$

式中 W 为摩擦摆支座承受的竖向荷载, D_y' 为支座的屈服位移, P 为栓钉的抗剪承载力, μ 为摩擦摆支座的摩擦系数。摩擦摆支座的二次刚度或屈服刚度 $K_2 = W/R$, R 为摩擦摆支座球心距。在中

收稿日期:2016-07-23;修改稿收到日期:2016-10-31.

基金项目:广东省交通厅科技计划(科技-2014-02-015)资助项目.

作者简介:赵人达^{*}(1961-),男,博士,教授
(E-mail:rendazhao@163.com).

震和大震作用下,栓钉剪断,支座恢复力模型如图1所示;而在正常使用荷载和小震作用下,当栓钉不剪断时,支座性质保持不变即仍为固定支座,其滞回曲线为图1可逆的路径1。

3 ANSYS 有限元模型的建立

3.1 模型采用的单元及边界

采用 ANSYS 有限元软件建立潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55)m 三维梁单元模型,其主梁为单箱单室变截面箱梁,梁底线形为二次抛物线,主梁及桥墩采用 beam188 梁单元模拟,主桥桩基础采用直径 2.2 m 的混凝土钻孔灌注桩,桩土相互作用采用 combin14 弹簧阻尼单元模拟,二期恒载通过给节点添加集中质量来考虑,集中质量采用 mass21 单元来模拟,将 combin40 单元的 keyopt 取不同值来模拟摩擦摆支座及栓钉。潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55)m 的漳州侧左一联为 3 m×30 m 小箱梁(简支梁桥)与潮州侧右一联为 4 m×40 m T 梁(连续梁桥)的有限元模型所采用的单元与主桥相同,仅材料不同,全桥有限元模型如图2所示。

11[#]~13[#]桥墩的支座为固定支座,9[#],10[#],14[#]和15[#]桥墩的支座为活动支座。根据设计施工图,活动支座在横桥向设置有抗剪栓钉(即纵向活动),固定支座在横桥向与纵桥向均设置有抗剪栓钉(即双向固定),摩擦摆支座横桥向和顺桥向构造如图3和图4所示。在每个桥墩的桩底施加固定约束,承台与桩基和桥墩通过添加刚域的方式考虑相互之间的约束,建立全桥有限元模型时考虑相邻左右各一联对主桥的影响,桩土相互作用采用

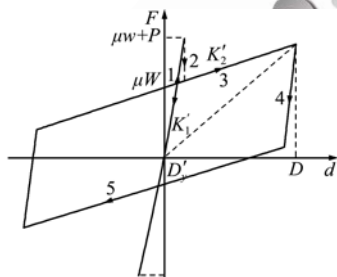


图1 带栓钉的摩擦摆支座恢复力模型

Fig.1 Restoring force model of friction pendulum bearing with studs



图2 全桥有限元模型

Fig.2 Finite element model of full bridge

等效土弹簧模拟,结构阻尼采用瑞利阻尼。

3.2 摩擦摆支座及栓钉的模拟

通过将 3 个 combin40 单元和 1 个 combin14 单元并联组合来模拟摩擦摆支座,即纵桥向和横桥向分别采用 1 个 combin40 单元来模拟水平向自由度,竖向采用 1 个 combin14 单元来模拟,栓钉采用 1 个 combin40 单元来模拟(固定支座采用 2 个,活动支座采用 1 个)。栓钉剪断失效可通过 combin40 单元的分离特性来模拟,将支座极限滑移力 F 以 $-|FSLIDE|$ 的形式输入,在 ANSYS 计算分析中便可模拟栓钉剪断失效的全过程,即当支座水平剪力扣除支座摩擦力后超过其极限滑移力 F 时,栓钉剪断失效,弹簧刚度 K_1 降为 0。栓钉的剪断力(滑移力)为 $1.2e5$ N, K_1 为 $2.4e8$ N/m,单元的其余参数均设置为 0。9[#]和15[#]墩摩擦摆支座的 K_1 、 K_2 、滑移力、等效阻尼和竖向刚度分别为 $3.20e7$ N/m, $1.47e6$ N/m, $1.60e4$ N, $7.88e5$ N·s/m 和 $2.00e10$ N/m,10[#]~14[#]墩摩擦摆支座的 K_1 、 K_2 、滑移力、等效阻尼和竖向刚度分别为 $2.80e8$ N/m, $4.45e6$ N/m, $1.40e5$ N, $4.19e6$ N·s/m 和 $8.80e10$ N/m。

计算分析时采用 EI Centro 波作为输入地震动并将幅值调整到 0.20 g,仅计算响应较大的前 30 s,如图5所示。

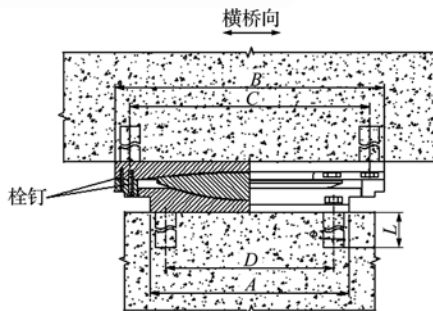


图3 摩擦摆支座横桥向构造图

Fig.3 Traversing structural diagram of friction pendulum bearing

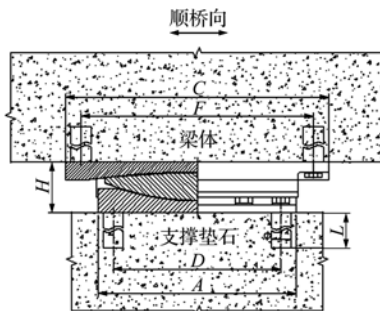


图4 摩擦摆支座顺桥向布置图

Fig.4 Longitudinal structural diagram of friction pendulum bearing

4 桩土相互作用对桥梁结构地震响应的影响

目前,国内外学者针对桩土相互作用对桥梁结构地震响应的影响进行了大量的研究,但是考虑摩擦摆支座栓钉剪断,并在此基础上研究桩土相互作用对桥梁结构地震响应的影响却鲜有文献提及。有无栓钉及栓钉剪断与否均对摩擦摆支座的滞回曲线有显著的影响,桥梁结构的地震响应也会发生显著的变化。本文在研究桥梁结构地震响应时,考虑所有固定墩(11[#]~13[#]桥墩)上固定支座的限位栓钉在纵桥向地震动激励下均剪断,并在此基础上研究桩土相互作用对桥梁结构地震的影响。

研究表明,桩与土的相互作用对地震荷载作用下桥梁结构的动力响应有一定的影响,主要是桩土相互作用直接影响桥梁结构的边界约束,改变了结构刚度和自振特性,土对桩的作用相当于给桩的四周添加了弹性支撑,使整个结构的刚度和动力特性发生改变,进而对桥梁结构的动力响应产生直接的影响。土的抗力取值根据场地情况并结合 JTG/T B02-01-2008 公路桥梁抗震设计细则,一般取 $m_{动}=2.5m_{静}$,土弹簧刚度沿桥梁纵横向分别计算。土弹簧的计算方法是根据安评报告提供的地质资料,对桥梁所处场地土层沿顺桥向分段划分,然后对土层按厚度划分,最后按照 m 值法的计算公式计算每层土对桩的约束弹簧刚度值为 $K=m\cdot c\cdot a\cdot z$ 。其中 K 为土弹簧计算刚度, m 为土层系数,可查阅相关书籍和地基规范确定, a 为桩基的有效宽度,根据地基规范计算获得, c 为所计算土层的厚度,深度 z 为地表至所计算土层的距离。在 ANSYS 实际模拟中,将 combin14 单元的刚度取为上述计算的约束弹簧刚度,而单元阻尼设置为 0。

主桥的桥面铺装由防水层与 11 cm 厚的沥青混凝土组成,主桥左右相邻一联的桥面铺装由 10 cm 厚 C40 混凝土、防水层及 11 cm 厚的沥青混

凝土组成,沥青混凝土密度取为 2450 kg/m³,铺装宽度近似取为桥梁横桥向宽度 11.5 m。建模时,在主桥和引桥的主梁节点上以添加节点集中质量的方式来考虑二期恒载。

为分析桩土作用对桥梁结构地震响应的影响,考虑桩土相互作用的工况记为工况 1,不考虑桩土相互作用的工况记为工况 2,计算分析结果列入表 1,差异=(工况 2 响应-工况 1 响应)/工况 1 响应×100%。

图 6 和图 7 分别展示了带栓钉的摩擦摆支座和不带栓钉的摩擦摆支座的滞回曲线,栓钉剪断时支座纵桥向支座水平剪力有突变,同时这也验证了前述方法模拟摩擦摆支座的可行性。

由表 1 可知,除 9[#]墩底弯矩外,桩土相互作用对其余各墩墩底弯矩、剪力及支座纵桥向剪力和位移影响均较大,桩土相互作用对 9[#]和 12[#]墩的支座纵桥向剪力及位移影响较小,均在 8%以内。还可以看出,不考虑桩土相互作用会使 13[#]和 14[#]墩墩底纵桥向最大弯矩和剪力的计算结果偏小,而使其他墩墩底纵桥向最大弯矩和剪力的计算结果偏大。不考虑桩土相互作用会使 13[#],14[#]和 15[#]墩支座纵桥向地震响应偏小,而使其他墩支座纵桥向地震响应偏大。

表 1 工况 1 与工况 2 下桥梁结构纵桥向地震响应对比表

Tab. 1 Comparison table of longitudinal seismic response of bridge structure under case 1 and case 2

墩号	墩底响应/%		支座响应/%	
	弯矩差异	剪力差异	剪力差异	位移差异
9 [#]	-3.32	60.56	-1.01	-1.17
10 [#]	45.32	36.05	49.84	66.61
11 [#]	59.23	64.81	43.85	59.34
12 [#]	30.94	50.32	5.32	7.22
13 [#]	-61.96	-58.89	-56.15	-74.30
14 [#]	-14.87	-25.96	-47.71	-63.68
15 [#]	22.73	47.89	-60.14	-71.58

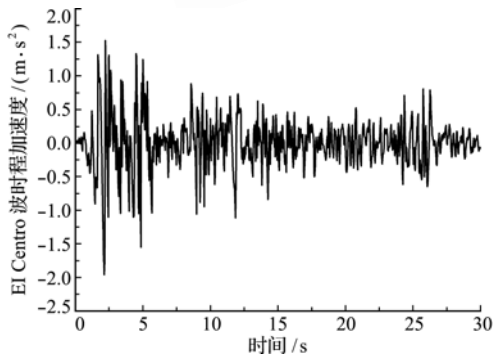


图 5 EI Centro 波加速度时程曲线

Fig. 5 Acceleration time history curve of El Centro wave

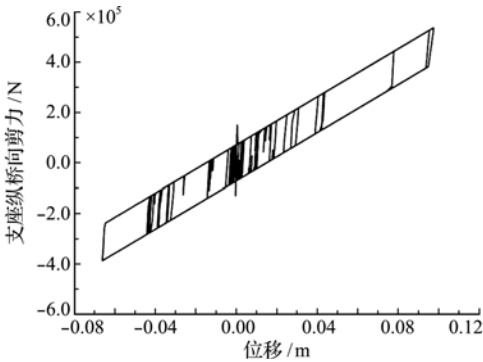


图 6 13[#]墩固定支座滞回曲线

Fig. 6 Hysteresis curve of 13[#] pier's fixed bearing

5 部分固定支座栓钉剪断的桥梁结构地震响应

摩擦摆支座在铁路与公路桥梁中应用越来越广泛,为抵抗较大的车辆制动所产生的制动力,常常需要在摩擦摆支座中增设栓钉,栓钉剪断时固定支座变为活动支座,栓钉未剪断则支座保持原固定状态不变。

在地震作用下存在仅部分固定支座栓钉剪断的情形,为了分析此种情形下桥梁结构地震响应,因横桥向地震动激励下桥梁结构的地震响应分析可以采取完全相同的方法进行,且分析内容均相同,限于篇幅,分析中仅考虑纵桥向地震动激励下桥梁结构的地震响应。研究分析表明,在纵桥向地震动作用下横向栓钉不易剪断,支座性能保持不变,即原横向为活动的支座仍为横向活动。纵桥向地震动激励下栓钉的剪断情况列入表2,表中1[#]、2[#]和3[#]栓钉分别表示11[#]~13[#]桥墩双曲摩擦摆支座的纵桥向限位栓钉。

采用大型通用有限元软件 ANSYS 进行潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55) m 的地震响应分析,仅在纵桥向施加地震动激励,不同工况下栓钉的剪断可以通过调节栓钉抗力来实现(ANSYS 中可通过调整 combin40 单元的 FSLIDE 来模拟),

图8~图10展示了当双曲面摩擦摆支座的屈服位移为0.5 mm,球心距为3.6 m,摩擦系数为0.04时,桥梁结构地震响应的部分结果。各工况桥梁结构地震响应有元计算分析结果对比如图11~图14所示。

可以看出,栓钉全部剪断比栓钉全部不剪断的各桥墩墩底弯矩和剪力分布更均匀,某桥墩上的固定支座栓钉不剪断将会增加该墩的弯矩、剪力和支座剪力,但对其他桥墩的影响较小。11[#]桥墩固定支座栓钉不剪断时的各桥墩墩底剪力和弯矩分布比12[#]和13[#]桥墩固定支座栓钉不剪断时更加均匀,其最大弯矩和剪力均较小。

计算结果表明,在进行摩擦摆支座栓钉设计

表2 纵桥向激励的栓钉剪断工况

Tab. 2 Stud rupture case under the longitudinal ground motion excitation

工况	1 [#] 栓钉	2 [#] 栓钉	3 [#] 栓钉
工况1	0	0	0
工况2	1	0	0
工况3	0	1	0
工况4	0	0	1
工况5	1	1	0
工况6	1	0	1
工况7	0	1	1
工况8	1	1	1

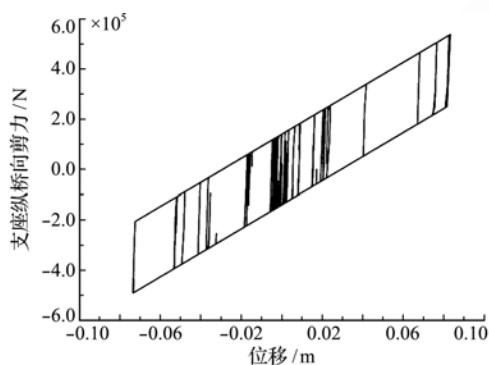


图7 10[#]墩活动支座滞回曲线

Fig. 7 Hysteresis curve of 10[#] pier's fixed bearing

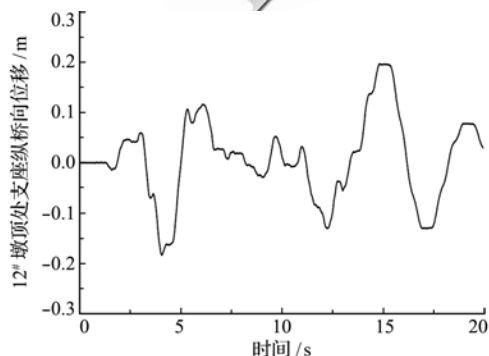


图9 12[#]墩支墩纵桥向位移时程曲线

Fig. 9 Longitudinal displacement time history curve of the bearing of 12[#] pile

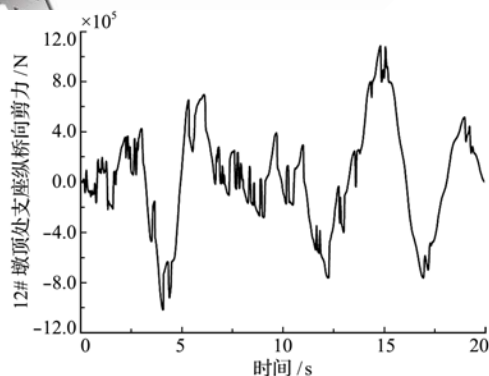


图8 12[#]墩支墩纵桥向剪力时程曲线

Fig. 8 Longitudinal shear force time history curve of the bearing of 12[#] pile

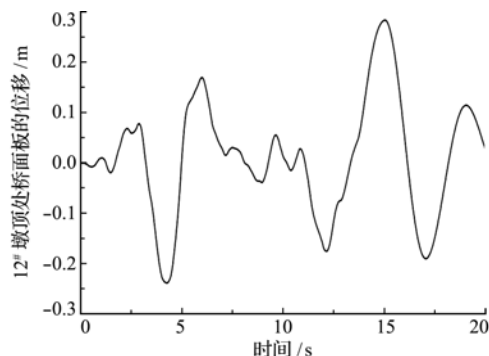


图10 12[#]墩墩顶处桥面板纵桥向位移时程曲线

Fig. 10 Longitudinal displacement time history curve of bridge panel at the top of 12[#] pier

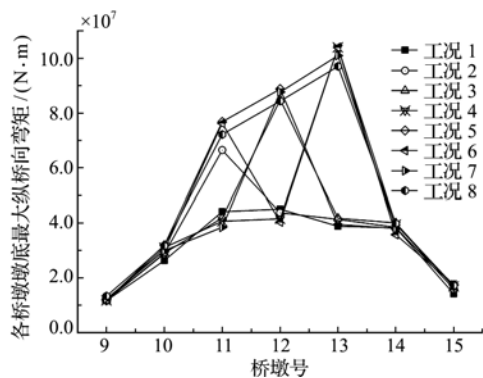


图 11 不同工况下各桥墩墩底最大纵桥向弯矩
Fig. 11 Longitudinal maximum moment of each pile bottom under different cases

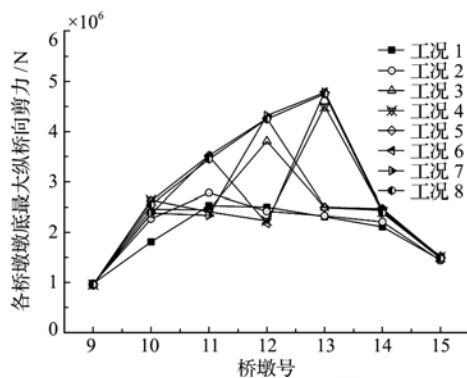


图 12 不同工况下各桥墩墩底最大纵桥向剪力
Fig. 12 Longitudinal maximum shear force of each pile under different cases

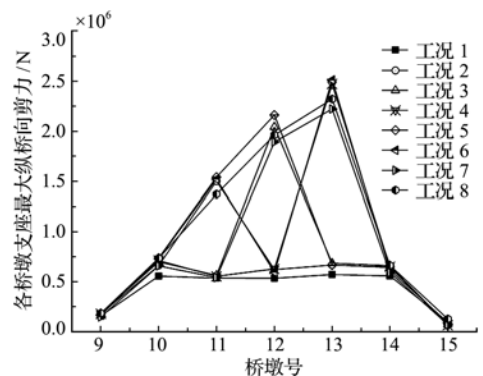


图 13 不同工况下各桥墩支座最大纵桥向剪力
Fig. 13 Longitudinal maximum shear force of each pile's bearing under different cases

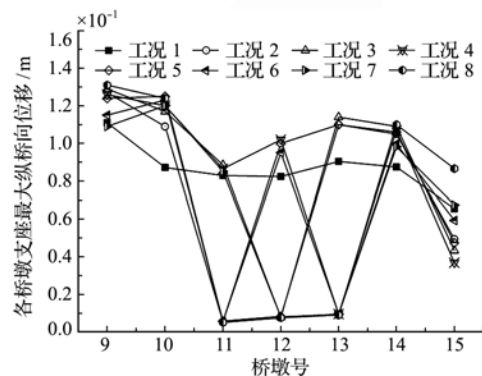


图 14 不同工况下各桥墩支座最大纵桥向位移
Fig. 14 Longitudinal maximum displacement of each pile's bearing under different cases

时,应保证栓钉在正常使用荷载下不剪断,使支座保持固定支座状态不变。同时,栓钉抗力也不宜过大,在强地震荷载作用下,固定支座栓钉应全部剪断,使各桥墩受力均匀,以达到栓钉剪断后充分发挥摩擦摆支座消耗地震能量的目的。

6 结 论

通过对不同因素下潮安韩江特大桥主桥(55+4×90+55)m 地震响应的研究,可得出以下结论。

(1) 纵桥向地震动激励下,主桥的二期恒载对各桥墩墩底地震响应影响较小,而桩土作用对各桥墩墩底地震响应影响较大,在桥梁结构地震响应分析中应重视桩土作用对桥梁结构地震响应的影响。

(2) 栓钉全部剪断比栓钉全部不剪断的各桥墩墩底弯矩和剪力分布更均匀,桥墩上的固定支座栓钉不剪断将会增加该桥墩的弯矩、剪力及支座剪力,但对其他桥墩的影响较小。

(3) 在设计固定支座栓钉时其抗力不宜过大,在强地震荷载作用下固定支座栓钉可全部剪断,使各桥墩受力更加均匀,达到栓钉剪断后充分发挥摩擦摆支座耗散地震能量以减小桥梁地震响应的目的。

参考文献(References):

- [1] Zayas V A, Low S S, Mahin S A. A Simple pendulum technique for achieving seismic isolation [J]. *Earthquake Spectra*, 1990, **6**(2): 317-331.
- [2] Su L, Ahmadi G, Tadjbakhsh I G. A comparative study of performances of various base isolation systems(part I) shear beam structures [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1989, **18**(1): 11-32.
- [3] Constantinou M C, Mokha A, Reinhorn A M. Teflon bearings in base isolation II: modeling [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1990, **116**(2): 455-474.
- [4] 庄军生. 桥梁减震、隔震支座和装置 [M]. 北京: 中国铁道科学出版社, 2012. (ZHUANG Jun-sheng. *Seismic Reduction and Isolation Bearings and Devices of Bridges* [M]. Beijing: China Railway Science Press, 2012. (in Chinese))
- [5] Mokha A S, Amin N, Constantinou M C, et al. Seismic isolation retrofit of large historic building [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1996, **122**(3): 298-308.
- [6] Warn G P, Whittaker A S. Property modification factors for seismically isolated bridges [J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2006, **11**(3): 371-377.
- [7] Providakis C P. Effect of supplemental damping on

- LRB and FPS seismic isolators under near-fault ground motions [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2009, **29**(1): 80-90.
- [8] 夏修身, 赵会东, 欧阳辉来. 高速铁路桥梁基于摩擦摆支座的减隔震研究 [J]. 工程抗震与加固改造, 2014, **36**(3): 21-26. (XIA Xiu-shen, ZHAO Hui-dong, OUYANG Hui-lai. Study on seismic isolation of high speed railway bridge with friction pendulum bearings [J]. *Earthquake Resistant Engineering and Retrofitting*, 2014, **36**(3): 21-26. (in Chinese))
- [9] 樊 剑, 龙晓鸿, 赵 军. 计算近场地震作用下隔震结构支座破坏易损性曲线的概率凸集混合模型 [J]. 计算力学学报, 2014, **31**(2): 199-203. (FAN Jian, LONG Xiao-hong, ZHAO Jun. A hybrid probabilistic and convex model for calculating the vulnerability curve of the failure of isolation bearing under near-fault earthquake ground motion [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, **31**(2): 199-203. (in Chinese))
- [10] 吴宜峰, 李爱群, 王 浩. 连续梁桥摩擦摆支座参数分析与优化 [J]. 桥梁建设, 2015, **45**(1): 20-24. (WU Yi-feng, LI Ai-qun, WANG Hao. Parameter analysis and optimization of frictional pendulum bearings for continuous girder bridge [J]. *Bridge Construction*, 2015, **45**(1): 20-24. (in Chinese))
- [11] Fenz D M, Constantinou M C. Behavior of the double concave friction pendulum bearing [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2006, **35**(11): 1403-1424.
- [12] 王志英, 张常勇. 大跨度连续钢桁梁桥摩擦摆支座减隔震设计分析 [J]. 桥梁建设, 2015, **45**(2): 58-64. (WANG Zhi-ying, ZHANG Chang-yong. Design and analysis of friction pendulum bearings for seismic mitigation and isolation of long span continuous steel truss girder bridge [J]. *Bridge Construction*, 2015, **45**(2): 58-64. (in Chinese))
- [13] 夏修身, 陈兴冲, 王希慧, 等. 剪力键对隔震桥梁地震反应的影响 [J]. 地震工程与工程振动, 2012, **32**(6): 104-109. (XIA Xiu-shen, CHEN Xing-chong, WANG Xi-hui, et al. Effect of shear key on seismic responses of bridge using isolation bearing [J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2012, **32**(6): 104-109. (in Chinese))
- [14] Eurocode8-Design of Structures for Earth-quake Resistance-Part 2; Bridges [S]. BS EN 1998-2; 2005.
- [15] 张永亮, 张跃进, 王常峰. 竖向地震动对摩擦摆支座隔震桥梁地震反应的影响 [J]. 兰州交通大学学报, 2012, **31**(1): 18-22. (ZHANG Yong-liang, ZHANG Yue-jin, WANG Chang-feng. Effect of vertical ground motion on seismic response of an isolated bridge with FPS [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University*, 2012, **31**(1): 18-22. (in Chinese))

Study on seismic response of the typical bridge with hyperbolic surface friction pendulum bearings

LIAO Ping¹, ZHAO Ren-da^{*1}, JIA Yi¹, QIU Xin-lin², PANG Li-guo²

(1. Department of Bridge Engineering, School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

2. Chaozhang Expressway Management Center of Guangdong Province Nanyue Communication, Guangzhou 510101, China)

Abstract: In order to study the effect of different factors on seismic response of typical highway bridge with hyperbolic surface friction pendulum bearings in high earthquake intensity area of eastern Guangdong, Chao'an Hanjiang River Bridge with spans of $(55+4\times 90+55)$ m was selected as the research object. The hyperbolic surface friction pendulum bearings were used in this bridge. The full bridge model was established by using the finite element software ANSYS, and the effect of different factors on seismic response of the bridge structure was studied by a time history analysis method. Research shows that: pile-soil interaction has a great influence on seismic response at each pier bottom under the longitudinal ground motion excitation; moment and shear force distribution at the bottom of each pier are more uniform when all studs are cut off than no studs cut. The fixed bearings studs of the pier are not cut, which will increase the shear of the bearing, shear force and moment of this pier. But there is only a small influence on other piers. This research result can be used in seismic response analysis of bridges with hyperbolic surface friction pendulum bearings including studs.

Key words: hyperbolic surface friction pendulum bearing; stud rupture; parameter analysis; nonlinear time history analysis method; pile-soil interaction; secondary dead load

引用本文/Cite this paper:

廖 平, 赵人达, 贾 毅, 等. 双曲面摩擦摆支座典型桥梁的地震响应研究 [J]. 计算力学学报, 2017, **34**(4): 529-534.

LIAO Ping, ZHAO Ren-da, JIA Yi, et al. Study on seismic response of the typical bridge with hyperbolic surface friction pendulum bearings [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(4): 529-534.