

液浮转子微陀螺筒间流动阻力矩参数影响

孙 健^{*1,2}, 许春晓², 黄伟希²

(1. 中国航天空气动力技术研究院, 北京 100074; 2. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘 要:建立简化计算模型,将一种具有空间指数收敛特性的谱元-Fourier法引入复杂的液浮转子微陀螺筒间流动的直接数值模拟。对于柱坐标系下不可压缩 Navier-Stokes 方程,在子午面的径向和轴向采用 Galerkin 谱元法,进行标准化的 Gauss-Lobatto-Legendre 节点展开,在周向采用 Fourier 级数展开法。设定基准算例,计算分析了高径比、旋转速度和黏性系数等参数对内筒侧面和内筒端面阻力矩的影响。结果表明,两种阻力矩都随这些参数的增大而增大,且对总阻力矩的贡献量级相当。

关键词:液浮转子微陀螺;阻力矩;谱元-Fourier法;Navier-Stokes方程;直接数值模拟

中图分类号:TP273;O351.2

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2017)04-0493-08

1 引 言

液浮转子微陀螺是许多导航控制系统中的高精度惯性敏感部件,它采用 MEMS(micro-electro-mechanical systems)技术,具有体积小、重量轻、功耗低、抗过载能力强以及恶劣环境适应性高等突出特点。通常,它的基本结构由固定的外筒框架和同轴旋转的内筒转子组成,筒间充满液体。工作时,内筒转速很高,产生筒间流动阻力问题,造成摩擦能量损失。

液浮转子微陀螺筒间流动可以简化为一种含端盖筒间流动,具有复杂的流体动力学特征。一方面,侧面狭缝内的流动类似于 Taylor-Couette 流,它以 Taylor 数为临界参数,可由环形 Couette 流态分岔为 Taylor 涡流态,直至湍流^[1]。另一方面,两端狭缝内的流动类似于同轴盘间旋转流,它以旋转 Reynolds 数和高径比为变化参数,呈现出 Batchelor 型或 Stewartson 型流态,产生诸如 Ekman 边界层和类刚体旋转核心区等复杂现象^[2,3]。在离心效应和 Coriolis 效应作用下,这些流动多为不稳定或湍流流动,因此近些年在计算上常采用大涡模拟或直接数值模拟研究。采用大涡模拟方法,Hadziabdic 等^[4]分析了外筒旋转速度对涡结构及统计特性的影响,Andersson 等^[5]讨论了盘间高度对流动三维性的影响。采用直接数值模拟方法,Nemri 等^[6]对比了流动结构对筒间轴向扩散系数

的影响,Poncet 等^[7]观察了盘间表面边界层的相互影响。然而,这些计算研究均非直接以液浮转子微陀螺为应用对象。另外,就计算方法而言,大涡模拟方法自身在该类问题的有效应用上尚需进一步验证,如亚网格尺度模型^[8],而直接数值模拟方法的准确性则相对更高。

本文拟针对液浮转子微陀螺筒间流动建立简化计算模型,引入一种基于原始变量的混合空间离散数值求解柱坐标系下不可压缩 Navier-Stokes 方程的谱元-Fourier 法,进行直接数值模拟,重点分析高径比、旋转速度和黏性系数等几何参数或流动参数对阻力矩的影响。

2 简化计算模型

将液浮转子微陀螺的基本结构简化为两端对称包含有缝端盖的同轴圆筒几何外形,封闭的筒间充满等密度不可压缩 Newton 流体。如图 1 所示,外筒固定,半径为 R ,高度为 H ;内筒旋转,旋转速度为 Ω 。特别地,外筒和端盖与内筒之间的狭缝距离相等,记作 d ,故内筒的半径为 $R-d$,高度为 $H-2d$ 。图 1 还给出了计算所采用的柱坐标系 (r, θ, z) ,

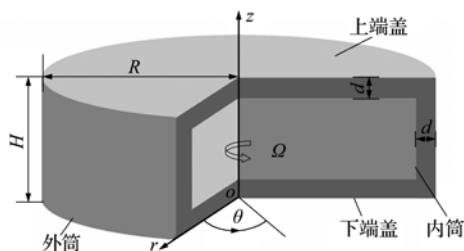


图 1 简化计算示意图

Fig. 1 Simplified schematic for computation

收稿日期:2016-04-26;修改稿收到日期:2016-08-25.

基金项目:国家自然科学基金(11322221,11472154)资助项目.

作者简介:孙 健^{*}(1987-),男,博士生,助理工程师

(E-mail:547800790@qq.com).

其中 r 为径向坐标, θ 为周向坐标, z 为轴向坐标, 原点 O 位于下端盖中心。

假设筒间流动满足不可压缩 Navier-Stokes 方程, 并忽略彻体力。柱坐标系下为

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right] \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right] \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v \cdot \nabla v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \end{aligned}$$

式中 (v_r, v_θ, v_z) 为速度分量, p 为压力, ρ 为密度, ν 为运动黏性系数。Hamilton 算子和 Laplace 算子分别为

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

3 直接数值模拟方法

Blackburn 等^[9]提出了一种基于原始变量数值求解柱坐标系下不可压缩 Navier-Stokes 方程的方法。它是一种混合空间离散方法, 即谱元-Fourier 法 SEFM (Spectral Element-Fourier Method), 在子午面的径向和轴向采用 Galerkin 谱元法, 在周向采用 Fourier 级数展开法。该方法的主要特点是, 在子午面的径向和轴向均采用标准化的 Gauss-Lobatto-Legendre 节点展开, 并以 Galerkin 投影消除所有几何奇性, 在 3 个空间方向均实现了指数收敛。因此, 根据第 2 节的简化计算模型, 将该方法引入液浮转子微陀螺筒间流动问题的直接数值模拟。

3.1 Fourier 级数展开

记原始变量为 $f = (v, p)$, 因其在周向以 2π 为周期, 故可写作周向 θ 的 Fourier 级数展开形式:

$$f(r, \theta, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k(r, z, t) \exp(ik\theta)$$

式中 k 为周向波数, 对应 k 模态。Fourier 系数

$$\hat{f}_k(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta, z, t) \exp(-ik\theta) d\theta$$

实函数的 Fourier 系数具有复共轭对称性, 实际计算只保留非负波数的 Fourier 系数, 即 $k=0, 1, 2, \dots$ 。于是, 柱坐标系下, 对应 k 模态的不可压缩 Navier-Stokes 方程变为

$$\frac{\partial \hat{v}_{r,k}}{\partial r} + \frac{ik}{r} \hat{v}_{\theta,k} + \frac{\partial \hat{v}_{z,k}}{\partial z} + \frac{\hat{v}_{r,k}}{r} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{v}_{r,k}}{\partial t} + \hat{N}_{r,k}(v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial r} + \nu \left[\Delta_k \hat{v}_{r,k} - \frac{2ik}{r^2} \hat{v}_{\theta,k} - \frac{\hat{v}_{r,k}}{r^2} \right] \\ \frac{\partial \hat{v}_{\theta,k}}{\partial t} + \hat{N}_{\theta,k}(v) &= -\frac{ik}{\rho r} \hat{p}_k + \nu \left[\Delta_k \hat{v}_{\theta,k} + \frac{2ik}{r^2} \hat{v}_{r,k} - \frac{\hat{v}_{\theta,k}}{r^2} \right] \\ \frac{\partial \hat{v}_{z,k}}{\partial t} + \hat{N}_{z,k}(v) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial z} + \nu \Delta_k \hat{v}_{z,k} \end{aligned}$$

式中

$$\Delta_k = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

此外, $\hat{N}_{r,k}$, $\hat{N}_{\theta,k}$ 和 $\hat{N}_{z,k}$ 为非线性项经 Fourier 级数展开后对应 k 模态的分量。其表达式易由 Fourier 卷积定理导出, 即

$$(ab)_k = \sum_{m+n=k} \hat{a}_m \hat{b}_n$$

式中 a 和 b 为任意速度分量或速度分量的偏导数, m 和 n 为整数。

在该方程中, 径向和周向动量方程的黏性项 $\hat{v}_{r,k}$ 和 $\hat{v}_{\theta,k}$ 是耦合的。类似于线性稳定性分析中的处理方法, 可令

$$\tilde{v}_{r,k} = \hat{v}_{r,k} + i\hat{v}_{\theta,k}, \quad \tilde{v}_{\theta,k} = \hat{v}_{r,k} - i\hat{v}_{\theta,k}$$

经变量替换解耦, 从而使方程对角化^[10]。然后, 用 r 乘所有方程, 消除方程左端显含的几何奇性, 并最终推得其对称形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r \hat{v}_{r,k}}{\partial r} + ik \hat{v}_{\theta,k} + \frac{\partial r \hat{v}_{z,k}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial r \tilde{v}_{r,k}}{\partial t} + r \tilde{N}_{r,k}(v) &= -\frac{1}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} - k \right] \hat{p}_k + \nu \left[r \Delta_k - \frac{1+2k}{r} \right] \tilde{v}_{r,k} \\ \frac{\partial r \tilde{v}_{\theta,k}}{\partial t} + r \tilde{N}_{\theta,k}(v) &= -\frac{1}{\rho} \left[r \frac{\partial}{\partial r} + k \right] \hat{p}_k + \nu \left[r \Delta_k - \frac{1-2k}{r} \right] \tilde{v}_{\theta,k} \\ \frac{\partial r \hat{v}_{z,k}}{\partial t} + r \hat{N}_{z,k}(v) &= -\frac{1}{\rho} r \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial z} + \nu r \Delta_k \hat{v}_{z,k} \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{N}_{r,k} = \hat{N}_{r,k} + i\hat{N}_{\theta,k}, \quad \tilde{N}_{\theta,k} = \hat{N}_{r,k} - i\hat{N}_{\theta,k}$$

3.2 奇性轴条件

柱坐标系下, z 轴是几何奇性轴, 即 $r=0$ 。原则上, 应采用由速度和压力在 origin 的可解性条件和运动学约束导出的正则性条件^[11]。然而, 本文仅选取一些必要的边界条件, 以及径向奇偶条件的最小子集^[12]。具体为

$$\tilde{v}_{r,0} = \tilde{v}_{\theta,0} = \frac{\partial \hat{v}_{z,0}}{\partial r} = \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial r} = 0$$

$$\tilde{v}_{r,1} = \frac{\partial \tilde{v}_{\theta,1}}{\partial r} = \hat{v}_{z,1} = \hat{p}_1 = 0$$

$$\tilde{v}_{r,k} = \tilde{v}_{\theta,k} = \hat{v}_{z,k} = \hat{p}_k = 0$$

在该条件下,随着空间分辨率的提高,解是渐近光滑的,且未令 $\tilde{v}_{\theta,1} = 0$ 使得流动可流过 z 轴。同时,可据此给出非线性项在 z 轴的表达式。文献[9]经过详细分析,得

$$\hat{N}_{r,0} = \text{Re} \left[\frac{\tilde{v}_{\theta,1}}{2} \frac{\partial \tilde{v}_{\theta,1}}{\partial r} \right], \hat{N}_{\theta,0} = 0, \hat{N}_{z,0} = 0$$

$$\hat{N}_{r,1} = \frac{\hat{v}_{z,0}}{2} \frac{\partial \tilde{v}_{\theta,1}}{\partial z}, \hat{N}_{\theta,1} = i \hat{N}_{r,1}, \hat{N}_{z,1} = \tilde{v}_{\theta,1} \frac{\partial \hat{v}_{z,0}}{\partial r}$$

$$\hat{N}_{r,2} = \frac{\tilde{v}_{\theta,1}}{4} \frac{\partial \tilde{v}_{\theta,1}}{\partial r}, \hat{N}_{\theta,2} = i \hat{N}_{r,2}, \hat{N}_{z,2} = 0$$

$$\hat{N}_{r,k} = 0, \hat{N}_{\theta,k} = 0, \hat{N}_{z,k} = 0$$

3.3 空间离散

由第 3.1 节,对称形式方程右端的所有椭圆型标量算子可统一为

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[r \frac{\partial \hat{c}_k}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \hat{c}_k}{\partial r} \right] - \frac{\sigma^2}{r} \hat{c}_k = r \hat{f}_k$$

式中 $\hat{c}_k$ 和 $\hat{f}_k$ 为复标量变量, σ^2 为 Fourier 模态常数。通过 Galerkin 投影,上述方程可变换为弱形式。将其乘以权函数 ϕ ,并在边界为 $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$ 的求解域 Ω 上分部积分,得

$$\int_{\Omega} \left[r \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \hat{c}_k}{\partial z} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \hat{c}_k}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{r} \phi \hat{c}_k \right] d\Omega = - \int_{\Omega} r \phi \hat{f}_k d\Omega + \int_{\Gamma_N} r \phi h d\Gamma$$

式中 h 为部分边界 Γ_N 上的非本质边界条件,如 Neumann 边界条件。对于 $\hat{c}_k$ 和 ϕ 的展开,选取标准的 Gauss-Lobatto-Legendre 节点谱元法。分析表明,本文椭圆算子的 Galerkin 投影可消除对称形式方程的所有几何奇性^[9]。

3.4 时间离散

时间离散采用一种基于时间后差的速度修正投影格式,以算子分裂为特征^[13]。同时,在第 $n+1$ 时间层取多项式插值。为了便于描述,暂取原始变量 (v, p) 形式。首先,速度修正

$$r \mathbf{v}^{**} = r \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} r \nabla p^{(n+1)}$$

式中

$$r \mathbf{v}^* = - \sum_{l=1}^J \alpha_l r \mathbf{v}^{(n-l)} - \Delta t \sum_{l=0}^{J-1} \beta_l r \mathbf{N}(\mathbf{v}^{(n-l)})$$

$$r \nabla^2 p^{(n+1)} = \frac{\rho}{\Delta t} r \nabla \cdot \mathbf{v}^*$$

式中 α_l 和 β_l 分别为时间后差和多项式插值的权系数,并取 $J=3$ 。特别地,对于压力 Neumann 边界条

件,在求解压力 Poisson 方程时需要附加压力梯度修正

$$r \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial \mathbf{n}} = - r \rho \mathbf{n} \cdot \sum_{l=0}^{J-1} \beta_l \left[\mathbf{N}(\mathbf{v}^{(n-l)}) + \nu \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}^{(n-l)} + \frac{\partial \mathbf{v}^{(n-l)}}{\partial t} \right]$$

式中 $\mathbf{n}$ 为向外单位法向量。其次,求解第 $n+1$ 时间层速度 $\mathbf{v}^{(n+1)}$ 的椭圆型标量 Helmholtz 方程组进行黏性修正,即

$$r \nabla^2 \mathbf{v}^{(n+1)} - \frac{r \alpha_0}{\nu \Delta t} \mathbf{v}^{(n+1)} = - \frac{r \mathbf{v}^{**}}{\nu \Delta t}$$

在第 1 步时,取原始变量 $(\hat{v}_{r,k}, \hat{v}_{\theta,k}, \hat{v}_{z,k}, \hat{p}_k)$; 在第 2 步时,取对角变量 $(\tilde{v}_{r,k}, \tilde{v}_{\theta,k}, \tilde{v}_{z,k}, \tilde{p}_k)$ 。

3.5 验证算例

文献[9]仅给出了上述谱元-Fourier 法的 Kovasznay 流^[14]验证算例,它是一种较为简单的二维定常层流流动,存在解析解。算例分析表明,该方法在 3 个空间方向均是指数收敛的。

现给出较为复杂的 Taylor-Couette 流^[15]验证算例。内外筒的半径比取 5/6,以外筒和内筒的半径差为特征长度的 Reynolds 数,取为 400;轴向长度取 1.05 倍特征长度,并设周期边界条件。如文献[15]所述,该流动可在层流状态下发展出 Taylor 涡。图 2 是沿径向 $v_z = 0$ 等值线上周向速度 v_{θ} 随径向 r 的变化曲线,本文计算值与文献[15]计算值十分吻合,表明该方法对较为复杂的流动有效。

4 结果及分析

考虑图 1 的液浮转子微陀螺筒间流动简化计算模型,设定外筒半径 $R = 7.5 \text{ mm}$,外筒和端盖与内筒之间的狭缝距离 $d = 0.2 \text{ mm}$,流体密度 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。将子午面划分为 183 个单元。在每个标准化的单元内,径向和轴向均取 10 阶 Legendre

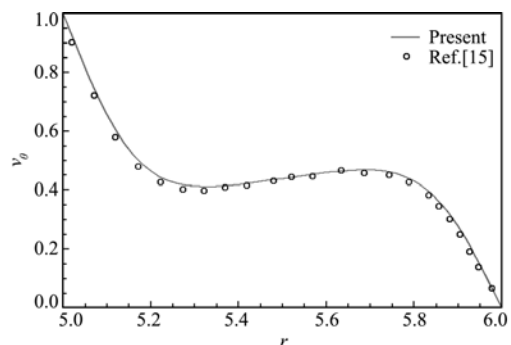


图 2 Taylor-Couette 流周向速度

Fig. 2 Azimuthal velocities for a Taylor-Couette flow

多项式展开,即取其 11 个零点作为 Gauss-Lobatto-Legendre 节点进行 Lagrange 插值。此外,周向取 64 阶 Fourier 级数展开。在下述分析中,流动变量均为流动充分发展阶段的时间平均结果。正式计算前,采用多套网格对问题进行试算,结果表明,本文网格满足网格收敛,并且计算效率较高。另外,在端面狭缝外缘和柱面狭缝处的流动均为有较强脉动的湍流,因而本文采用 DNS 进行模拟可以获得准确的壁面摩擦力信息。

4.1 基准算例

为了便于对比,设定基准算例。取外筒高度 $H=2.5\text{ mm}$,则高径比 $H/R=1/3$;取内筒旋转速度 $\Omega=1000\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$,运动黏性系数 $\nu=1.0\times 10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ 。因此,内外筒的半径比 $\eta=0.9733$,外筒和内筒的旋转速度比 $\mu=0$,则 Taylor 数

$$Ta = \frac{4\Omega^2(R-d)^4}{\nu^2} \cdot \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2} \cdot \left(\frac{1 - \eta}{\eta}\right)^4 \approx 106644.59$$

根据 Walowit 等^[16]的临界 Taylor 数近似公式,有

$$Ta_c = \frac{1708(1 - \eta)^2}{\mu - \eta^2 - 2(1 - \mu)\eta^2 \ln \eta / (1 - \eta^2)} \approx 47.07$$

因 $Ta \gg Ta_c$,故若在 Taylor-Couette 流条件下,外筒与内筒之间狭缝内的流态应为波状涡或更复杂的湍流。

以内筒旋转速度为无量纲化特征速度。图 3 为 $\theta=0$ 子午面的压力和速度分量等值云图。在端盖与内筒之间的狭缝内,流体从旋转的内筒壁面附近流向端盖,在端盖壁面附近形成回流,压力从旋转轴向向外逐渐增大。外筒与内筒之间的狭缝内压力较高,在外筒壁面达到最大值,可以看出,狭缝内还出现了 8 个 Taylor 涡。

图 4 是外筒与内筒之间的狭缝中心,即 $r=7.4\text{ mm}$ 环形截面的压力和速度分量等值云图。可以看出,流动基本是轴对称的 Taylor 涡流态,没有明显的波状涡流态。注意到 $Ta \gg Ta_c$,可推断不同于 Taylor-Couette 流,端盖对非轴对称的波状涡流态有抑制作用,可以延迟新的分岔。

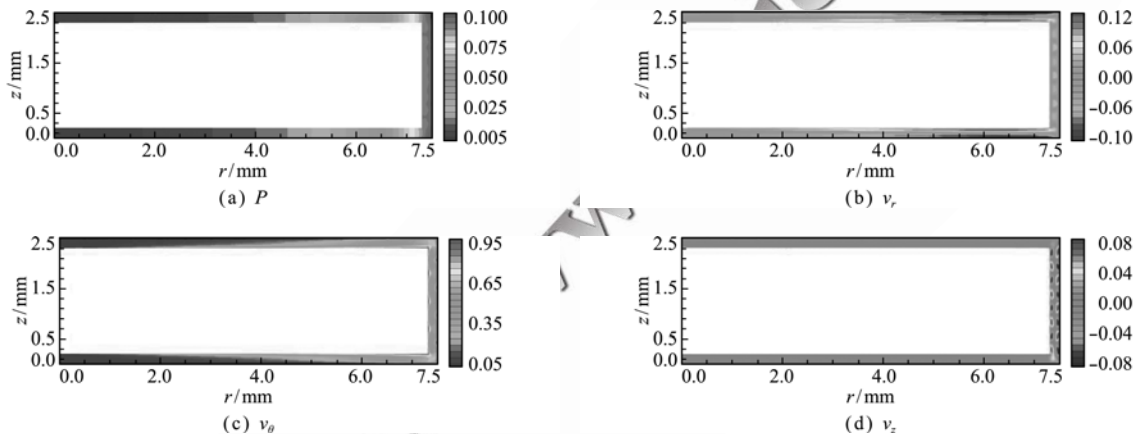


图 3 $\theta=0$ 子午面的压力和速度分量

Fig. 3 Pressure and velocity components in $\theta=0$ meridional plane

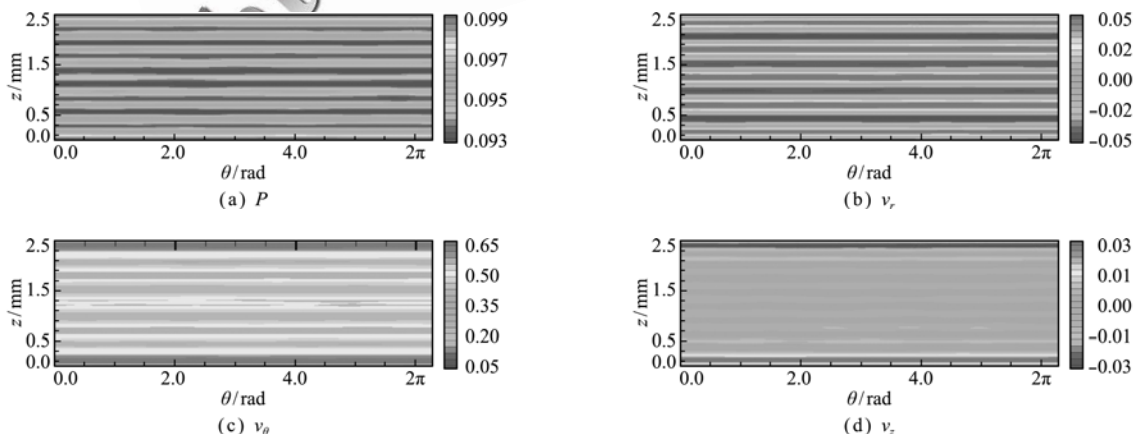


图 4 狭缝中心环形截面的压力和速度分量 ($r=7.4\text{ mm}$)

Fig. 4 Pressure and velocity components in the central circular section between the two cylinders ($r=7.4\text{ mm}$)

图5是端盖与内筒之间的狭缝中心,即 $z=d/2$ 水平截面的压力、速度分量和 Reynolds 应力分量随径向 r 的变化曲线。可以看出,压力逐渐增大,速度呈现回流。狭缝内的流动在大部分区域为层流,仅在外筒壁面附近脉动速度较大。

图6是外筒与内筒之间的狭缝中心,即 $r=7.4\text{ mm}$ 环形截面的压力、速度分量和 Reynolds 应力分量随轴向 z 的变化曲线。可以看出,压力基本不变,速度因 Taylor 涡而呈现周期波动。在端盖壁面附近,周向速度峰值较大,速度脉动较小,即端盖对其有抑制作用,使流动稳定。

4.2 阻力矩参数影响

记内筒侧面和内筒端面的剪切应变率分别为 $S_{r\theta}$ 和 $S_{z\theta}$,则切应力

$$\tau_{r\theta}=2\rho\nu S_{r\theta}, \tau_{z\theta}=2\rho\nu S_{z\theta}$$

于是,内筒侧面和内筒端面的阻力矩分别为

$$M_1=2\pi(R-d)^2\int_d^{H-d}\tau_{r\theta}dz, M_2=4\pi\int_0^{R-d}r^2\tau_{z\theta}dr$$

相对基准算例,再取外筒高度 $H=1.25\text{ mm}$, 2.5 mm , 5 mm 和 10 mm ,分析高径比影响。图7给出了剪切应变率 $S_{r\theta}$ 随轴向 z 的变化曲线,高径比影响明显,可推知 $H=1.25\text{ mm}$ 算例相应的切应力最大。图8是剪切应变率 $S_{z\theta}$ 随径向 r 的变化

曲线,高径比影响不大,仅在内筒端面外缘附近差异明显。

表1列出了不同外筒高度的阻力矩。因内筒半径相同,故内筒端面的阻力矩几乎不变。同内筒侧面的切应力相比,内筒侧面的阻力矩主要受外筒高度影响,随之增大而增大。当高径比较大时,外筒高度增大1倍,内筒侧面的阻力矩也近似增大1倍。因此,在设计液浮转子微陀螺时,可适当减小陀螺高度,从而减小输入力矩。

相对基准算例,再取旋转速度 $\Omega=600\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $800\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ 和 $1000\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$,分析旋转速度影响。图9给出了剪切应变率 $S_{r\theta}$ 随轴向 z 的变化曲线,旋转速度影响明显。旋转速度越大,剪切应变率

表1 不同外筒高度的阻力矩

Tab.1 Drag moments for different outer cylinder heights

H/mm	M_1 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_1/M_2	M_1+M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)
1.25	9.45×10^{-2}	2.50×10^{-1}	0.38	3.44×10^{-1}
2.5	1.92×10^{-1}	2.49×10^{-1}	0.77	4.41×10^{-1}
5	4.13×10^{-1}	2.48×10^{-1}	1.67	6.60×10^{-1}
10	7.71×10^{-1}	2.49×10^{-1}	3.10	1.02

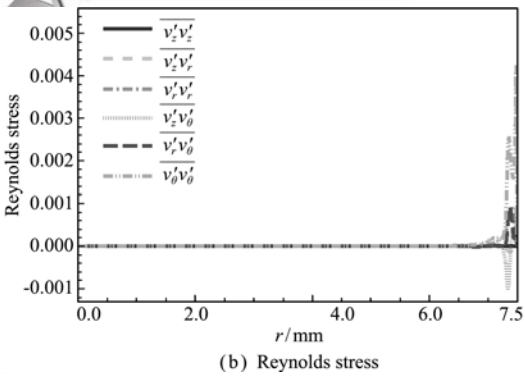
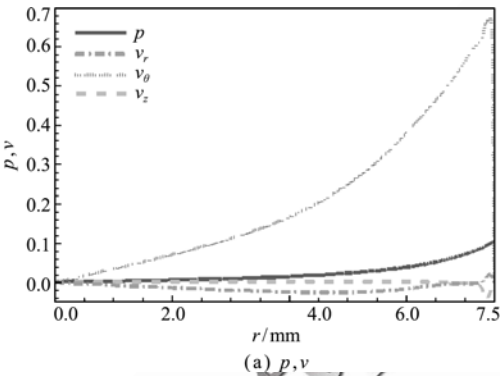


图5 狭缝中心水平截面的流动变量($z=d/2$)
Fig.5 Flow variables in the central horizontal section between the lid and the inner cylinder ($z=d/2$)

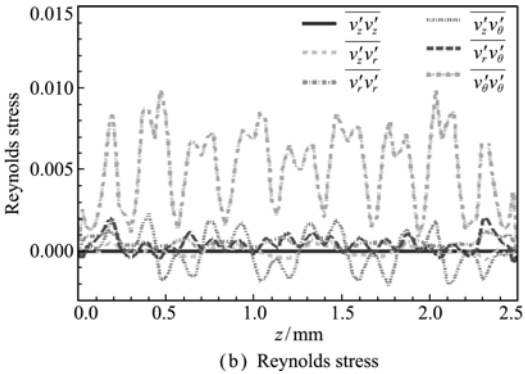
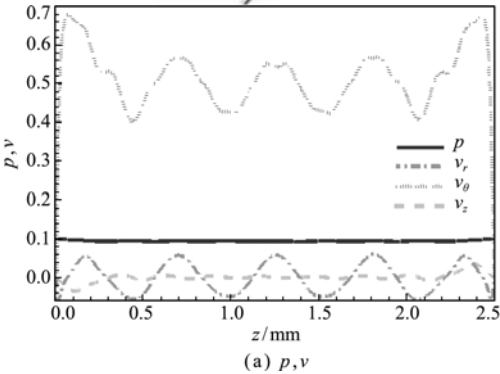


图6 狭缝中心水平截面的流动变量($r=7.4\text{ mm}$)
Fig.6 Flow variables in the central horizontal section between the lid and the inner cylinder ($r=7.4\text{ mm}$)

$S_{r\theta}$ 越大,从而内筒侧面的阻力矩也越大。图 10 是剪切应变率 $S_{z\theta}$ 随径向 r 的变化曲线,随旋转速度

增大而增大,仅在内筒端面外缘附近差异减小。相应地,内筒端面的阻力矩也增大。

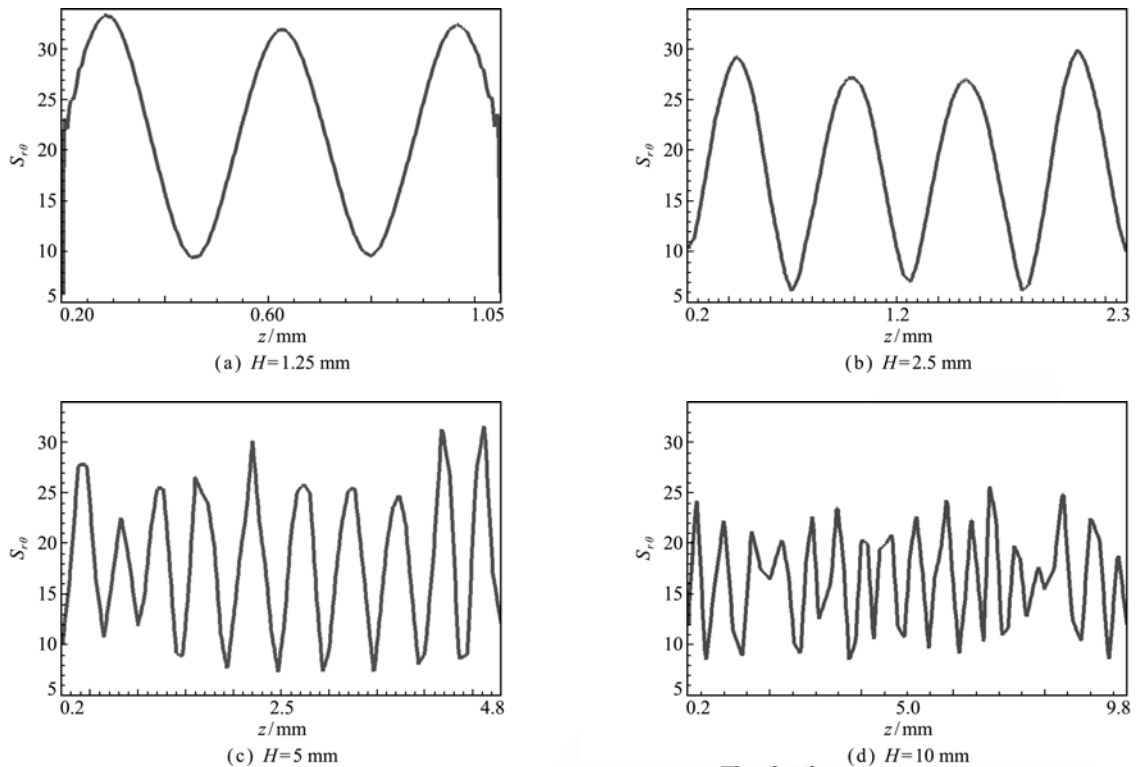


图 7 不同外筒高度的内筒侧面剪切应变率

Fig. 7 Shear strain rates on the lateral wall of the inner cylinder for different outer cylinder heights

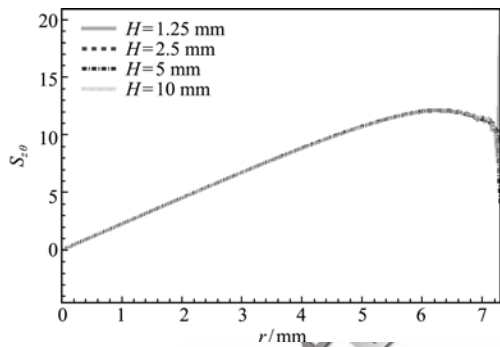


图 8 不同外筒高度的内筒端面剪切应变率

Fig. 8 Shear strain rates on the end wall of the inner cylinder for different outer cylinder heights

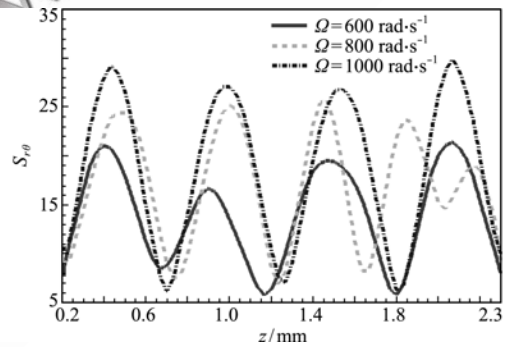


图 9 不同旋转速度的内筒侧面剪切应变率

Fig. 9 Shear strain rates on the lateral wall of the inner cylinder for different rotating velocities

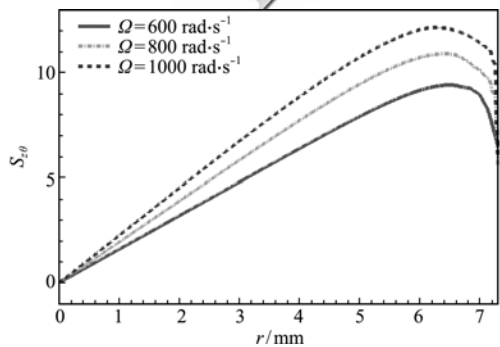


图 10 不同旋转速度的内筒端面剪切应变率

Fig. 10 Shear strain rates on the end wall of the inner cylinder for different rotating velocities

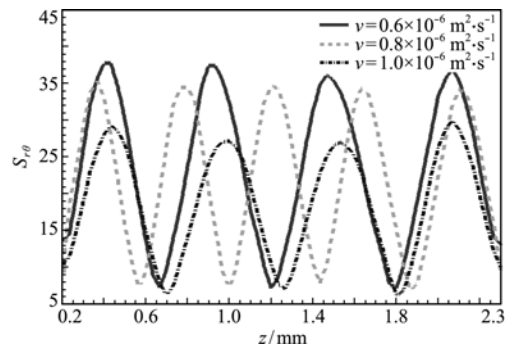


图 11 不同黏性系数的内筒侧面剪切应变率

Fig. 11 Shear strain rates on the lateral wall of the inner cylinder for different viscosity coefficients

表 2 列出了不同旋转速度的阻力矩,定量显示,随旋转速度增大,内筒侧面和内筒端面的阻力矩均同时增大,且两者比近似不变,平均约为 0.78。

机构转动会带来局部升温,一般液体黏性系数随温度增加而降低。最后,相对基准算例,再取黏性系数 $\nu=0.6\times10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ 和 $0.8\times10^{-6}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$,分析黏性系数影响。图 11 给出了剪切应变率 $S_{r\theta}$ 随轴向 z 的变化曲线,黏性系数影响明显。黏性系数越大,剪切应变率 $S_{r\theta}$ 越小。图 12 给出了剪切应变率 $S_{z\theta}$ 随径向 r 的变化曲线, $S_{z\theta}$ 也随黏性系数增大而减小,仅在内筒端面外缘附近差异减小。因在计算切应力时,剪切应变率和黏性系数还应相乘,故需定量分析阻力矩的变化。

表 3 列出了不同黏性系数的阻力矩。定量显示,随黏性系数增大,内筒侧面和内筒端面的阻力矩均同时增大,而两者比近似不变,平均约为 0.77。从增大趋势来看,前者渐趋平缓,后者则持

表 2 不同旋转速度的阻力矩
Tab. 2 Drag moments for different rotating velocities

Ω /($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)	M_1 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_1/M_2	M_1+M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)
600	8.68×10^{-2}	1.13×10^{-1}	0.77	1.99×10^{-1}
800	1.40×10^{-1}	1.77×10^{-1}	0.79	3.16×10^{-1}
1000	1.92×10^{-1}	2.49×10^{-1}	0.77	4.41×10^{-1}

表 3 不同黏性系数的阻力矩
Tab. 3 Drag moments for different viscosity coefficients

ν /($\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$)	M_1 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)	M_1/M_2	M_1+M_2 /($\text{N}\cdot\text{m}$)
0.6×10^{-6}	1.44×10^{-1}	1.95×10^{-1}	0.74	3.40×10^{-1}
0.8×10^{-6}	1.81×10^{-1}	2.23×10^{-1}	0.81	4.05×10^{-1}
1.0×10^{-6}	1.92×10^{-1}	2.49×10^{-1}	0.77	4.41×10^{-1}

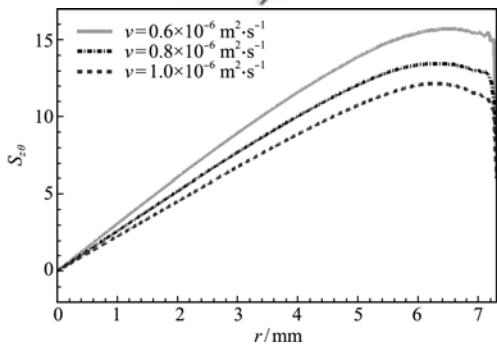


图 12 不同黏性系数的内筒端面剪切应变率
Fig. 12 Shear strain rates on the end wall of the inner cylinder for different viscosity coefficients

续增大,表明其对流体黏性的变化更敏感。特别地,由表 1~表 3 可知,内筒侧面和内筒端面的阻力矩对总阻力矩的贡献量级相当。

5 结 论

建立了液浮转子微陀螺筒间流动的简化计算模型,引入并实现了一种柱坐标系下具有空间指数收敛特性的谱元-Fourier 法对该复杂流动的直接数值模拟。选取高径比、旋转速度和黏性系数等参数,通过其对内筒侧面和内筒端面的阻力矩的影响,计算结果表明,

(1) 阻力矩对几何参数和流动参数的变化较敏感,两种阻力矩都随这些参数的增大而增大,且对总阻力矩的贡献量级相当。

(2) 相对于 Taylor-Couette 流,端盖对速度脉动和非轴对称的波状涡流态有抑制作用,可延迟失稳和新的分岔。

(3) 引入的柱坐标系不具有空间指数收敛特性的谱元-Fourier 法,可有效地数值模拟复杂的三维非定常不稳定分岔流动。

(4) 本文通过模型简化对液浮转子微陀螺中的基本流动进行研究,得到了初步结论,对实际工程有一定意义。对于温度效应引起的局部黏度变化和微陀螺的壁面微纳结构等尺度效应,仍有待未来工作进一步研究探讨。

参考文献(References):

[1] Takada Y. Quasi-periodic state and transition to turbulence in a rotating Couette system [J]. *Journal of Fluid Mechanics*,1999,**389**:81-99.
[2] Batchelor G K. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow [J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*,1951,**4**(1): 29-41.
[3] Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks [A]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* [C], 1953.
[4] Hadziabdić M, Hanjalić K, Mullyadzhannov R. LES of turbulent flow in a concentric annulus with rotating outer wall [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*,2013,**43**:74-84.
[5] Andersson H I, Lygren M. LES of open rotor-stator flow [J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*,2006,**27**(4):551-557.
[6] Nemri M, Climent E, Charton S, et al. Experimental and numerical investigation on mixing and axial dis-

- persion in Taylor-Couette flow patterns [J]. *Chemical Engineering Research and Design*, 2013, **91**(12): 2346-2354.
- [7] Poncet S, Randriamampianina A. Three-dimensional turbulent boundary layer in a shrouded rotating system [J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2008, **80**(1): 107-117.
- [8] Lygren M, Andersson H I. Large eddy simulations of the turbulent flow between a rotating and a stationary disk [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2004, **55**(2): 268-281.
- [9] Blackburn H M, Sherwin S J. Formulation of a Galerkin spectral element-Fourier method for three-dimensional incompressible flows in cylindrical geometries [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **197**(2): 759-778.
- [10] Orszag S A, Patera A T. Secondary instability of wall-bounded shear flows [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **128**(1): 347-385.
- [11] Tomboulides A G, Orszag S A. Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2000, **416**: 45-73.
- [12] Lopez J M, Marques F, Shen J. An efficient spectral-projection method for the Navier-Stokes equation in cylindrical geometries: II. three-dimensional cases [J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **176**(2): 384-401.
- [13] Karniadakis G E, Israeli M, Orszag S A. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1991, **97**(2): 414-443.
- [14] Kovasznay L I G. Laminar flow behind a two-dimensional grid [A]. Proceedings of Cambridge Philosophy Society [C]. Cambridge University, 1948.
- [15] Moser R D, Moin P, Leonard A. A spectral numerical method for the Navier-Stokes equations with applications to Taylor-Couette flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, **52**(3): 524-544.
- [16] Walowit J, Tsao S, DiPrima R C. Stability of Flow Between Arbitrarily Spaced Concentric Cylindrical Surfaces Including the Effect of A Radial Temperature Gradient [R]. AD No. 419033, New York: Rensselaer Polytechnic Institute, 1963.

Parametric effects on drag moments of a flow between two cylinders in a micro-gyroscope with a liquid-filled rotor

SUN Jian^{*1,2}, XU Chun-xiao², HUANG Wei-xi²

(1. China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China;

2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: A simplified computational model is developed so that a spectral element-Fourier method with spatial exponential convergence property is introduced as a direct numerical simulation method for a complex flow between two cylinders in a micro-gyroscope with a liquid-filled rotor. In cylindrical coordinate system, the incompressible Navier-Stokes equations is solved through using a Galerkin spectral element method both in radial and axial directions, and the Gauss-Lobatto-Legendre nodal expansion is implemented in each standardized element while the Fourier series expansion is used in azimuthal direction. Based on a specified baseline numerical example, the effects of several parameters, namely the ratio of height to radius, rotating velocity and viscosity coefficient, on the drag moments of the inner cylinder lateral surface and end surface are investigated and analysed. Results show that the two drag moments increase with these parameters and both contributions to the total drag moment are comparative in magnitude order.

Key words: micro-gyroscope; drag moment; spectral element-Fourier method; Navier-Stokes equations; direct numerical simulation

引用本文/Cite this paper:

孙 健, 许春晓, 黄伟希. 液浮转子微陀螺筒间流动阻力矩参数影响[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(4): 493-500.

SUN Jian, XU Chun-xiao, HUANG Wei-xi. Parametric effects on drag moments of a flow between two cylinders in a micro-gyroscope with a liquid-filled rotor [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(4): 493-500.