

等截面抛物线无铰拱挠度影响线实用解析解

杨雨厚^{*1,2}, 刘来君¹, 孙维刚¹, 郝天之²

(1. 广西交通科学研究院有限公司, 南宁 530007; 2. 长安大学 公路学院, 西安 710064)

摘要:为解决弧长微分表达式复杂导致抛物线拱挠度解析计算繁琐的难题,采取有简单弧长微分表达式的近似曲线拟合抛物线的方法,通过以沿曲线的曲率和为量化指标评价3种曲线(直线)的拟合度,最终得出悬索线拟合度最优的结论。在此基础上,利用基本力学原理,推导出抛物线无铰拱挠度影响线解析计算公式,最后应用于实例,并与有限元分析结果进行对比。算例结果表明,公式计算与有限元分析结果最大相差不超过1%,具有非常高的工程精度,可用于工程实践。

关键词:桥梁工程;抛物线无铰拱;挠度影响线;弹性中心法;实用解析解

中图分类号:U448.35;O186.11

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2017)04-0480-07

1 引言

拱是建筑与结构的统一^[1],拱式桥梁在桥梁工程中所占比重较大。目前常用拱轴线形有圆弧线、抛物线和悬链线^[2],根据膜张力假定^[3],抛物线常作为合理拱轴线形而广泛应用于中下承式拱桥中。但对于抛物线无铰拱这种曲线超静定结构,求解其内力及挠度需进行大量沿拱轴曲线的积分,由于该积分式复杂^[4],造成解析计算相当繁琐,也不实用。随着有限元法的推广和相关程序的开发,拱桥内力及挠度的计算普遍采用有限元软件进行,解析计算方法的研究则相对较少。然而,解析计算与有限元法同等重要,一方面结果可以相互校核;另一方面也有利于工程师把握结构内部联系进行概念分析,避免建立有限元模型时进行大量的试算工作。

为得到拱内力或挠度的解析表达式,有关学者开展了大量有益研究。文献[5,6]均将沿弧长的曲线积分直接等效为沿跨径方向的直线积分,这样虽简化了计算,但结果误差较大;文献[7,8]在研究拱肋横向稳定时均使用圆弧线拱,对于抛物线拱则用圆弧拱等效代替;尼颖升等^[9]采用能量变分原理推导出圆弧系杆拱拱肋弯矩增大系数实用计算公式,抛物线和悬链线拱则依据矢跨比相等的条件近似

等效为圆弧拱;熊玉学等^[10]使用多项式拟合抛物线弧长数值积分,进而得到弧长的近似计算公式;胡常福等^[4]以近似积分路径替代抛物线积分路径,从而简化了抛物线拱内力解析表达式。

从研究现状看,在用近似曲线拟合原拱轴线的方法上,缺少统一的评价拟合度的量化指标,且未见有抛物线无铰拱挠度影响线解析解一般表达式的提出。对结构而言,内力与挠度的求解同等重要。鉴于此,本文仍从近似积分法入手,建立统一的评价拟合度的量化指标,由指标计算结果找出最优近似曲线,然后利用基本力学原理求解等截面抛物线无铰拱挠度影响线实用解析表达式,最后用工程实例加以验证。

2 曲线拟合

对于方程为 $y = 4fx^2/l^2$ 的抛物线拱,在求解挠度影响线解析解过程中存在着大量如下积分:

$$\int_s ds = \int_x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{l^2} \int_x \sqrt{l^4 + 64f^2 x^2} dx \quad (1)$$

式中 s 为曲线弧长, y' 为拱轴曲线一阶导, x 为坐标原点位于拱顶时跨径方向的水平坐标, l 为跨径, f 为矢高。

若式(1)得不到简化,挠度解析计算将非常复杂,即使解出也不具实用性。为得到实用的显式解析解,式(1)需要有更加简洁的积分结果表达。总结现有研究^[4,6-14],最有效方法仍是用近似曲线等效拟合抛物线,常用的有直线、圆弧线和悬索线^[15],其曲线积分结果分别为

收稿日期:2016-03-09;修改稿收到日期:2016-09-12.

基金项目:国家自然科学基金(51408040);广西自然科学基金(2015GXNSFBA139229);云南省交通科技计划(云交科 2013(A)02)资助项目.

作者简介:杨雨厚^{*}(1983-),男,博士,工程师
(E-mail:280412086@qq.com).

$$\int_s ds = x \tag{2}$$

$$\int_s ds = 2R \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{lR}{2} \right) \right] \tag{3}$$

$$\int_s ds = \sinh(x/a)/a \tag{4}$$

式中 R 为近似的圆弧线半径, a 为近似的悬索线拱形常数。 R 与 a 的值可利用二分法求得^[15]。可见, 以上 3 种近似曲线(直线)都有简洁的积分结果表达式。然而, 各个曲线对抛物线的拟合度却不相同, 这将直接影响挠度解析解的精度。如图 1 所示为在同一坐标系下, 当跨径为 100 m, 矢跨比分别为 1/3 和 1/10 时, 作出的 4 种曲线(直线)的对比。

可以看出, 由于矢跨比不同, 圆弧线和悬索线与抛物线的拟合度不同。为定量地加以评价, 本文将在同一坐标系下沿各自曲线的曲率和定义为评价指标系数 c , 根据定义, 其计算公式为

$$c = \int_s k ds \tag{5}$$

式中 k 为曲线斜率。分别将圆弧线、悬索线及抛物线的斜率代入式(5), 可得到 3 种曲线同一坐标系下 c 值的计算公式。为定量表达, 表 1 列出了跨径为 100 m 时常见矢跨比下直线、圆弧线、悬索线及抛物线的 c 值。

$$c_{\text{圆}} = \frac{1}{R} \left\{ 2R \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{lR}{2} \right) \right] \right\} = \pi - 2\arccos \left(\frac{lR}{2} \right) \tag{6}$$

表 1 $l=100$ m 时常见矢跨比下 c 值对比表

Tab. 1 Results comparison of c under the condition of common rise-span ratio and $l=100$ m

矢跨比	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$c_{\text{直}}$								
$c_{\text{直}}/c_{\text{抛}}$								
$c_{\text{圆}}$	2.3520	1.8546	1.5220	1.2870	1.1132	0.9799	0.8747	0.7896
$c_{\text{圆}}/c_{\text{抛}}$	126.82%	118.07%	112.79%	109.44%	107.21%	105.67%	104.57%	103.75%
$c_{\text{索}}$	1.9572	1.6395	1.3954	1.2074	1.0603	0.9432	0.8482	0.7699
$c_{\text{索}}/c_{\text{抛}}$	105.53%	104.37%	103.40%	102.67%	102.12%	101.71%	101.41%	101.17%
$c_{\text{抛}}$	1.8546	1.5708	1.3495	1.1760	1.0383	0.9273	0.8364	0.7610
$c_{\text{抛}}/c_{\text{抛}}$	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

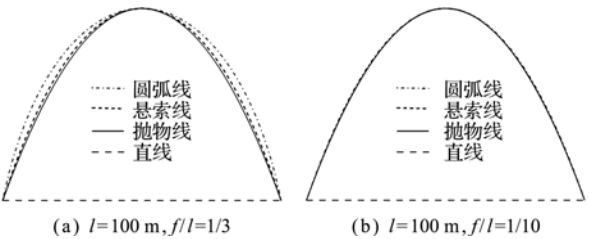


图 1 4 种曲线(直线)对比

Fig. 1 Comparison between 4 kinds of curves (linear)

$$c_{\text{索}} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{a \cosh^2(x/a)} \cosh(x/a) dx = \int_{-l/2}^{l/2} a^{-1} \cosh^{-1}(x/a) dx \tag{7}$$

$$c_{\text{抛}} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{8f}{l^2} \left[\left(\frac{8fx}{l^2} \right)^2 + 1 \right]^{-1} dx = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{8fl^2}{64f^2x^2 + l^4} dx \tag{8}$$

由表 1 可知, (1) 在 3 种近似曲线(直线)中, 悬索线拟合度最好, 以直代曲的精度最差。(2) 在小矢跨比情况下, 圆弧线与抛物线具有较好拟合度, 但随着矢跨比增加, 圆弧线拟合抛物线的精度降低, 且误差越来越明显。(3) 即使在最大矢跨比的情况下, 悬索线 c 值仅是抛物线的 1.0553 倍, 非常接近于 1, 完全满足工程精度要求。

通过以上分析, 本文将采用悬索线拟合抛物线, 从而使弧长积分结果得到简化, 进而求得抛物线无铰拱挠度影响线的一般解析表达式。

3 挠度影响线实用解析解计算

3.1 计算思路

采用静力方法求解挠度影响线, 将单位力 P 作用于任意截面 b 处, 求解 i 截面挠度影响线。根据弹性中心法, 将单位力作用下无铰拱转换为有赘余力的静定结构, 如图 2 所示, 抛物线方程 $y = 4fx^2/l^2$, 拱截面抗拉压刚度为 EA , 抗弯刚度为 EI , 赘余力包含弯矩 x_1 , 轴力 x_2 和剪力 x_3 , 弹性中心距拱顶距离为 y_s 。为求 i 截面挠度, 需在该位置

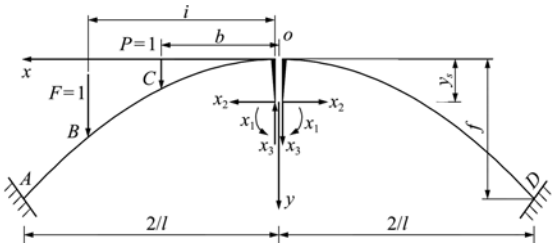


图 2 挠度计算图示

Fig. 2 Graphic of deflection calculation

作用虚设荷载 F , 将基本结构在所有荷载作用下的内力列入表 2。

3.2 赘余力计算

由基本力学原理, 求出单位力作用下基本结构

(图 2) 的赘余力是求解挠度解析解的前提。以悬索线替代抛物线, 根据式(4)对曲线积分的简化, 可以得出赘余力影响线计算公式, 求解过程及公式列于表 3。

表 2 所有荷载作用下基本结构内力
Tab. 2 Internal forces under all loads

内力	实际作用荷载						虚设荷载			
	截面 x 处单位荷载 P		赘余力				截面 i 处单位荷载 F			
	$x \leq b$	$x > b$	x_1	x_2	x_3		$x \leq i$	$x > i$		
弯矩	M_p	$-(x-b)$	$\bar{M}_1$	1	$\bar{M}_2$	$y-y_s$	$\bar{M}_3$	x	$\bar{M}$	$-(x-i)$
轴力	N_p	0	$\bar{N}_1$	0	$\bar{N}_2$	$\cos \varphi$	$\bar{N}_3$	$-\sin \varphi$	$\bar{N}$	0
剪力	Q_p	$-\cos \varphi$	$\bar{Q}_1$	0	$\bar{Q}_2$	$\sin \varphi$	$\bar{Q}_3$	$\cos \varphi$	$\bar{Q}$	$-\cos \varphi$

注: φ 为拱轴切线与水平线夹角。

表 3 赘余力影响线计算
Tab. 3 Calculation of redundant force influence line

参数	意义	基本力学表达式	本文实用解析解
y_s	弹性中心	$\int_s y ds / \int_s ds$	$\frac{f}{l^2} \left[8a^2 + l^2 - 4al \coth \left(\frac{l}{2a} \right) \right]$
δ_{11}		$\int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds$	$\frac{2a}{EI} \sinh \left(\frac{l}{2a} \right)$
δ_{22}	无铰拱常变位	$\int_s \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{N}_2^2}{EA} ds$	$\frac{16a^3 f^2}{EI l^4} \operatorname{csch} \left(\frac{l}{2a} \right) \left[(20a^2 + l^2) \cosh \left(\frac{l}{a} \right) - 20a^2 - 8al \sinh \left(\frac{l}{a} \right) - 3l^2 \right] + \frac{2a}{EA} \tanh \left(\frac{l}{2a} \right)$
δ_{33}		$\int_s \frac{\bar{M}_3^2}{EI} ds$	$\frac{a}{2EI} \left[(8a^2 + l^2) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) - 4al \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) \right]$
Δ_{1p}		$\int_s \frac{M_1 M_p}{EI} ds$	$-\frac{a}{2EI} \left[(l-2b) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) + 2a \cosh \left(\frac{b}{a} \right) - 2a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) \right]$
Δ_{2p}	无铰拱单位力载变位	$\int_s \frac{M_2 M_p}{EI} ds + \int_s \frac{N_2 N_p}{EA} ds$	$\frac{a}{EI l^2} \left\{ -a \cosh \left(\frac{b}{a} \right) (24a^2 f + 4b^2 f - l^2 y_s) + \frac{1}{2} \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) [8a^2 f(2b-3l) + l^2(2b-l)(f-y_s)] + a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) [24a^2 f + l(-4bf+3fl-l y_s)] + 16a^2 b f \sinh \left(\frac{b}{a} \right) \right\} + \frac{1}{8EAf} (l \sqrt{l^2+16f^2} - \sqrt{l^4+64f^2 b^2})$
Δ_{3p}		$\int_s \frac{M_3 M_p}{EI} ds$	$\frac{a}{4EI} \left[-(8a^2-2bl+l^2) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) + 8a^2 \sinh \left(\frac{b}{a} \right) + 4a(l-b) \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) - 4ab \cosh \left(\frac{b}{a} \right) \right]$
x_1		$-\left(\int_s \frac{M_1 M_p}{EI} ds / \int_s \frac{M_1}{EI} ds \right)$	$\frac{1}{2} a \cosh \left(\frac{b}{a} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{l}{2a} \right) - \frac{1}{2} a \coth \left(\frac{l}{2a} \right) - \frac{1}{2} b + \frac{l}{4}$
x_2	赘余力	$-\frac{\left(\int_s \frac{M_2 M_p}{EI} ds + \int_s \frac{N_2 N_p}{EA} ds \right)}{\left(\int_s \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{N}_2^2}{EA} ds \right)}$	$\left\{ a \cosh \left(\frac{b}{a} \right) (24a^2 f + 4b^2 f - l^2 y_s) - \frac{1}{2} \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) [8a^2 f(2b-3l) + l^2(2b-l)(f-y_s)] - a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) [24a^2 f + l(-4bf+3fl-l y_s)] - 16a^2 b f \sinh \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{IA^{-1} l^2}{8af} \sqrt{l^4+64f^2 b^2} - \frac{IA^{-1} l^3}{8af} \sqrt{l^2+16f^2} \right\} / \left\{ \frac{2}{l^2} \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) [384a^4 f^2 + 16a^2 f l^2 (3f-y_s) + l^4 (f-y_s)^2] - \frac{16af}{l} \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) [24a^2 f + l^2 (f-y_s)] + 2l^2 IA^{-1} \tanh \left(\frac{l}{2a} \right) \right\}$
x_3		$-\left(\int_s \frac{M_3 M_p}{EI} ds / \int_s \frac{\bar{M}_3^2}{EI} ds \right)$	$\left\{ [8a^2 + l(l-2b)] \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) - 8a^2 \sinh \left(\frac{b}{a} \right) - 4a(l-b) \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) + 4ab \cosh \left(\frac{b}{a} \right) \right\} / \left[2(8a^2 + l^2) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) - 8al \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) \right]$

注: Δ_{1p} , Δ_{2p} 和 Δ_{3p} 是按单位力作用在左半跨推证的, 当单位力作用在右半跨时, Δ_{1p} 和 Δ_{2p} 仍取左半跨的对应值, Δ_{3p} 取对应左半跨值的 -1 倍。

3.3 挠度影响线计算

如图2所示,参考文献[2],当基本结构C点作用单位力和赘余力时B点的挠度 Δ_B 为

$$\Delta_B = \Delta_{Bp} + x_1 \Delta_{B1} + x_2 \Delta_{B2} + x_3 \Delta_{B3} \quad (9)$$

式中各参数含义及计算公式列入表4。

由式(9)及表3和表4,得出挠度影响线函数

$$v(x, i) = f(x, i) - \frac{f_1(x) f_1(i)}{\delta_{11}} - \frac{f_2(x) f_2(i)}{\delta_{22}} - \frac{f_3(x) f_3(i)}{\delta_{33}} \quad (10)$$

式中 $v(x, i)$ 表示当截面 x 处作用单位力时截面 i 的挠度,当 x 在 $[-l/2, l/2]$ 变化时,即为截面 i 的挠度影响线。

$$f(x, i) = \begin{cases} \frac{a}{EI} \left\{ \sinh \left[\frac{l}{2a} \right] \left[2a^2 + \left(x - \frac{l}{2} \right) \times \left(i - \frac{l}{2} \right) \right] - 2a^2 \sinh \left[\frac{x}{a} \right] + a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] (x + i - l) + a(x - i) \cosh \left[\frac{x}{a} \right] \right\} & (i \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ \frac{a}{EI} \left\{ \sinh \left[\frac{l}{2a} \right] \left[2a^2 + \left(x - \frac{l}{2} \right) \times \left(i - \frac{l}{2} \right) \right] - 2a^2 \sinh \left[\frac{i}{a} \right] + a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] (x + i - l) - a(x - i) \cosh \left[\frac{i}{a} \right] \right\} & (-\frac{l}{2} \leq x < i) \end{cases} \quad (11)$$

$$f_1(i) = -\frac{a}{2EI} \left[(l - 2i) \sinh \left[\frac{l}{2a} \right] + 2a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] - 2a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] \right] \quad (12)$$

$$f_2(i) = \frac{a}{EI l^2} \left\{ -a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] (24a^2 f + 4f t^2 - l^2 y_s) + \frac{1}{2} \sinh \left[\frac{l}{2a} \right] [8a^2 f (2t - 3l) + l^2 (2t - l) \times (f - y_s)] + a \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] [24a^2 f + l(-4ft + 3fl - ly_s)] + 16a^2 t f \sinh \left[\frac{t}{a} \right] \right\} + \frac{1}{8EAf} \times (l \sqrt{l^2 + 16f^2} - \sqrt{l^4 + 64f^2 t^2}) \quad (13)$$

$$f_3(i) = \frac{a}{4EI} \left[-(8a^2 - 2tl + l^2) \sinh \left[\frac{l}{2a} \right] + 8a^2 \sinh \left[\frac{t}{a} \right] + 4a(l - t) \cosh \left[\frac{l}{2a} \right] - 4at \cosh \left[\frac{t}{a} \right] \right] \quad (14)$$

4 算例分析

为验证本文推导挠度影响线解析解的实用性和精确度,以2个等截面抛物线无铰拱为例,分别采用有限元数值法和本文方法计算 $l/4$ 和 $l/2$ 截面处的挠度影响线,并以有限元分析结果为基准判断本文公式计算误差。

算例1 拱跨径为117.5 m,矢高为22.158 m,截面抗拉压刚度为2329804.38 kN,抗弯刚度为

表4 挠度影响线计算

Tab. 4 Calculation of deflection influence line

参数	意义	基本力学表达式	本文实用解析解
Δ_{Bp}	单位力 P 作用下 i 截面挠度	$\int_S \frac{MM_p}{EI}$	$\frac{a}{EI} \left\{ \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) \left[2a^2 + \left(b - \frac{l}{2} \right) \left(i - \frac{l}{2} \right) \right] - 2a^2 \sinh \left(\frac{b}{a} \right) + a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) (b + i - l) + a(b - i) \cosh \left(\frac{b}{a} \right) \right\} \quad (i \leq b \leq l/2)$ $\frac{a}{EI} \left\{ \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) \left[2a^2 + \left(b - \frac{l}{2} \right) \left(i - \frac{l}{2} \right) \right] - 2a^2 \sinh \left(\frac{i}{a} \right) + a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) (b + i - l) - a(b - i) \cosh \left(\frac{i}{a} \right) \right\} \quad (-l/2 \leq b < i)$
Δ_{B1}	赘余力 x_1 作用下 i 截面挠度	$\int_S \frac{\bar{M}M_1}{EI}$	$-\frac{a}{2EI} \left[(l - 2i) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) + 2a \cosh \left(\frac{i}{a} \right) - 2a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) \right]$
Δ_{B2}	赘余力 x_2 作用下 i 截面挠度	$\int_S \frac{\bar{M}M_2}{EI} + \int_S \frac{\bar{N}N_2}{EA}$	$\frac{a}{EI l^2} \left\{ -a \cosh \left(\frac{i}{a} \right) (24a^2 f + 4i^2 f - l^2 y_s) + \frac{1}{2} \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) [8a^2 f (2i - 3l) + l^2 (2i - l) (f - y_s)] + a \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) [24a^2 f + l(-4fi + 3fl - ly_s)] + 16a^2 i f \sinh \left(\frac{i}{a} \right) \right\} + \frac{1}{8EAf} (l \sqrt{l^2 + 16f^2} - \sqrt{l^4 + 64f^2 i^2})$
Δ_{B3}	赘余力 x_3 作用下 i 截面挠度	$\int_S \frac{\bar{M}M_3}{EI}$	$\frac{a}{4EI} \left[-(8a^2 - 2il + l^2) \sinh \left(\frac{l}{2a} \right) + 8a^2 \sinh \left(\frac{i}{a} \right) + 4a(l - i) \cosh \left(\frac{l}{2a} \right) - 4ai \cosh \left(\frac{i}{a} \right) \right]$

9552.1994 kNm²。本文公式计算和有限元计算的 $l/2$ 和 $l/4$ 截面挠度影响线如图 3 所示,典型数值列入表 5。

算例 2 矢高为 39.5 m,其他参数同算例 1。本文公式计算和有限元计算的 $l/2$ 和 $l/4$ 截面挠度影响线如图 4 所示,典型数值列入表 5。

从图 3 和图 4 及表 5 可以看出,本文公式计算与有限元分析结果最大相差不超过 1%,验证了本文推导的等截面抛物线无铰拱挠度的影响线解析解的精确性。另外还可以看出,矢跨比越大,公式计算与有限元结果相差越大,这与前面对近似积分拟合度的评价结论相吻合。

表 5 2 个算例典型数值对比表

Tab. 5 Typical results comparison of 2 examples

截面挠度		$l/2$			$l/4$		
荷载作用位置		本文公式/mm	有限元/mm	相对误差/%	本文公式/mm	有限元/mm	相对误差/%
算例 1	$l/4$	25.53	25.53	0	-122.55	-122.34	0.17
	$l/2$	-59.01	-58.94	0.12	25.53	25.53	0
	$3l/4$	25.53	25.53	0	92.80	92.54	0.28
算例 2	$l/4$	27.82	27.90	0.29	-142.84	-142.06	0.55
	$l/2$	-65.07	-64.81	0.40	27.82	27.90	0.29
	$3l/4$	27.82	27.90	0.29	110.42	109.37	0.96

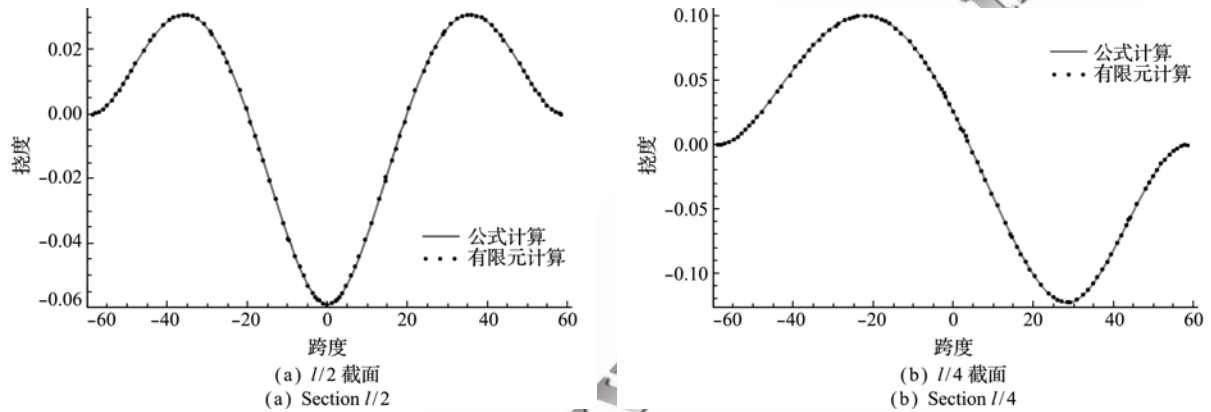


图 3 算例 1 公式与有限元计算结果对比(单位:m)
Fig. 3 Comparison between formula and finite element analysis of example 1(unit:m)

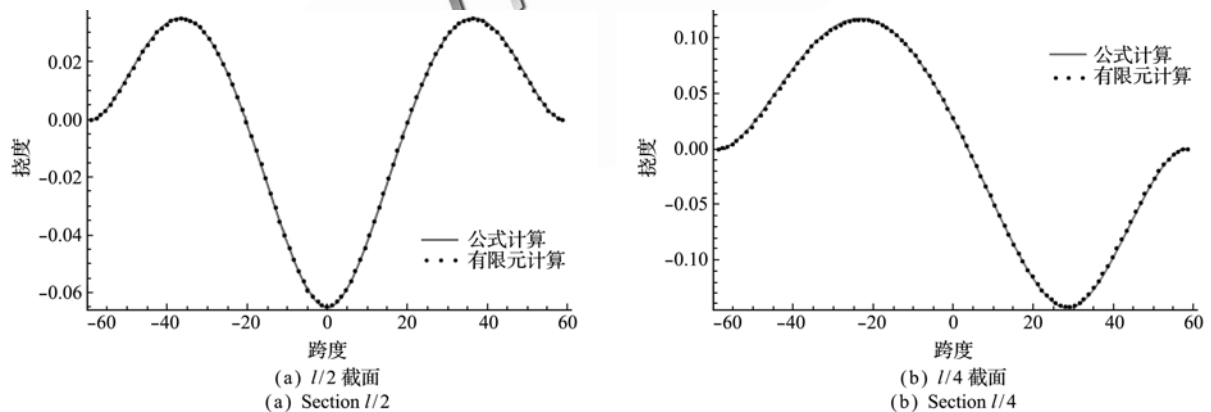


图 4 算例 2 公式与有限元计算结果对比(单位:m)
Fig. 4 Comparison between formula and finite element analysis of example 2(unit:m)

5 结 语

(1) 以近似曲线替代抛物线使弧长积分结果得到简化是求解抛物线拱内力及挠度的最有效手

段。近似曲线有多种,本文用沿曲线的曲率和作为量化指标评价拟合度。经计算,在常见矢跨比下,同一坐标系中悬索线与抛物线的曲率和最为接近,因此是近似计算的最优选择。当矢跨比较小时,圆

弧线与抛物线的拟合度也较好,此时也可用圆弧线近似等效抛物线。

(2) 在采用悬索线近似替代抛物线的基础上,利用基本力学原理推导出等截面抛物线无铰拱挠度影响线的实用解析表达式。本文公式计算与有限元分析结果最大相差不超过1%,完全满足工程精度要求,同时验证了本文计算公式的可靠性与精确度。

(3) 悬链线拱与抛物线拱类似,弧长积分难以得到显式解,鉴于此也可采用近似积分的方法解决。在寻求拟合度更好的近似曲线方面,也值得进一步研究。

参考文献(References):

- [1] 林同炎. 拱是结构也是建筑[J]. 土木工程学报, 1997, **30**(3): 11-15. (LIN Tong-yan, Arch is structure and architecture[J]. *China Civil Engineering Journal*, 1997, **30**(3): 11-15. (in Chinese))
- [2] 龙驭球, 包世华, 匡文起, 等. 结构力学教程(I)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. (LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua, KUANG Wen-qi, et al. *Structural Mechanics* (I)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2000. (in Chinese))
- [3] 李国豪. 桥梁结构稳定与振动(修订版)[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002. (LI Guo-hao, *Stability and Vibration of Bridge Structures (Revised Edition)* [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2002. (in Chinese))
- [4] 胡常福, 雷亮亮, 陈海龙, 等. 等截面抛物线拱桥内力实用解析解研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2011, **8**(5): 12-18. (HU Chang-fu, LEI Liang-liang, CHEN Hai-long, et al. Research on practical analytic solution of parabolic arch bridges with uniform section[J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2011, **8**(5): 12-18. (in Chinese))
- [5] 顾懋清, 石绍甫. 公路桥涵设计手册(拱桥上)[M]. 北京: 人民交通出版社, 1994. (GU Mao-qing, SHI Shao-fu, *Manual of Highway Bridge and Culvert (Arch Bridge)* [M]. Beijing: China Communications Press, 1994. (in Chinese))
- [6] Wang J, Melbourne C. Mechanics of MEXE method for masonry arch bridge assessment [A]. Proceedings of the ICE-Engineering and Computational Mechanics [C]. 2010.
- [7] 金伟良, 顾淑兴, 赵国藩. 无横撑肋拱桥横向稳定性的研究[J]. 中国公路学报, 1989, **2**(3): 42-48. (JIN Wei-liang, GU Shu-xing, ZHAO Guo-fan. The lateral stability of tied arch bridge without bracing beams [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 1989, **2**(3): 42-48. (in Chinese))
- [8] 刘 钊, 吕志涛. 有横撑系杆拱桥的侧向稳定承载力[J]. 工程力学, 2004, **21**(3): 21-24, 54. (LIU Zhao, LÜ Zhi-tao. Lateral buckling load of tied-arch bridges with transverse braces [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(3): 21-24, 54. (in Chinese))
- [9] 尼颖升, 徐 栋. 基于能量变分原理推导系杆拱拱肋弯矩增大系数[J]. 公路交通科技, 2014, **31**(3): 70-77. (NI Ying-sheng, Xu Dong. Deriving moment amplification coefficient of tied arch rib based on energy-variational principle[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2014, **31**(3): 70-77. (in Chinese))
- [10] 熊玉学, 刘庆照. 计算抛物线及椭圆弧长的近似公式[J]. 东北林业大学学报, 1991, **19**(2): 112-115. (XIONG Yu-xue, LIU Qing-zhao. Approximate formula for calculating parabola and the length of ellipse arc[J]. *Journal of Northeast Forestry University*, 1991, **19**(2): 112-115. (in Chinese))
- [11] 韦建刚, 陈宝春, 吴庆雄. 压弯钢管拱极限承载力计算的等效梁柱法[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(1): 87-93. (WEI Jian-gang, CHEN Bao-chun, WU Qing-xiong. Equivalent beam-column method to estimate critical load for steel tubular arch under compression and bending [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(1): 87-93. (in Chinese))
- [12] 胡常福, 陆小雨, 甘慧慧, 等. 基于近似积分的悬链线拱实用解析解[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2015, **46**(3): 1058-1065. (HU Chang-fu, LU Xiao-yu, GAN Hui-hui, et al. Practical analytical solution of catenary arch based on approximate integration method [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2015, **46**(3): 1058-1065. (in Chinese))
- [13] 谭红霞, 陈政清, 封周权. 拱结构平面外稳定系数的实用计算方法[J]. 工程数学学报, 2010, **27**(3): 496-502. (TAN Hong-xia, CHEN Zheng-qing, FENG Zhou-quan. Practical computation method for out-of-plane stability coefficients of arch structures [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2010, **27**(3): 496-502. (in Chinese))
- [14] 刘爱荣, 汪荷玲, 禹奇才, 等. 斜靠式拱桥侧倾失稳极限承载能力简化计算方法[J]. 土木工程学报, 2013, **46**(4): 93-102. (LIU Ai-rong, WANG He-ling, YU

Qi-cai, et al. A simplified calculation method of lateral buckling ultimate bearing capacity for leaning-type arch bridge[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2013, **46**(4):93-102. (in Chinese))

[15] 童 林. 悬索线钢管混凝土拱梁组合体系及其吊杆张

拉力计算研究[D]. 长沙理工大学, 2003. (TONG Lin. Research on Suspender Tensioning Force of CFST Arch-Beam Composite Bridge[D]. Changsha University of Science & Technology, 2003. (in Chinese))

Practical analytical solution of deflection influence line of clamped parabolic arch bridges with uniform section

YANG Yu-hou^{*1,2}, LIU Lai-jun¹, SUN Wei-gang¹, HAO Tian-zhi²

(1. Guangxi Transportation Research & Consulting Co., LTD, Nanning 530007, China;

2. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: In order to overcome the complexity in determining deflection of a parabolic arch using the analytical expression of arch length in differential form, an approximate curve that has a simple differential expression of its arc length to fit a parabola is considered to be the best way. Ultimately, the best fitting suspension curve is obtained according to the values of the curvature sum of three kinds of curves. On this basis, the analytical formula for calculating deflection influence line of clamped parabolic arch bridges with uniform section is derived based on fundamental mechanics principles, and then applied to an example. The results are compared with finite element analysis results. Numerical results show that the values obtained by the analytical formula are different from the finite element results by less 1%. Thus the analytical formula satisfies the engineering requirement and can be used in engineering practice.

Key words: bridge engineering; parabolic fixed-end arch bridge; deflection influence line; elasticity center method; practical analytical solution

引用本文/Cite this paper:

杨雨厚, 刘来君, 孙维刚, 等. 等截面抛物线无铰拱挠度影响线实用解析解[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(4):480-486.

YANG Yu-hou, LIU Lai-jun, SUN Wei-gang, et al. Practical analytical solution of deflection influence line of clamped parabolic arch bridges with uniform section[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(4):480-486.