

数值流形方法的粘性边界问题初探

钱莹^{*1,2}, 杨军²

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院 计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100190;

2. 北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

摘要:在实际工程数值流形方法分析中,采用固定约束边界的方法处理无限域或者半无限域的情况,边界处应力波的反射造成模拟结果与实际情况不符。本文基于 Lysmer 等人提出的粘性边界理论,在边界上设置阻尼器,推导相应粘性边界条件下流形单元刚度矩阵的数值计算格式,经岩石长条中弹性波传播算例,并与有限元结果对比,验证了该粘性边界的有效性,有利于数值流形方法的工程中推广应用。

关键词:数值模拟;数值流形方法;粘性边界;应力波传播

中图分类号:TU473

文献标识码:A

1 引言

众所周知,地下爆破对地下工程的设计、保护以及稳定性都有很大影响。目前,对爆轰波传播的数值研究已有很多报道。例如,马国伟等^[1]应用有限差分方法模拟一个地下工程爆破并获得冲击波的衰减规律。然而,一些研究表明岩石块体的不连续性可能对应力波的衰减起着重要作用;但是,在连续介质的模型中描述不连续性是非常困难的^[2,3]。考虑到岩石的不连续性,陈等^[4]将有限差分方法 AUTODYN 与离散元方法 UDEC 结合,模拟节理岩石中冲击波的传播,得到与试验数据相符的模拟结果。尽管离散元方法能够在计算模型中设置大量节理不连续面,但是它所采用的有限差分程序和迭代求解方法还是带来很多问题。基于上面的分析,石根华博士提出一种新的数值分析方法——流形元法^[5,6](Manifold Method),将基于连续介质力学的有限单元法与基于不连续变形分析方法 DDA 结合起来。流形元法不仅可以像 DDA 那样有效地模拟不连续面的接触和块体的运动,而且可以像有限元法那样精确地求解块体内部的应力分布,处理不连续面的张开、闭合、多裂缝扩展及多缝面接触等问题。

自数值流形方法出现以来,利用其分析结构的应力分布和破坏之后的块体运动规律报道很多^[7,8],但是很少看到有利用流形元法模拟应力波传播的

报道。模拟应力波传播的先决条件之一是无反射边界条件或者粘性边界条件。但是,目前的流形元程序中,只有固定边界条件,而固定边界通常会造成向外传播的应力波反射回模型中造成模拟失真。本文中,针对上述问题,提出粘性边界条件,推导粘性边界条件下流形单元刚度矩阵的数值计算格式,并将其添加到二阶流形元法程序中。为了验证方法正确性,利用修改后的程序模拟一维弹性波在岩石长条中的传播,采用粘性边界条件和固定边界条件两种情况,对比模拟结果。此外,还与有限元法结果进行比较。

2 流形元法的基本概念

2.1 流形元的覆盖和两套网格^[6]

流形元法提出了覆盖的概念并使用了两套网格,这是流形元法与有限元法的一个主要区别。物理网格由定义材料区域的边界线与节理裂隙等不连续面组成,用以定义所分析问题的物理域。数学网格由贴在物理网格之上的一层规则的三角形网格单元组成,并形成数学覆盖,同时用来定义插值函数。两层网格贴在一起构成计算网格。从中可以看出,只要插值网格完全覆盖物理域,物理域与插值函数的插值域就可以完全分离,最后形成流形单元,也就是积分单元,其形状任意。流形元采用单纯形积分法,单纯形积分可以对任意多边形积分,以多边形代替曲边。

2.2 二阶流形元法

2.2.1 二阶流形元的位移函数

借鉴有限元的思路,用 6 节点三角形单元构造

二阶插值函数,即用二阶权函数和数学网格 6 个顶点上的常量位移构成二阶位移函数,即

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \tilde{\omega}_i(x,y) \begin{Bmatrix} u_i(x,y) \\ v_i(x,y) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 为总体位移函数, $\tilde{\omega}_i(x,y)$ 是节点权函数, $u_i(x,y)$ 和 $v_i(x,y)$ 是节点位移函数,各矩阵的构造和计算方法可参看文献[6]。

2.2.2 瞬时平衡方程^[8]

流形元法所使用的方程为结构动力方程:

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\Delta\delta = \Delta F \quad (2)$$

式中 M 为质量矩阵, C 为阻尼矩阵, $\Delta\delta$ 为位移增量, $\dot{\delta}$ 和 $\ddot{\delta}$ 分别为位移速度和加速度。 $K = K_e + K_{cn} + K_{cs} + K_f$, K_e 是刚度矩阵, K_{cn} 和 K_{cs} 分别为块体与不连续面之间的接触矩阵, K_f 为约束矩阵, ΔF 为总荷载增量, $\Delta F = F_p + F_b + F_f - F_0 + F_{cn} + F_{cs} + F_{fr}$, F_p 是外荷载向量, F_b 为体积力向量, F_f 为已知位移约束引起的等效荷载向量, F_0 为初应力向量, F_{cn} 和 F_{cs} 分别为法向与切向接触引起的等效荷载向量, F_{fr} 为接触面之间的摩擦力引起的等效荷载向量。

3 粘性边界条件^[9]

本文采用的粘性边界是 Lysmer 和 Kuhlemeyer^[10] 提出的。其基本思想是,在计算模型的人工边界处,分别单独设立法向和切向阻尼器,以吸收系统向外辐射的能量。对于粘性边界处的每一块体采用两组阻尼器,如图 1 所示。

假设块体 i 上,质点 (x,y) 处一对阻尼器的法向与切向阻力为

$$t_n = -\rho C_p v_n, \quad t_s = -\rho C_s v_s \quad (3)$$

式中 ρ 为密度, v_n 和 v_s 为点 (x,y) 处法向和切向速度分量, C_p 和 C_s 分别是质点纵波和横波速度,其中

$$C_p = \sqrt{\frac{(K + \frac{4G}{3})}{\rho}}, \quad C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (4)$$

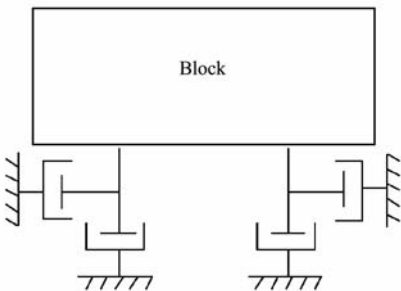


图 1 粘性边界
Fig. 1 The viscous boundary

式中 K 为岩石材料的体积模量, G 为岩石材料的剪切模量。

所以,粘性力可以表示为

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix} = -\rho l \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ v_s \end{Bmatrix} = -\rho l \begin{bmatrix} C_p & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中 l 是受到粘性阻力的单元长度, (n_x, n_y) 是粘性边界的方向余弦, v_x 和 v_y 分别是点 (x,y) 处 x 方向和 y 方向的速度。

应变能可由下式求得:

$$\begin{aligned} \Pi &= -(u_n \quad u_s) \begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix} = \\ &= -(u_x \quad u_y) \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_s \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

式中 u_x 和 u_y 分别是点 (x,y) 处的 x 方向和 y 方向的位移,将式(5)代入式(6),应变能可表示为

$$\Pi = \rho l D_i^T T_i^T C T_i \dot{D}_i \quad (7)$$

式中 D_i 是变形变量矩阵, T_i 是位移形函数矩阵,把 C 称为波速子矩阵,即

$$C = \begin{bmatrix} C_p n_x^2 + C_s n_y^2 & (C_p - C_s) n_x n_y \\ (C_p - C_s) n_x n_y & C_s n_x^2 + C_p n_y^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

考虑到初始状态 $D_{i0} = 0$,推导可得

$$\dot{D}_i = \frac{D_i - D_{i0}}{\Delta} = \frac{D_i}{\Delta} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7),可得出位移势能为

$$\Pi = \frac{\rho l D_i^T T_i^T C T_i D_i}{\Delta} \quad (10)$$

根据最小势能原理,可以得到 6 个线性方程,将其添加到整体方程中。

4 算 例

将上述粘性边界条件添加到二阶流形元法程序代码中。由于目前流形元程序是二维的,这里计算一维应变弹性波在岩石长条中传播和反射的简单算例以验证边界对应力波的吸收能力。

4.1 计算模型与参数

如图 2 所示,长 $L = 1$ m,宽 $W = 0.03$ m,单位

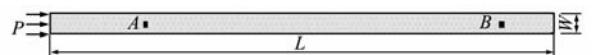


图 2 计算模型
Fig. 2 Calculate model

厚度的岩石长条为流形元法的计算模型。在杆左端施加一沿整个端面均匀分布的冲击三角波载荷来模拟爆炸产生的荷载, 升压时间和降压时间都为 0.02 ms, 压力峰值为 2 MPa。在距离岩石长条左端 0.2 m 与 0.9 m 的中心线上设置两个测点 A 和 B。为了更好地验证粘性边界对应力波的吸收能力, 我们分别计算长条右端为固定边界和粘性边界时的两种情况。不考虑重力, 岩石材料的弹性模量为 50 GPa, 泊松比为 0.25, 密度为 2600 kg/m³, 体积模量为 44.35 GPa, 剪切模量为 28.28 GPa。

4.2 模拟结果与分析

如图 3 所示, 这里仅计算了前 0.8 ms 内应力波在杆中的传播情况。从图中各点应力 - 时间曲线可以看出: 应力波在到达右边界前波形未反射时在条中传播的情况是一致的, 各图中的第二个“倒三角”前两种边界条件的波形是重合的, 这与实际情况完全符合。

下面具体分析一下粘性边界对反射波的吸收。从 B 点的输出波形图 3(b) 可以看到, 粘性边界吸

收了大部分反射波, 没有形成固定边界时对入射波反射的“倒三角”波形, 只是波形变宽, 尾部有些扭曲。当反射应力波传到左端面被自由边界反射回来时, 应力峰值明显小于固定边界的情况, 这也说明了粘性边界吸收了大部分反射波。从 A 测点的应力波形, 能清楚地看到, 粘性边界的反射波峰值明显小于固定边界反射波峰值, 如图 3(a) 中第二个“倒三角”所示。同样反射波传到左端面自由边界被反射回来的波形也有相同的现象, 见图 3(a) 中第一个“正三角”所示。

此外, 采用相同的计算模型、加载方式和材料参数, 用有限元方法的计算结果如图 4 和图 5 所示。可见有限元法的无反射边界几乎能够完全达到无反射状态, 而流形元法的固定边界与有限元法基本吻合。

从上面分析不难看出, 本文提出的粘性边界对应力波的反射具有一定吸收作用, 但是从应力波形上看还是反映出固定边界反射的特性, 之所以发生这样的现象, 与很多因素有关, 要解决这些问题还需要进一步系统研究。

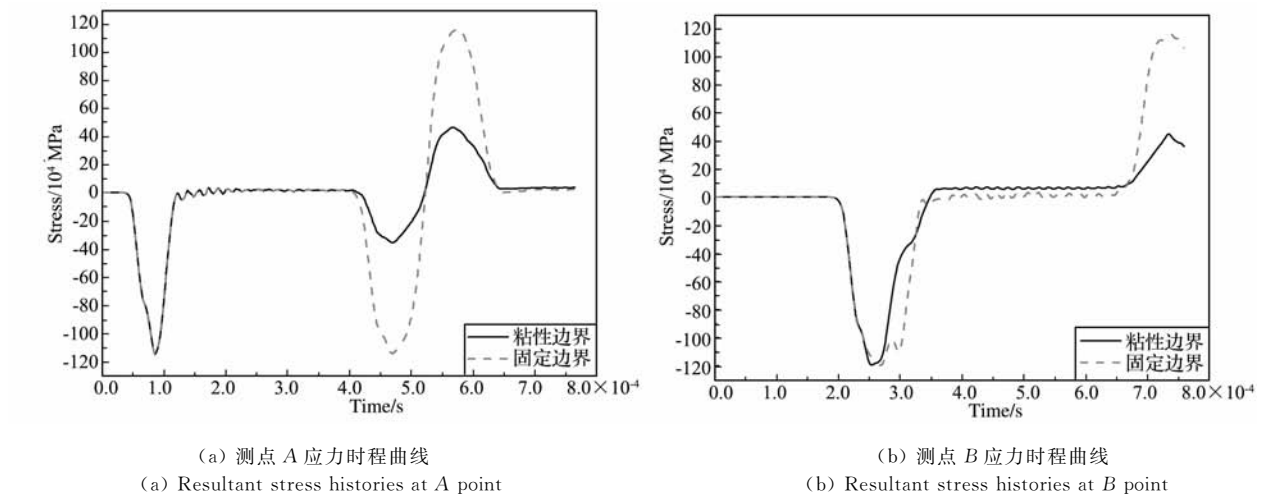


Fig. 3 Resultant stress histories obtained from the VBC and FBC at different points by NMM

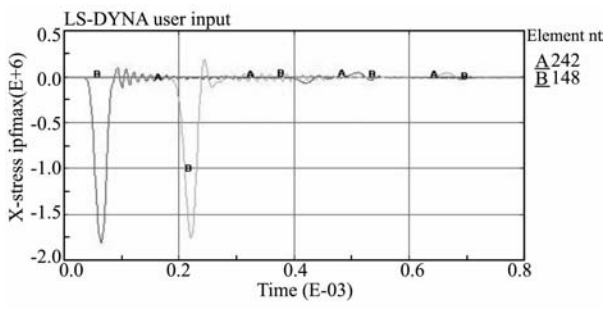


图 4 有限元法无反射边界各测点的应力时程曲线

Fig. 4 Resultant stress histories obtained from the NFC at different points by FEM

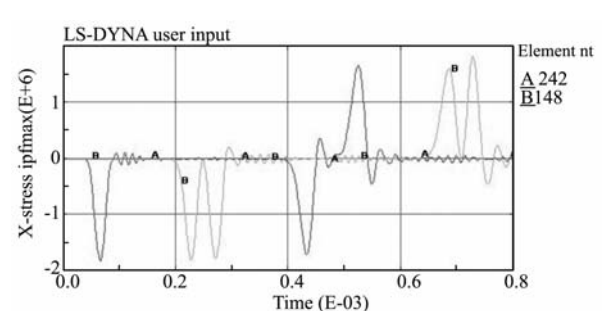


图 5 有限元法固定边界各测点的应力时程曲线

Fig. 5 Resultant stress histories obtained from the FBC at different points by FEM

5 结 论

本文基于流形元法的基本理论,提出粘性边界条件,并将其添加到二阶流形元程序中。利用修改后的程序模拟一维弹性波在岩石条中的传播过程,通过比较固定边界和粘性边界两种情况,以及与有限元计算结果对比,得出本文提出的粘性边界对应力波具有一定的吸收能力,可以将其推广到更多的实际工程模拟计算中。

参考文献(References):

- [1] MA G W, HAO H, ZHAO Y X. Modeling of wave propagation induced by underground explosion[J]. *Comput Geotechnol*, 1998, **22**(3-4):283-303.
- [2] JING L, HUDSON J A. Numerical methods in rock mechanics[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2002, **39**(4):409-427.
- [3] LI X B, ZHOU Z L, LI Q Y, et al. Parameter analysis of anchor bolt support for large span and jointed rock mass[J]. *J Cent South Univ T*, 2005, **12**(4):483-487.
- [4] CHEN S G, ZHAO J. A study of UDEC modeling for blast wave propagation in jointed rock masses[J]. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1998, **35**(1):93-99.
- [5] SHI G H. Manifold Method of Material Analysis [A]. Transactions of the Ninth Army Conference on

Applied Mathematics and Computing [C]. Minneapolis, Minncsoda, USA, 1992:51-76.

- [6] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民, 译. 北京:清华大学出版社, 1997. (SHI Genhua. *Numerical Manifold Method and Discontinuous Deformation Analysis* [M]. Translated by Pei J M. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [7] ZHANG G X, SUJIURA Y, SAITO K. Application of Manifold Method to Jointed Dam Foundation [A]. Amadei B. Proceedings of the 3rd International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation from Theory to Practice [C]. Vail, Coloraclo: The Montana Oil Journal Inc, 1999.
- [8] 张国新, 彭 静. 二阶流形元与结构变形分析[J]. 力学学报, 2002, **34**(2):261-269. (ZHANG Guo-xin, PENG Jing. Second order manifold method in structure failure analysis [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, **34**(2):261-269. (in Chinese))
- [9] JIAO Y Y, ZHANG X L, ZHAO J, et al. Viscous boundary of DDA for modeling stress wave propagation in jointed rock[J]. *Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2007, **44**:1070-1076.
- [10] LYSMER J, KUHLEMEYER R L. Finite element method accuracy for wave propagation problems[J]. *J Soil Mech Found Div ASCE*, 1973, **99**(5):421-427.

Primary study on viscous boundary in numerical manifold method

QIAN Ying^{*1,2}, YANG Jun²

(1. Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In engineering analysis by numerical manifold method, infinite region or half infinite region is treated by fixed boundary. But stress waves reflect severely at fixed boundary. The simulative results are not in agreement with fact instances. So based on Lysmer's viscous boundary theory, a new viscous boundary is brought forward. This approach is based on the use of the independent dashpots in the normal and shear directions of specific boundaries, and then corresponding viscous boundary condition stiffness matrix is derived and implemented into the original NMM program. New method has been proven to be an effective method by a simple example, in which one dimensional elastic wave propagates in a long rock bar, and comparing with resultant stress wave obtained from different boundary by FEM. The result obtained from the FBC by NMM is in agreement with that by FEM. But the result obtained from the VBC by NMM does not agree with that from the non-reflection boundary by FEM. It is helpful for programming and the application of numerical manifold method to engineering.

Key words: numerical simulation; numerical manifold method; viscous boundary; stress wave propagation