

冻土活动层相变温度场 Chebyshev 拟谱分析

李南生^{*1}, 吴青柏²

(1. 同济大学 土木工程学院 水利工程系, 上海 200092; 2. 中国科学院 寒区旱区环境与工程研究所, 兰州 730000)

摘 要:在冻土相变温度热传导机理基础上,应用冻土计算中水热输运过程成熟的通用物理模型,提出冻土活动层温度的一种全新的数值分析方法-谱方法。应用 Chebyshev 多项式作为基函数将温度解展开,在研究域(或单元)内采用伪谱 Chebyshev 逼近的谱方法。为了与谱方法的高精度相配合及提高时程积分的稳定性,本文应用四阶 Runger-Kutta 法进行时程积分,变物性温度泛函-热导系数、热容量等考虑效应滞后的处理方法。本文提出冻土非线性问题数值计算拟谱分析的理论构架,其计算方法在冻土工程应用中具有一定的理论导向作用和较大的实用价值。

关键词:冻土活动层;相变温度场;Chebyshev 拟谱分析;变物性方程

中图分类号:P642.14

文献标识码:A

1 引 言

认识冻土相变过程和水热过程的结构物与构筑物的作用和影响,准确预测和计算冻土温度场在冻土中分布情况,对于明确和克服冻胀对结构的破坏无疑起决定性作用。随着冻土区工程项目对于水热输运问题计算模式、理论和精度要求的提高,研究人员先后提出各种经验与半经验、流体力学、刚冰和热力学的冻土水热模型^[1-3]和冻土本构模型^[4,5],在此基础上探索采用计算精度、效率更高和收敛更快、稳定性更可靠的计算方法。在利用冻土作为建筑物基础时,考虑冻土特殊的热力学性质、行为以及冻土温度分布状况是极为重要的工程设计因素。

长期以来,国内外对冻土耦合热力学计算理论和方法,以及冻土介质热力学性质的研究,取得了长足的发展。通过对冻土中细观水热耦合输运机理认识的深入和采用有限元等数值分析技术,已有可能对复杂的冻土热力学问题进行非线性分析^[5,6],预测冻结发展的过程和由于水分因素引起冻土含水量的变化趋势,从而预测土体冻胀大小及其分布场。但是,人们经过大量数值模拟计算发现,计算分析的结果不容易与现场观测或实验数据符合的

很好^[7,8]。究其原因,一是在计算中采用的冻土热力学模型不够理想,冻土介质的热力学特性把握不够准确,有些甚至与现场情况相差甚远;二是缺乏对所采用计算方法的具体分析,非线性的水热问题数值计算解的精度、收敛性和稳定性没有理论保证。本文在水热模型和介质特性研究基础上,首次给出冻土温度场数值计算的一种新算法-Chebyshev 拟谱法。大量的计算结果与实际观测数据之间出现的较大误差除了要求改进计算的理论模型之外,在冻土耦合相变温度应力计算的理论和方法上亦迫切需要创新,尤其必须解决多重非线性问题数值精度、收敛性等方面的计算理论问题。由 Kreiss, Orszag, Quarteroni, Canuto 和 郭本瑜等^[9-12]提出和发展的谱方法(Spectral Method)提供了除有限差分和有限元法之外的第三类数值计算方法,开辟了数值计算研究的一个全新领域^[13]。谱方法的最大优点是所谓“无穷阶收敛性”,即只要原问题的解充分光滑,那么谱方法的收敛阶将是无穷阶的^[13];此外,快速算法的使用可以大大减少计算量。当然,谱方法与传统的数值算法相比也有其不足之处:一是要求求解区域比较规则,一般是乘积型区域,即求解域边界必须与坐标面平行;其次是谱方法应用于强非线性问题计算的成功事例还较少。

本文采用谱方法中的 Chebyshev 拟谱方法就冻土活动层强非线性相变温度场问题进行数值计

收稿日期:2007-06-28;修改稿收到日期:2008-05-08.

基金项目:中国科学院创新工程重大(KZCX1-SW-04)

资助项目.

作者简介:李南生*(1960-),男,博士,教授

(E-mail:linansheng@online.sh.cn).

算,利用谱方法的高精度特性改进冻土活动层温度常用工程数值分析方法中存在的计算误差,弥补由于冻土水热模型不完善产生的影响。以 δ -函数作为检验函数使得温度解 Chebyshev 展开式在 Chebyshev 配置点处严格满足非线性相变温度方程,形成冻土活动层变物性相变温度谱展开的空间离散格式。变物性系数-热导系数、热容量等考虑温度效应滞后的处理方法。同时,为了与谱方法的高精度相配合,提高时程积分解稳定性,本文采用四阶 Runge-Kutta 法对发展方程进行时程积分。算例结果验证谱方法的高精度在强非线性情况条件下亦能保持,并考察了近似阶选取的一般原则。

2 Chebyshev 拟谱分析的算法描述

2.1 冻土活动层相变温度场方程

冻土活动层温度 $T(x, t)$ 满足相变热传导方程。根据 Taylor, G. S. 和 Luthin, J. N. 提出的冻土地基相变温度场计算模型^[14, 15],仅考虑土骨架和孔隙水的热传导和相变过程,且认为未冻水含量仅是温度的泛函,忽略冻融过程中水分迁移、蒸腾和化学势等因素的作用,冻土活动层温度分布 $T(x, t)$ 的数学模型可使用如下热传导方程:

$$\bar{C} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda \nabla T(x, t)] \quad (1)$$

$x \in \Omega, t > 0$

式中 x 是空间坐标, t 是时间变量, ∇ 是梯度算子,热传导系数 λ 和热容系数 $\bar{C}$ 是待求函数温度 $T(x, t)$ 的泛函,热容系数 $\bar{C}$ 又常被称为视热容系数,与冻土含冰量 ϑ_i 的关系通常为^[15]:

$$\bar{C} = C + L\rho_i \frac{\partial \vartheta_i}{\partial T} \quad (2)$$

冻土、融土和冻融 mush 区的热传导系数 λ 和热容系数 C 按照不同相的温度范围分别为^[15]:

$$C = \begin{cases} C^+ & T > T_p \\ \frac{1}{2}(C^+ + C^-) & T_b \leq T \leq T_p \\ C^- & T < T_b \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^+ & T > T_p \\ \frac{1}{2}(\lambda^+ + \lambda^-) & T_b \leq T \leq T_p \\ \lambda^- & T < T_b \end{cases}$$

式中 $[T_b, T_p]$ 为冻融 mush 区的下界和上界温度值, C^+, C^-, λ^+ 和 λ^- 分别为融土与冻土的热容系数

和热传导系数。

在现有模型下方程(1)和(2)不构成一个完备求解的方程组,其中未冻水含量为温度的泛函,即

$$\vartheta_w = f(T) \quad (3)$$

其函数关系必须由土质试验获得。

初始条件:

$$T(x, 0) = \Psi_1(x) \quad (4)$$

边界条件:

$$\left[\lambda_i \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} + h_i T(x, t) \right]_{\Gamma_i} = \Psi_2(t) \quad (5)$$

式中 $\Psi_1(t)$ 和 $\Psi_2(x)$ 分别为已知的初始温度函数和边界温度分布函数。边界条件(5)取为第三类边界形式,其中 h_i 和 λ_i 分别为第 i 个边界面处的热交换系数和热传导系数,根据不同边界的条件类型通过置 h_i 和 λ_i 等于零而转变为其他形式的边界条件; n 为边界面 Γ 的外法线方向单位向量。式(1~5)构成冻土活动层相变温度场计算的定解问题,相变热传导问题中物理系数强烈地依赖待求的温度函数 $T(x, t)$,在非线性数值计算中考虑采用预报-校正的迭代运算方法进行处理,即在 t 时刻、空间位置 x 处的温度状态假定其处于前一时刻 $t - \Delta t$ 的温度状态,如果能使非线性方程满足则为实际温度状态,否则反之。

2.2 冻土相变温度场计算的 Chebyshev 拟谱方法

变系数相变热传导方程(1)的谱方法计算,通过选用其本身即为多项式表示的特殊函数作为基函数,将未知函数分解展开成空间变量基与时间函数系数的分离变量形式的解式。温度函数的 Chebyshev 谱展开式为^[13]:

$$T_N(x; t) \cong \sum_{m=0}^N a_m(t) T_m(x) \quad (6)$$

式中 $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, $m = 1, 2, \dots, N$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的 m 次 Chebyshev 多项式。由于 Chebyshev 多项式的形式是确定的,这样非线性方程(1)求解就转换为确定系数函数 $a_m(t)$ 的形式;Chebyshev 谱展开的项数 N 选取受计算精度的控制,采用拟 Chebyshev 谱方法时, Chebyshev 谱展开的项数 N 还表示配点个数。从本文给出的第一个算例看到,当 $4 < N < 10$,增加展开项数 N 对提高数值拟合精度效果很明显,但当 N 达到某

个大整数之后,继续增大 N 对增加计算精度没有多大实际作用。

现将温度函数的 Chebyshev 谱展开式(6)代入冻土活动层热传导方程(1)中,由于 Chebyshev 谱展开式(6)为近似展开,不严格满足方程而存在误差余量,取检验函数 $\Psi_i(r) = \delta(x - x_i), i = 1, 2, \dots, N - 1$,其中 x_i 是 $[-1, 1]$ 上的不同的配置点,一般取 $x_i = \cos \frac{i\pi}{N}$,使冻土活动层热传导方程(1)在配置点 x_i 处成立,即

$$\int_{\Omega} \left[\bar{C} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \right] \Psi(x_i) d\Omega = 0$$
$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

上式中配置点数有 $N - 1$ 个,全部在区域内部,边界点对应于 $i = 0, N$ 。由上式可得

$$\sum_{m=0}^N \left\{ \bar{C}(x_i) T_m(x_i) \frac{da_m(t)}{dt} - \lambda(x_i) \frac{d^2 T_m(x_i)}{dx^2} a_m(t) \right\} = 0$$
$$x_i = \cos \frac{i\pi}{N}, i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (7)$$

边界条件:

$$T_N(x;t) \Big|_r = \sum_{m=0}^N \left[\lambda(x_i) \frac{dT(x_i)}{dx} + h_i(x_i) T_m(x_i) \right] a_m(t) = \Psi_1(t), i = 0, N \quad (8)$$

初值条件:

$$T_N(x;0) = \sum_{m=0}^N T_m(x_i) a_m(0) = \Psi_2(x_i) \quad (9)$$

方程式(7)为在 N 个配置点所满足的热传导方程组,配合边界条件(8)构成 $N + 1$ 个完备方程组。变物性视热容系数 $\bar{C}$ 和热传导系数 λ 是待求的温度函数 $T(\mathbf{x}, t)$ 的泛函,此处它们对应于配置点 $x_i = \cos \frac{i\pi}{N}$ 的温度状态,所以以下的数值求解热容系数 $\bar{C}$ 和热传导系数 λ 只需在配置点处 x_i 进行温度效应滞后迭代计算。

把式(7,8)表示成矩阵形式,引入热容量矩阵 $[\bar{C}]$ 、热传导矩阵 $[\bar{K}]$ 和向量 $\{\mathbf{A}(t)\}$:

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} C(x_1)T_0(x_1) & C(x_1)T_0(x_1) & \cdots & C(x_1)T_1(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_i)T_0(x_i) & C(x_2)T_0(x_i) & \cdots & C(x_i)T_1(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_{N-1})T_0(x_{N-1}) & C(x_{N-1})T_0(x_{N-1}) & \cdots & C(x_{N-1})T_1(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C(x_1)T_1(x_1) & \cdots & C(x_1)T_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_i)T_1(x_i) & \cdots & C(x_i)T_N(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_{N-1})T_1(x_{N-1}) & \cdots & C(x_{N-1})T_N(x_{N-1}) \end{bmatrix}$$
$$[\bar{K}] = [D]^2 [C]$$
$$\{\mathbf{A}'(t)\} = [a'_0(t) \ a'_1(t) \cdots a'_N(t)]^T$$
$$\{\mathbf{A}(t)\} = [a_0(t) \ a_1(t) \cdots a_N(t)]^T$$

式中 $[C]$ 等于在 $[\bar{C}]$ 中,令

$$C(x_i) \equiv 1 \ (i = 1, 2, \dots, N - 1)$$

而

$$(D)_{j,k} = \frac{d}{dx} g_k(x) \Big|_{x=x_j} = \begin{cases} \frac{c_j}{c_k} \cdot \frac{(-1)^{k+j}}{x_j - c_k} & j \neq k \\ -\frac{x_k}{2(1-x_k^2)} & 1 \leq k = j \leq N - 1 \\ \frac{2N^2 + 1}{6} & k = j = 0 \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & k = j = N \end{cases}$$
$$g_k(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_k c_j} T_j(x_k) T_j(x) = \frac{(-1)^{k+1} (1-x^2) T'_N(x)}{c_k N^2 (x-x_k)}$$
$$c_k = \begin{cases} 2 & k = 0, N \\ 1 & 1 \leq k \leq N - 1 \end{cases}$$

可得冻土活动层热传导方程(7)经 Chebyshev 离散之后的矩阵形式为

$$[\bar{C}]\{\mathbf{A}'(t)\} = [\bar{K}]\{\mathbf{A}(t)\} \quad (10)$$

类似地边界条件(8)的矩阵方程为

$$[\tilde{C}]\{\mathbf{A}'(t)\} = \{\Psi'_1(t)\} \quad (11)$$

为了与以下采用的时程积分的四阶龙格 - 库塔法相适应,在上式采用对边界条件(8)等式两边求时间的一阶导数的表达形式。

首先,由初值条件(9)和在边界条件(8)中令时间 $t = 0$,求出 Chebyshev 谱展开式的初始向量 $\{\mathbf{A}(0)\}$ 。

组合 N 个配置点的矩阵形式热传导方程(10)和 2 个边界点处的边界条件(11)获得 $N + 1$ 个联立的冻土活动层热传导方程矩阵形式:

$$[C] \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{A}\} = \{\mathbf{T}(t)\} \quad (12)$$

式中

$$[C] = \begin{bmatrix} [\bar{C}]_{(N-1) \times (N+1)} \\ [\tilde{C}]_{2 \times (N+1)} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_{(N-1) \times (N+1)} \\ [\mathbf{0}]_{2 \times (N+1)} \end{bmatrix}$$
$$\{T(t)\} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{(N-1) \times 1} \\ \vdots \\ [\Psi_1(t)]_{(2 \times 1)} \end{bmatrix}$$

式中 $[\mathbf{0}]$ 为零向量(或矩阵)。

值得注意的是,在冻土活动层热传导方程矩阵方程(12)中,热容矩阵 $[C]$ 和热传导矩阵 $[K]$ 并非常数矩阵,它们严格依赖于配置点处的温度取值,这样导致冻土活动层热传导方程矩阵方程(12)成为非线性发展方程计算问题。为了适应谱方法的高精度和保证时程积分的稳定性,以下将采用具有四阶精度的Runge-Kutta积分法,数值迭代过程对变物性系数矩阵 $[C]$ 和 $[K]$ 采用效应滞后的计算处理方式^[8]。

2.3 四阶 Runge-Kutta 时程积分

谱方法的高精度体现在热传导方程的空间离散Chebyshev展开式中。由于四阶Runger-Kutta法的局部误差是 $O(h^5)$,整体误差是 $O(h^4)$,并且四阶Runger-Kutta法的计算效率较高^[16],因此为了配合空间域谱方法的高精度,时间离散采用四阶Runger-Kutta法进行差分运算。所以对一阶变物性热传导方程的初值问题采用四阶隐式Runger-Kutta法进行差分,其格式为^[16]:

$$\{A_{n+1}\} = \{A_n\} + h \sum_{i=1}^2 b_i \{f(t_n + c_i h, \{A_n\} + \{k_i\})\}$$
$$\{k_i\} = h \sum_{j=1}^2 a_{ij} \{f(t_n + c_j h, \{A_n\} + \{k_j\})\}$$

(13)

(14)

式中 $t_n = t_0 + nh$, $h > 0$ 为积分步长, a_n 即为式(12)

的数值解;和 $f(t) = [C]^{-1}(\{T(t)\} - [K]\{A\})$ 。
式(13,14)中系数由下列格式给出:

$$\begin{matrix} & & & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ c_1 & a_{11} & a_{12} & \Rightarrow & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & b_1 & b_2 & & & \end{matrix}$$

具有足够精度的时间步长 h 选取采用式^[16]中介绍的步长减半的方法,即每求出一迭代步解 $\{A_{n+1}\}$ 之后,都把步长减半重新迭代求解该值,如果两次迭代差别不大,那么就选取该步长,否则减半再验算。

3 算例与比较

考虑到冻土非线性相变问题普遍缺乏基准解^[18],给校验算法的精确性等方面带来困难,一般采用退而求其次的方式进行算法校核,即将非线性问题退化为相应的线性问题进行精确解与算法解间比较。因此,以下首先考察具有精确解的退化形式线性热传导方程问题的Chebyshev拟谱解,由此说明文中采用的Chebyshev拟谱方法数值精度及其解随Chebyshev展开式阶数 N 的收敛速率特性。第二个例子将提出变物性系数冻土相变热传导问题Chebyshev拟谱方法与有限元方法计算的对照。

算例 1 系数归一化后的热传导方程为

$$Fu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

边界条件和初始条件分别取为

$$u(-1, t) = u(1, t) = 100$$
$$u_0(x) = -100 \cos(\pi x)$$

取时间步长 $\Delta t = 0.01$ 。计算结果见表 1。

表 1 Chebyshev 拟谱方法计算值与理论值对照
Tab. 1 Comparing the valuation between pseudo-Chebyshev and analytical method

x	理论值		谱方法计算值		
	t = 0.25	t = 0.5	N	t = 0.25	t = 0.5
0.75	65.0656791236	81.08180283871	6	65.11985771484375	81.08655953613283
			10	65.06557002294538	81.08180473090124
			14	65.06567947445670	81.08180289378205
0.5	35.1454198422	65.04286234874	6	35.35441875000000	65.04906781249999
			10	35.31453654296875	65.04286186083984
			14	35.31454102045288	65.04286235367303
0.25	15.3110124879	54.32553754642	6	15.30197255859375	54.33146004394531
			10	15.31102140859604	54.32553810926198
			14	15.31101215538685	54.32553812859395
0	8.25580012541	50.56202345611	6	8.22690000000000	50.56800000000000
			10	8.25580000000000	50.56200000000000
			14	8.25580000000000	50.56200000000000

表 1 选取 x 分别等于 0、0.25、0.5、0.75 在时刻 t 等于 0.25、0.5 谱展开阶数 N 分别取 6、10、14 时, Chebyshev 拟谱方法与精确计算比较。仅以 $t = 0.5, x = 0.75$ 为例, 当谱展开阶数 N 分别为 6、10、14 时, Chebyshev 拟谱与精确计算的误差分别为: 绝对误差 $\|\Delta u\| = 0.0048$, 相对误差 $\|\Delta u\|/u_p = 5.867 \times 10^{-5}$ (u_p 温度精确值), $\|\Delta u\| = 6.224 \times 10^{-5}$, $\|\Delta u\|/u_p = 7.676 \times 10^{-6}$, $\|\Delta u\| = 5.51 \times 10^{-9}$, $\|\Delta u\|/u_p = 6.79 \times 10^{-10}$ 。从此例可知, 数值解随着 Chebyshev 插值多项式次数 N 增加, 很快地收敛于问题的精确解, 当 $N = 6$ 时, 已基本接近理论解。因而在工程计算中, 为计算效率计, 毋须为增加有限的计算精度而增大插值项数。

图 1 给出温度函数 $u(x, t)$ 在 $t=0.5, x=0.75$ 的 Chebyshev 拟谱计算值与展开阶数 N 的关系曲线, 从图中不难看出, 当展开阶 $N < 4$, 温度值 $u_N(x, t)$ 一般不可靠, 本例中当 $N > 6$ 之后, 此时该位置的温度值在误差许可范围内, 可以认为没有变化。

算例 2 沿用文献[8,17,18]中的未冻水含量函数、冻土热物理参数值设定, 考虑一个上边界(地表)温度为冬季地表平均温度 $T_B = -21^\circ\text{C}$, 活动层最下部(深度为 2 m)取恒定温度值 $T_d = 9.5^\circ\text{C}$, 活动层初始温度等于下边界温度。相变潜热 $L =$

表 2 冻土、融土的热参数

Tab. 2 Thermo-parameters of frozen ground and ordinary soil

土体	密度 ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)		比热 ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)		导热系数 ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$)	
	冻土	融土	冻土	融土	冻土	融土
	1450	1450	1.13	1.58	1.74	1.40

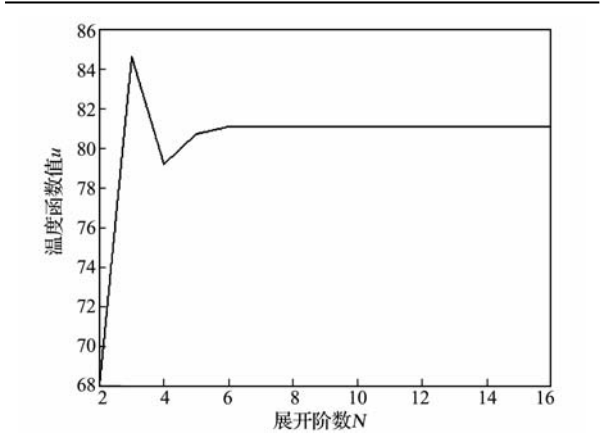


图 1 N - u 相关曲线
Fig. 1 N - u correlative curve

$3.346 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$; 冻土、融土的热参数列入表 2。冻土 mush 区温度界限为 $-0.75 \leq T \leq -0.25$ 。

未冻水含量与温度的关系根据文献[15] 取为下列关系:

$$\vartheta_w = \begin{cases} 0.0644 e^{0.0551T} & T < -0.75 \\ 0.3058 + 0.596 (T + 0.30) & -0.75 \leq T \leq -0.30 \\ 0.3058 & T > -0.30 \end{cases}$$

图 2 ~ 图 4 分别示出对应时刻 $t=50 \text{ h}, 100 \text{ h}, 150 \text{ h}$ 而 Chebyshev 拟谱展开阶数 N 分别取为 5, 10 时, 活动层温度随时间的变化情况比较, 可以得出结论, 当 Chebyshev 拟谱展开阶数 $N \geq 5$ 之后, Chebyshev 拟谱方法的计算精度已经可以满足要求, 这样大大提高了 Chebyshev 拟谱方法的计算效率。图 5 所示 Chebyshev 拟谱展开阶数 $N = 10$, 积分步长取为 1 小时, 时刻分别为 $t = 50 \text{ h}, 100 \text{ h}, 150 \text{ h}$ 时活动层温度随时间的变化情况。

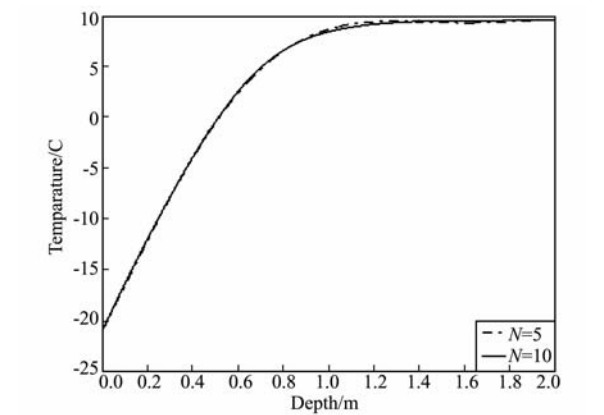


图 2 对应时刻 $t = 50 \text{ h}$ 谱展开阶数 $N = 5, 10$ 时, 活动层温度随时间变化比较

Fig. 2 The different temperature curves of active layer at time $t = 50 \text{ h}$ if expansion order $N = 5, 10$

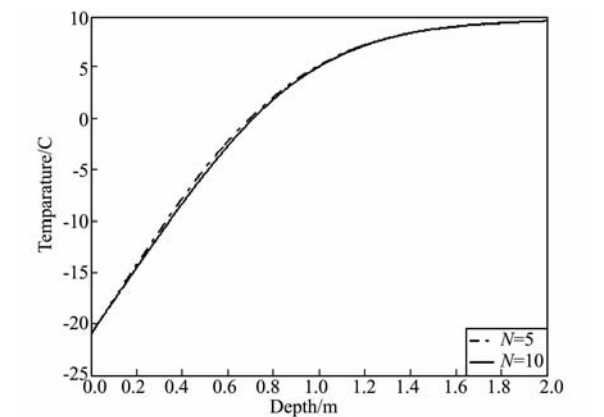


图 3 对应时刻 $t = 100 \text{ h}$ 谱展开阶数 $N = 5, 10$ 时, 活动层温度随时间变化比较

Fig. 3 The different temperature curves of active layer at time $t = 100 \text{ h}$ if expansion order $N = 5, 10$

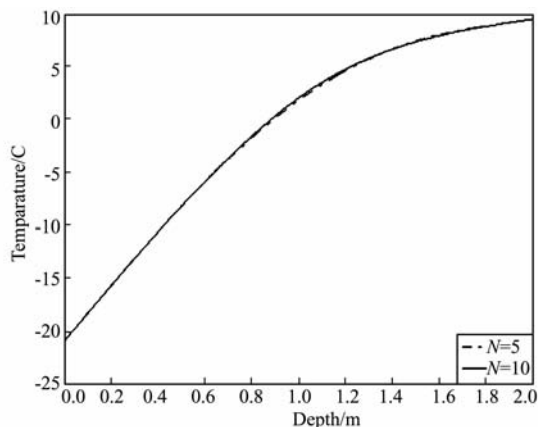


图 4 对应时刻 $t = 150$ h 谱展开阶数 $N = 5, 10$ 时, 活动层温度随时间变化比较

Fig. 4 The different temperature curves of active layer at time $t = 150$ h if expansion order $N = 5, 10$

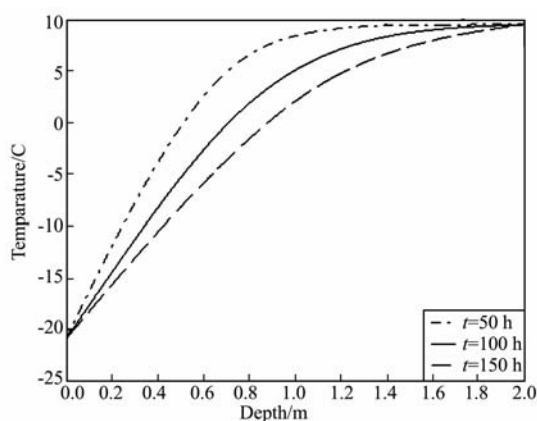


图 5 Chebyshev 拟谱展开阶数 $N = 10, t = 50$ h, 100 h, 150 h 时, 活动层温度随时间的变化情况

Fig. 5 The temperature curve via time if Chebyshev expansion order $N = 10, t = 50$ h, 100 h, 150 h

4 结 论

(1) 冻土活动层相变温度场 Chebyshev 拟谱方法应用于强非线性计算时保持其高精度的特性, 谱展开阶数 $N < 10$ 即可获得很理想的计算精度, 工程问题中为了降低计算量甚至可以选取更低的展开阶数。

(2) 对于如变系数相变热传导方程这类非常困难、复杂的非线性问题, Chebyshev 拟谱方法与其他常用数值空间离散方法相比并不会带来额外的计算负担, 处理手段类同于其他方法, 如有限元法。

(3) 就正则边界问题而言, 谱分析方法的计算效率不低于有限元法, 同等规模、相同精度情况下, 由于 Chebyshev 拟谱方法可以选取较低的展开阶, 通过采用快速算法, 计算效率甚至比有限元法更佳。

(4) 目前, 国内部分学者认为冻土问题数值计算不够准确的主要问题在于对于冻土水热耦合运输的物理(热力)问题的机理和冻土热力性质了解不够、掌握的资料不足, 而不是数值算法误差的原因, 探讨改进算法于事无补。通过作者研究体会, 高精度计算方法正是对物理模型不精确的一个十分有效的弥补, 反过来亦可以带动和促进冻土水热耦合运输机理的研究与发展。

参考文献 (References):

[1] GUYMON G L, HROMADKA T T, BERY R L. Two-dimensional model of coupled heat and moisture

transport in frost-heaving soils[J]. *Energy Resource Technology Trans of ASME*, 1984, **106**:336-343.

[2] MIYATA Y. A frost heave mechanism model based on energy equilibrium [J]. *5th Int Symp on Ground Freezing*, 1988:91-98.

[3] FILLO J, GEER J. Hybrid perturbation Galerkin technique for nonlinear heat conduction[J]. *Numerical Heat Transfer, Part B*(29), 1996:661-73.

[4] FRENOND M. Supercooling: A macroscopic predictive theory[J]. *Ground Freezing*, 1994, **94**:79-84.

[5] OUYANG T, TAMMA K K. Finite element simulation involving simultaneous multiple interface fronts in phase change problems [J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1996, **39**(8):1711-1718.

[6] NATERER G F, SCHNIDE G E. Phases model for binary-constituent solid-liquid phase transition [J]. *Numerical Heat Transfer*, 1995, Part B(28):111-126.

[7] 李洪升, 刘增利, 梁承姬. 冻土水热力耦合作用的数学模型及数值模拟[J]. *力学学报*, 2001, **33**(5):621-629. (LI Hong-sheng, LIU Zeng-li, LIANG Cheng-ji. Mathematical model for coupled moisture, heat and stress field and numerical simulation of frozen soil[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, **33**(5):621-629. (in Chinese))

[8] 李南生, 孙焕纯, 柴 山. 渠系基础冻结过程水热耦合问题数值分析[J]. *水利学报*, 1997(3):43-48. (LI Nan-sheng, SUN Huan-cun, CHAI Shan. On the numerical solutions of nonlinear temperature and moisture field in the base of irrigation ditch under frozen condition[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1997(3):43-48. (in Chinese))

[9] CANUTO C, QUARTERONI A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces [J]. *Math Compu*, 1982, **38**:67-86.

[10] MADAY Y, QUARTERONI A. Legendre and Chebyshev spectral approximations of Burger’s equation [J]. *Numer Math*, 1981, **37**:321-332.

[11] KREISS H O, OLIGER J. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations [J]. *Tellus*,1972, **24**,199-215.

[12] 郭本瑜. Navier-Stokes 方程的谱解法[J]. 中国科学, A 辑,1985, **8**:725-728. (GUO Ben-yu. Spectral method for solving Navier-Stokes equation [J]. *Scientia Sinica*, 1985, **28A**:1139-1153. (in Chinese))

[13] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京:科学出版社, 2000. (XIANG Xin-ming. *Spectral Method of Numerical Analysis* [M]. Beijing: Science of Press, 2000. (in Chinese))

[14] TAYLOR G S, LUTHIN J N. A model for coupled heat and moisture transfer during soil freezing [J]. *Can Geotech J*, 1978, **15**:548-555. (in Chinese))

[15] 马巍,安卫东,等. 冻土的温度水分应力及其相互作用[M]. 兰州:兰州大学出版社,1989. (MA Wei, AN Wei-dong, et al. *Interaction Among Temperature, Moisture and Stress Fields in Frozen Soil* [M]. Lanzhou:Press of Lanzhou University,1989. (in Chinese))

[16] CURTIS F. Gerald, Patrick O. *Wheatley, Applied Numerical Analysis* [M]. Reading: Mass Addison-Wesley Pub Co,1989.

[17] 李南生,胡巍伟,吴青柏. 冻土温度场计算中热间断面处理的理论分析[J]. 同济大学学报,2006, **34**(8): 1011-1015. (LI Nan-sheng, HU Wei-wei, WU Qing-bai. Disposal of discontinuous thermal interface in calculation of temperature field of permafrost [J]. *Journal of Tongji University*, 2006, **34**(8): 1011-1015. (in Chinese))

[18] 李南生,邓世斌,吴青柏. 非定常边界多年冻土活动层温度的积分渐近计算[J]. 冰川冻土,2007, **29**(1):16-20. (LI Nan-sheng, DENG Shi-bing, WU Qing-bai. Asymptotic evaluation of the active layer in permafrost with time-dependent boundary conditions [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 2007, **29**(1):16-20. (in Chinese))

Chebyshev pseudo-spectral method for the calculation of temperature in active layer of permafrost with phase-change

LI Nan-sheng^{*1}, WU Qing-bai²

(1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. State Key Laboratory of Frozen Soil Engineering, CAREERI, CAS, Lanzhou 730000, China)

Abstract: On the basis of the modern mechanism of heat conduction with phase-change for frozen-soil and the well-grounded physical model of heat-transfer coupled with moisture using in the numerical calculation of frozen-soil, an unique numerical formulation, spectral method, is applied in the calculation of temperature field of frozen-soil active layer for the first time. Unknown active layer temperature solution is asymptotically expanded by using Chebyshev polynomials as its base functions and the Chebyshev expansion is interpolated at collocation points, so called “pseudo-spectral” is applied to solve nonlinear differential heat-transfer equations for an unknown temperature function. In consistent with the high precision of spectral method, it is appropriate to introduce the fourth order Runger-Kutta time-integration method in the evolution equation after spatial discretized. A special method, coefficients hysteresis, is used to treat with non-constant conductivity and specific heat coefficients in the evolution equation. The proposed numerical formulation keeps the common predominance, excellent numerical precision, of spectral method, which results are showed in examples.

Key words: active-layer; permafrost; temperature; phase-change; Chebyshev’ pseudo-spectral; non-constant coefficients