

基于平均值定理和点积分方案的 自然单元法及其程序实现

覃立宁, 戴自航, 周瑞忠*

(福州大学 土木工程学院, 福州 350002)

摘 要:自然单元法是一种基于自然邻接点插值求解偏微分方程的无网格数值方法。它使用 Voronoi 图或 Delaunay 三角形作为背景积分网格, 使用几何测度构造插值点形函数并形成刚度矩阵。平均值定理定义在未知函数定义域内任何球心(或圆心)的值等于球面(或圆周)上值的平均或加权平均, 对于未知函数所满足的平衡方程是充分必要的。因此用平均值定理和点积分方案将求解域内平均应变值由散度定理转化为区域周界上的环路积分, 改进传统的积分格式。算例表明, 这一积分方案能进一步精简计算量和提高计算效率, 是一种自适应的数值计算方法。

关键词:自然单元法; 弱形式; 平均值定理; 点积分; 程序实现

中图分类号:TU43; O241.8

文献标识码:A

1 引 言

目前, 在工程上得到了广泛应用的有限单元法(FEM)采用分片插值的思想来构造位移函数和离散求解域, 在数学上给出了严密的理论证明。但在处理诸如结构破坏过程仿真, 大变形问题以及瞬态动力问题时, 有限元法受到固有网格的限制而举步维艰。以无网格伽辽金方法(EFG)为代表的无单元法为这一系列复杂结构问题的解决提供了新的思路^[1], 其仅需节点离散, 不需单元连接的特点避免了有限元法在网格划分及重构方面的困难, 但仍然存在着节点影响域大小的确定, 本质边界条件的施加和巨大的形函数及其导数的计算工作量等问题。

自然单元法(NEM)是一种新的无网格方法, 它运用成熟的 Delaunay 划分形成对偶 Voronoi 图, 采用 Sibson 或 Laplace 插值方法全域构造插值函数, 兼顾了无网格方法及有限元法的优点, 具有前期处理简单、求解精度高、计算量相对较小、可准确施加边界条件等特点。无网格法在使用伽辽金方法获得系统平衡方程后对其“弱形式”在整个求

解域内进行积分时, 主要采用基于规则背景积分网格的高斯积分^[2]或者紧支影响域内的点积分方案^[3]。前者需要依据不同工程实例确定积分区域的影响半径, 后者在紧支积分域中, 在计算积分点的形函数及其导数计算耗费大量机时的同时, 需要找到一个积分点数与积分精度之间的平衡, 即大域多点积分与小域少点积分的选择。而本文所采用的平均值定理和点积分方案将能很好将上述各种要求统一起来。

2 平均值定理和点积分方案的 自然单元法

2.1 Delaunay 三角形、Voronoi 图及 Laplace 形函数

在自然单元法形函数的构造中, 使用到 Delaunay 三角形“最小内角最大性质”, 形成三角网覆盖整个区域。通过 Delaunay 三角的“空圆准则”, 可以形成与其对偶的 Voronoi 图, 各 Delaunay 三角形的外接圆圆心即为对应的 Voronoi 角点, 如图 1 所示。

在二维空间 Ω 中有 M 个独立的结点 $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$, 其中 Voronoi 图把平面分为 M 个独立的区域, 每个区域各自对应着一个结点 n 被称为结点的 Voronoi 结构。如图 2 所示, 二阶 Voronoi 图把平面划分成为域 T_{ij} , 在每一个域 T_{ij} 里, 结点 n_i 是它的最近邻接点, 结点 n_j 是它的第二近邻接点, 即

收稿日期:2007-12-06; 修改稿收到日期:2008-09-15.

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金(20040386004);
国家自然科学基金(50678038)资助项目.

作者简介:覃立宁(1985-), 男, 硕士生;

戴自航(1966-), 男, 教授, 博士生导师;

周瑞忠*(1945-), 男, 教授, 博士生导师

(E-mail: zrz@publ. fz. fj. cn).

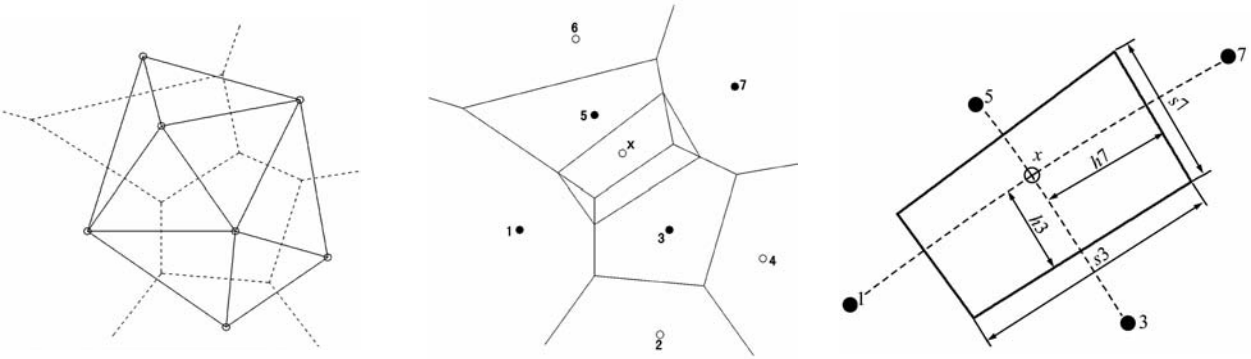


图 1 离散点集的 Delaunay 划分及 Voronoi 结构
Fig. 1 Delaunay triangle and Voronoi cells about scattered nodes

图 2 点 x 的一阶和二阶 Voronoi 结构
Fig. 2 1st-order and 2nd-order Voronoi cells about x

图 3 Laplace 形函数求解示意图
Fig. 3 Schematic diagram for construction of the Laplace shape function

$$T_{ij} = \{x \in R^2; d(x, x_i) < d(x, x_j) < d(x, x_k) \mid \forall k \neq i, j\} \quad (1)$$

图 2 给出了图 1 区域内 7 个结点的结构,任意点 x 的一次和二次 Voronoi 结构。

用 Delaunay“空圆准则”定义自然邻接点: 如果点 x 位于三角形 135 的外接圆内,则点 1,3,5 是点 x 的自然邻接点。在图 2 中,从点 x 到它的自然邻接点的连线垂直平分线构成了点 x 的二阶 Voronoi 结构。可以看出,点 x 有 1,3,7,5 共有 4 个自然邻接点。

使用任意点 p 的自然邻接点,构造其 Laplace 形函数,对于两个单胞 T_i 和 T_j ,定义为

$$L_{ij} = \{x \in \overline{T_i} \cap \overline{T_j}, i \neq j\} \quad (2)$$

$T_i = T_i \cup \partial T_i$ 为集合 T_i 的闭包。如果两点之间的距离 $d(x_i, x_j) \neq 0$,则有

$$\sum_{j \neq i} \frac{|L_{ij}| x_j}{d(x_i, x_j)} = x \left[\sum_{j \neq i} \frac{|L_{ij}|}{d(x_i, x_j)} \right] \quad (3)$$

利用以上记号,自然邻接点 Laplace 插值形函数定义为

$$\phi_i(x) = \frac{|L_{ij}|}{d(x, x_i)} / \sum_{j=1}^n \frac{|L_{ij}|}{d(x, x_i)} \quad (4)$$

对于二维空间, Laplace 插值形函数的形式为

$$\phi_i(x) = \alpha_i(x) / \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \quad (5)$$

式中 $\alpha_i(x) = s_i(x)/h_i(x)$, $s_i(x)$ 是与节点 i 相关联的 Voronoi 边的长度, $h_i(x)$ 是插值点 x 到结点 i 的 Voronoi 边的垂直距离,如图 3 所示。

由此可见, Laplace 形函数是通过几何测度来构造插值函数,是一种变形的面积坐标 (Area

Coordinates) 或称之为重心坐标 (Barycentric Coordinates),它可以很好地解决有限元等参坐标中诸如坐标转换相对复杂,处理畸变单元精度下降等问题。根据式(5)可知,采用 Laplace 插值所得到的 NEM 形函数具有以下性质:

- (1) $0 \leq \phi(x) \leq 1$;
- (2) $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, 即形函数具有 δ 函数的性质;
- (3) $\sum \phi_i = 1$, 即形函数构成了单位分解性质;
- (4) $x = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)x_i$, 即形函数具备线性连续性;
- (5) 在边界上满足线性插值;
- (6) 插值函数除了在节点处具有 C^0 光滑外,其他区域具有 C^∞ 光滑。

值得说明的一点是: 在 NEM 发展过程中, Sibson 插值函数是另外一种较为成熟的构造形函数的方式^[6],但是由于 Sibson 插值在非凸边界上不满足线性插值,从而给本质边界条件的施加带来困难,而 Laplace 插值则很好地解决了这一问题,其任意边界上的线性插值特性让它像有限元法一样方便的施加本质边界条件,不存在其他无网格方法中用最小二乘法拟合时不能直接施加本质边界条件^[8] 的难题。由此可以看出, NEM 兼具无网格法和有限元法的优点。

2.2 自然单元法平衡方程及其积分弱形式

弹性力学基本方程为

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} + b_i = 0 & \text{in } \Omega \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\ t_i = \sigma_{ji} n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (6)$$

相应基本方程的标准伽辽金弱形式的近似式为求 $u^h \in V^h \subset V$,使得

$$\int_{\Omega} \sigma(u^h) : \varepsilon(v^h) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v^h d\Omega + \int_{\Gamma_L} \bar{t} \cdot v^h d\Gamma$$

$$\forall v^h \in V_0^h \subset V_0 \quad (7)$$

式中 u^h 为位移试函数, v^h 为允许位移函数, V_0^h 和 V_0 分别为试函数空间 V 、检验函数空间 V_0 的有限子空间。

根据 NEM, 任一点 x 处的位移可由自然邻接点插值方法得到

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u_i \quad (8)$$

式中 $x = (x, y)^T$, n 为待插值点 x 的自然邻接点个数。

对于线弹性平面问题对总势能取驻值可以得到系统整体离散方程为

$$K \cdot u = f \quad (9)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T \cdot D \cdot B_j d\Omega \quad (10)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_L} \phi_i \cdot t d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i \cdot f_b d\Omega \quad (11)$$

式中 D 是平面问题的弹性矩阵, t 为面力, f_b 为体力, 应变转换矩阵 B_i 为

$$B_i = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \cdots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & \cdots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \cdots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.3 平均值定理点积分方案

2.3.1 平均值定理(即中值定理)

弹性力学平均值定理或称中值定理常用的表达式是: 在未知函数定义域内, 任何球心的值等于该闭合区域球面上值的平均或某种形式的加权平均。这一平均值条件, 对于未知函数所满足的方程是充分必要的^[9]。可以证明, 上述结论对于任何凸形边界的曲面也是成立的, 而这正是无网格方法中局部边界积分 Petrov-Galerkin 最重要的数学基础, 同时也是本法的数学依据。因此我们可以不从未知函数所满足的方程出发, 而直接从它满足的平均值定理的表达式出发来构造数值方法进行近似计算。例如对某一积分点的值可转为求其定义域周界上点的值的平均或加权平均。以二维问题为例进行如下说明。

在给定区域 Ω_L 内, 平均应变可表示为

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{A_L} \int_{\Omega_L} \varepsilon_{ij} d\Omega_L \quad (13)$$

式中 A_L 为区域 Ω_L 的面积。

这是平均值定理的一般形式, 将 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ 代入上式, 使用散度定理分解后可得

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2A_L} \int_{\Gamma_L} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma \quad (14)$$

式中 Γ_L 为 Ω_L 的周界, n_i 和 n_j 分别为 Γ_L 的单位外法线方向分量。

2.3.2 基于 Voronoi 图的点积分方案

与 Delaunay 三角形对偶的 Voronoi 图可以无重叠的覆盖整个求解区域, 因此可以利用 Voronoi 结构对每个离散点进行积分区域的划定, 在离散点的 Voronoi 图周界上按高斯积分点求取区域 Ω_L 的平均应变值, 并由高斯积分点作为一种媒介建立起各离散点间的联系, 进一步求取刚度矩阵的子矩阵。值得注意的是, 区域 Ω_L 内平均应变值所对应的点与 Voronoi 图本身所对应的离散节点并不一定重合, 平均应变值点可认为是一种虚拟结点。

此处选用 Voronoi 图来离散整个积分区域的目的是为了能够更好地适应积分点的分布密度, 以达到最佳的求解精度, 从而更有针对性的得到所关心的局部区域内应力应变或位移的分布趋势。因此, 对每一段边界积分点的数目可按需要来设定, 不必强求一致, 这种灵活性同时表明它也是一种自适应的积分法则。其具体的实施方案为: 在式(14)中代入 NEM 的形函数, 则该 Voronoi 图中的平均应变值 $\bar{\varepsilon}$ 为对多边形 ABCDE(如图) 有影响的节点集应变值的加权平均, 其中节点集 1, 2, 3, 5 是通过 Voronoi 图周界上高斯积分点 $m_1 \sim m_n$ 对 Voronoi cell 核点 4 产生作用, 如图 4 所示。图中对同一个积分点 m_1 而言, 在该处权函数不为零的所有离散点都有贡献, 它们的集合就构成这一积分区的定义域(任意子域), 因此都必须计算在内。

$\bar{\varepsilon}$ 的数学表达式为

$$\bar{\varepsilon}(x) = \sum \bar{B}_i(x) u_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (15)$$

其中应变转换矩阵由式(12)变为

$$\bar{B}_i(x) = \begin{bmatrix} \bar{b}_{i1}(x) & 0 \\ 0 & \bar{b}_{i2}(x) \\ \bar{b}_{i2}(x) & \bar{b}_{i1}(x) \end{bmatrix} \quad (16)$$

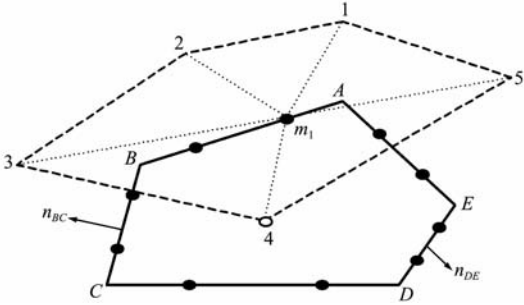


图 4 Voronoi 多边形点积分求解示意图
Fig. 4 Schematic diagram for Voronoi polygon point integration

$$\overline{b}_{ik}(x) = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \phi_i(x) n_i(x) d\Gamma, \quad k = 1, 2 \quad (17)$$

位移向量:

$$u_i = [u_{1i}, u_{2i}] \quad (18)$$

对弱形式在每个节点 Voronoi 图上采用上述积分方案,则式(10) 变为

$$K_{ij} = \sum_{L=1}^{NV} \overline{B}_i^T(x_L) D \overline{B}_j(x_L) A_L \quad (19)$$

式中 NV 为求解域内 Voronoi 图(背景积分区域)的个数, x_L 为 Voronoi 图中平均应变值所对应的虚拟点。

在使用 Voronoi 图作为背景积分网格进行数值计算时所遇到的麻烦是,对离散点进行 Voronoi 划分将占用一定的机时,并且在处理边界点处的 Voronoi 划分时会造成 Voronoi 图不封闭,或 Voronoi 图溢出求解区域(凹型求解域中会发生),以及裂纹两边离散点跨越所造成 Voronoi 图形不连续等情况,需要对 Voronoi 图进行图形的裁减和修正。这为积分点的选择和积分区域的划定带来困难。

2.3.3 基于 Delaunay 三角形的点积分方案

相对于 Voronoi 图在边界点的积分区域划分上的不确定性, Delaunay 三角划分技术较为成熟,并广泛运用于有限单元法中。它不存在边界处图形不闭合、溢出等情况,因此使用 Delaunay 三角形作为背景积分网格的平均值定理点积分方案将能达到更好的效果。可以简单的认为,三角形的三个顶点即为三角形形心的仅有的三个自然邻接点,从而构成与上述基于 Voronoi 图积分方案的统一。它的积分组建思想为:通过求取能够代表 Delaunay 三

角形平均应变的虚拟点的值,使用 Delaunay 三角形周界上高斯积分点为媒介,推导出求解域内各离散点间的联系,即刚度因子 K_{ij} 。

与现行的 Delaunay 积分准则^[3-7] 不同,平均值定理积分方案的积分点在边界上,而非区域内,在求取应变转换矩阵 B_i 时不需要对形函数求取偏导数。

在 Delaunay 积分边界上采用两点高斯积分,则应变转换矩阵 $\overline{B}_i(x)$ 的因子 $\overline{b}_{ik}(x)$ 为

$$\begin{aligned} \overline{b}_{ik}(x) = & \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \phi_i(x) n_i(x) d\Gamma = \\ & \frac{1}{A_L} \left[\int_{AB} \phi_i(x) n_i(x) d\Gamma + \int_{BC} \phi_i(x) n_i(x) d\Gamma \right. \\ & \left. + \int_{CA} \phi_i(x) n_i(x) d\Gamma \right] = \frac{1}{2A_L} [(\phi_i(m_1) + \\ & \phi_i(m_2)) \cdot |y_A - y_B| + (\phi_i(m_3) + \\ & \phi_i(m_4)) \cdot |y_B - y_C| + (\phi_i(m_5) + \\ & \phi_i(m_6)) \cdot |y_C - y_A|] \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $m_1 \sim m_6$ 为各边上的高斯积分点, y_A, y_B, y_C 为三角形顶点 A、B、C 的纵坐标,当 $\overline{b}_k(x)$ 中的 k 由 $1 \rightarrow 2$ 时,式中 y_A, y_B, y_C 分别由 A、B、C 的横坐标 x_A, x_B, x_C 替换。

对于有更高精度要求的积分区域,可以相应地多布置离散点,使该局部区域的 Delaunay 三角更密,三角形面积更小,得到的积分精度更高;同时,也可以在三角形每条边上使用更高阶的高斯积分,以满足精度的要求。

3 程序设计及实现

3.1 计算步骤

使用自然单元法对实际工程进行分析需要经过以下步骤:(1) 从实际工程问题抽象出数值分析所需的几何模型;(2) 根据模型布置离散节点,读取相应的节点信息及材料数据;(3) 使用 Delaunay 准则生成三角形背景积分网格;(4) 使用 Laplace 插值函数和平均值定理点积分方案生成刚度矩阵;(5) 处理应力及位移边界条件;(6) 解控制方程;(7) 后处理并输出结果。基于几何测度求取自然邻接点形函数以及使用虚拟结点积分形成刚度矩阵

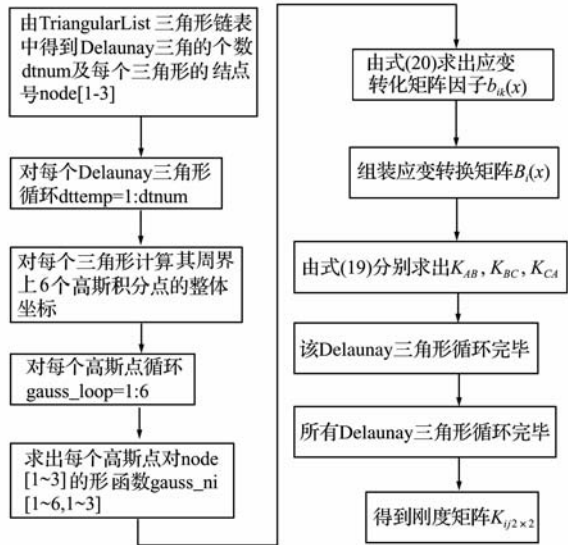


图 5 自然单元法刚度矩阵程序流程图
Fig. 5 The process chart of NEM stiffness matrix

的算法是 NEM 区别于其他无网格方法的主要部分,其程序实现流程图如图 5 所示。

计算过程中应该注意的问题如下:

(1) 高斯点的边界奇异性。当高斯积分点处于边界上时,将造成寻找积分点的自然邻接点进入无限循环而不能封闭。这时可以将边界积分点内移一个极小数(10^{-7} 单位长度)或将边界离散节点外移一个极小数来解决积分点的自然邻接点不封闭的问题,从而避免高斯积分点边界积分的奇异性,不会影响到计算精度。

(2) 对节点本身插值的不可计算性。虽然 Laplace 插值具有严格的插值特性,但对于节点本身的直接插值实际上是不可计算的。这时可将积分点偏移离散节点一个极小距离或在节点列表中暂时删除该离散点,转而将它视为积分点进行计算。

(3) 简化自然邻接点的寻找方案。一般的自然邻接点搜索算法是在全域内进行离散节点的 Delaunay 划分,再动态构造插值形函数的 Voronoi 结构,计算过程较为复杂,可以使用基于局部搜索算法的自然邻接点方法进行简化计算,方法详见文献[7],本文不再赘述。

3.2 数值算例

3.2.1 单向拉伸方板

在单位应力作用下的单向拉伸方板,板的边长为 1,边界条件如图 6 所示。其线性位移精度解为

$$u_1 = \frac{\nu}{E}(1 - x_1), \quad u_2 = \frac{x_2}{E} \tag{21}$$

在本例中,材料弹性模量 $E = 100$,泊松比 $\nu = 0.3$,假设为平面应力状态。

L^2 误差范数及相对误差 RER 定义为

$$\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (u_i - u_i^h)(u_i - u_i^h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{RER} = \frac{\|u - u^h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \tag{22}$$

式中 u 为准确位移解, u^h 为数值计算近似解。分别使用等间距离散点集、散乱稀疏离散点集、散乱稠密离散点集对求解区域进行离散如图 6(a ~ c) 所示,各离散方案的相对误差见表 1。

表 1 小片试验相对误差

Tab.1 The relative error of platelet test	
离散方案	相对误差 RER
a	3.2483×10^{-6}
b	1.1780×10^{-5}
c	9.2694×10^{-7}

由表 1 可以看出,使用平均值定理点积分方案的自然单元法小片试验结果与文献[5] 的试验结果一致,位移函数在理论上能够准确再现线性位移场。就其计算精度而言本法高于传统的有限元法而与一般的无网格方法(EFG) 相当,达到了 10^{-6} ,但其积分处理方案更为简洁。稠密点离散方案较稀疏点离散方案的计算精度有明显的提高。

3.2.2 悬臂梁

考虑端部承受抛物荷载的悬臂梁,梁长为 L ,高为 D ,单位厚度,如图 7 所示。

数值计算中各项参数取值: $P = 1000, D = 1, L = 8, E = 3.0 \times 10^7, \nu = 0.25$,假设为平面应力状态,计算单位采用国际标准单位。根据梁形,在区域中分布 $17 \times 5 = 85$ 个离散点,如图 7 所示。梁的中性轴挠度计算值与准确值的比较如图 8 所示。截面 $x = 4$ 处剪应力 τ_{xy} 的分布如图 9 所示。从图中可以看出,由本文平均值定理点积分方案得出的位移解和应力解与解析解十分吻合;本文方案能够很好地反映剪应力非线性分布特性,而有限元法剪应力计算结果基本上呈线性分布,相对理论解有较大的误差;在计算精度方面该数值方法较一般的无网格方法(EFG) 有一定的提高。

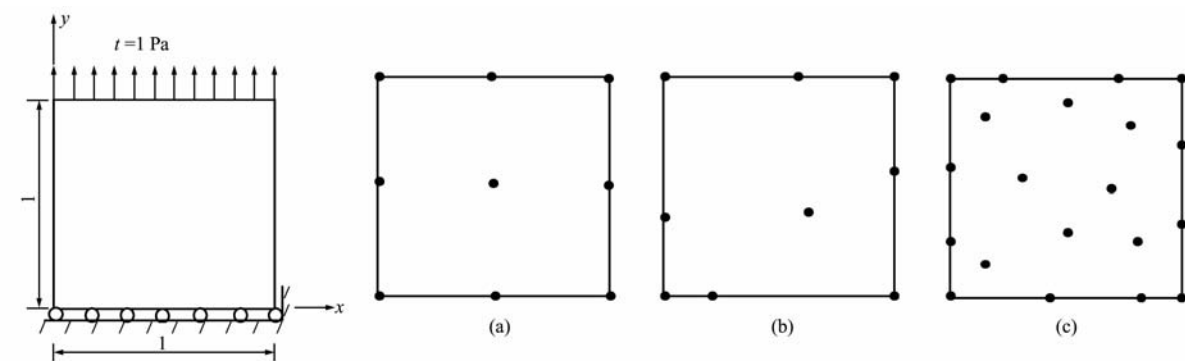


图 6 单向拉伸方板边界条件示意及积分区域离散点分布图
Fig. 6 Schematic diagram for boundary condition of unidirection tensile square panel and its node distribution

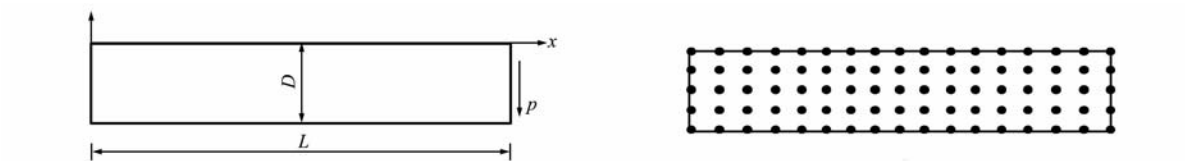


图 7 悬臂梁模型及计算区域离散点布置图
Fig. 7 Cantilever beam and its node distribution

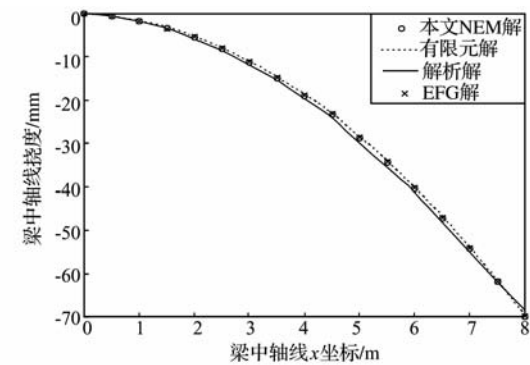


图 8 梁中性轴挠度比较图
Fig. 8 Comparison of displacements of central axis in a beam

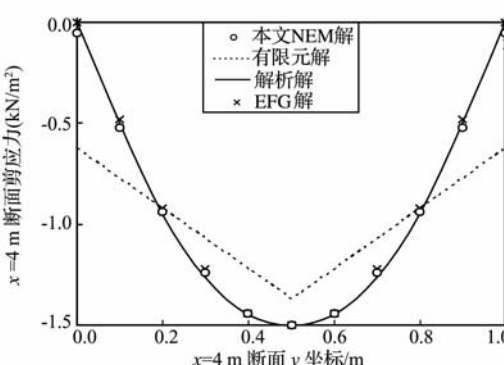


图 9 截面 $x=4$ 处的 τ_{xy} 比较图
Fig. 9 Comparison of shear stresses in the section of $x=4$

4 结 论

自然单元法使用成熟的 Delaunay 划分技术及离散点 Voronoi 结构即能求取自然邻接插值,又能求解刚度矩阵中的数值积分提供积分权重,形成背景积分网格,发挥其一网多用的功能。基于平均值定理的点积分方案在追求计算精度的同时,进一步提高了计算效率。在 Voronoi 图或者 Delaunay 三角形中使用该积分格式,将积分区域内点积分转化为该区域闭合周界上的线性积分,通过虚拟求积点及周界高斯积分点建立其离散点间的联系,同时避免了在生成刚度矩阵时对复杂形函数进行偏导数计算;精简了计算量,充分发挥了自然单元法使用几何测度构造插值函数所带来的优良特性,算例说明该积分方案是一种行之有效的数值积分方法。

参考文献 (References):

[1] LIU M B, LIU G R, ZONG Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology[J]. *Computer and Fluids*, 2003, **32**(3): 305-322.

[2] LIU W K, JUN S, ZHANG Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 1995, **20**(11): 1 081-1 106.

[3] BEISSEL S, BELYTSCHKO T. Nodal integration of the element-free Galerkin method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**(1): 49-71.

[4] BRAUN J, SAMBRIDGE M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids[J]. *Nature*, 1995, **376**: 655-660.

[5] SUKUMAR N, MORAN, BELYTSCHKO T. The

- nature element method in solid mechanics[J]. *Int J Num Meth Eng*, 1998, **43**: 839-887.
- [6] 蔡永昌,朱合华,王建华. 基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. 力学学报,2003,**35**(2): 187-193. (CAI Yong-chang, ZHU He-hua, WANG Jian-hua. A element-free local Petrov-Galerkin method based on Voronoi diagram[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003,**35**(2):187-193. (in Chinese))
- [7] 蔡永昌,朱合华. 基于局部搜索算法的自然邻接点方法[J]. 力学学报,2004,**36**(5):623-628. (CAI Yong-chang, ZHU He-hua. The natural neighbor method based on the local searching algorithm[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004,**36**(5):623-628. (in Chinese))
- [8] 周瑞忠,周小平,吴琛. 数值方法进展:从连续介质到离散粒子模型[J],工程力学,2005,**22**:228-239. (ZHOU Rui-zhong, ZHOU Xiao-ping, WU Chen. The development of numerical methods: from continuum model to discrete particle model[J]. *Engineering Mechanics*, 2005,**22**:228-239. (in Chinese))
- [9] 武际可,李辉. 应用平均值定理的一种数值算法[J]. 计算数学,1988,**2**(1): 94-99. (WU Ji-ke, LI Hui. A numerical method using average theorem[J]. *Computational Mathematics*, 1988,**2**(1): 94-99. (in Chinese))

Natural element method based on the mean value theorem and point integration and its procedures

QIN Li-ning, DAI Zi-hang, ZHOU Rui-zhong*

(School of Civil Engineering and Architecture, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: The Natural Element Method is a mesh-free method based on the evaluation of Partial Differential Equations by the Natural Neighbor Interpolation. It uses the Voronoi chart or Delaunay triangle as the background integration mesh. The mean value theorem is defined that the value of the center of a globe (or the center of a circle) in the unknown function definition domain is equal to the average or weighted average in spherical surface (or circumference). It is fully necessary for balance equation met by the unknown function. Using the mean value theorem and the point integration, the average strain value in evaluation domain is translated through divergence theorem into perimeter integration in domain circumferences. It improves the traditional integration format. The difference between Natural Element Method and other mesh-free methods is mainly in the following two aspects: one is using geometrical measure to get the natural adjacency shape function; the other is using the dummy point integration to form the stiffness matrix. The count cases show that this integration is an adapted numerical method which can greatly simplify the calculation of the program and improve the efficiency of computation.

Key words: natural element method; weak form; mean value theorem; point integration; procedure