

文章编号:1007-4708(2009)05-0659-05

桥梁结构移动平稳随机荷载识别新方法

侯秀慧¹, 邓子辰^{*1, 2}, 黄立新¹, 胡伟鹏¹

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072; 2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘 要:移动的平稳随机荷载对简支梁的作用, 相当于固定的调制函数已知的非平稳随机荷载对简支梁结构的作用。本文以此为基础, 研究了移动平稳随机荷载的识别问题。首先基于虚拟激励法的思想, 利用特征值分解及奇异值分解技术, 由虚拟位移响应反演虚拟广义坐标, 有效地避免了矩阵求逆, 得到高精度的广义坐标谱; 同时利用 Wiener-Khinchine 关系及 Duhamel 积分, 由广义坐标谱值反演得到平稳随机激励谱密度。仿真算例表明, 只要适当地选取参振振型及测点位置, 本文方法可以有效地识别桥梁结构的移动平稳随机荷载。

关键词:桥梁结构; 移动荷载; 荷载识别; 随机荷载; 精度分析

中图分类号:TU311 **文献标识码:**A

1 引 言

列车运行时, 轮对的蛇行运动和由轨道不平顺所激励的运动是同时存在的。轨道不平顺和车辆蛇行运动的合成运动可以通过测量轮对的振动响应得到, 此合成运动可视为车桥耦合振动系统的随机激励^[1]。因此, 对移动的随机荷载的识别研究, 具有重要的现实意义, 在桥梁结构的健康检测等方面发挥着越来越重要的作用。有不少学者致力于对随机荷载的研究, 且取得了很好的成果^[2-5], 但针对移动随机荷载识别的研究相对较少。林家浩等提出的逆虚拟激励法^[6]是一种高效简洁的方法, 为工程结构的随机荷载识别指明了新的方向。本文将逆虚拟激励法进行推广, 用于识别作用位置随时间连续变化的移动平稳随机荷载, 并对识别精度进行了分析。

2 动力学模型

本文建立简支连续梁模型进行移动随机荷载谱识别, 如图 1 所示, 假设该简支梁模型为 Bernoulli-Euler 梁(不考虑剪切变形与转动惯量的影响), 等

截面(EI 为常数), 恒载质量均匀分布(单位长度梁的质量 ρ 为常数), 阻尼为粘滞阻尼(即阻尼力与结构的振动速度成正比), 谱密度为 $S_{ff}(\omega)$ 的平稳随机荷载 $f(t)$ 以匀速 c 沿梁从左向右移动, 梁的运动满足小变形理论并在弹性范围内, 其强迫振动微分方程可用下式表示:

$$\rho \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - ct) f(t) \quad (1)$$

式中 $v(x, t)$ 代表梁在位置 x 、时间 t 处的挠度, C 为粘滞阻尼系数, E 为梁的弹性模量, I 为梁的截面惯性矩, δ 为 Dirac 函数。

基于振型叠加理论, 梁的挠度可表示为

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (2)$$

式中 $q_n(t)$ 为广义振型坐标, $\phi_n(x)$ 为振型函数, n 为振型数。对于等截面简支梁, 振型函数可假定为三角函数, 即

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1), 同时利用振型函数的正交性, 将方程左右同乘 $\phi_n(x)$, 沿梁长 l 进行积分, 得

$$\frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} + 2\xi_n \omega_n \frac{dq_n(t)}{dt} + \omega_n^2 q_n(t) = g(t) f(t) \quad (4)$$

收稿日期:2007-09-25;修改稿收到日期:2009-05-08.

基金项目:国家自然科学基金(10572119, 10772147, 10632030);教育部博士点基金(20070699028);陕西省自然科学基金(2006A07);工业装备结构分析国家重点实验室开放基金;西北工业大学创新种子基金(Z200730)资助项目.

作者简介:邓子辰*(1964-),男,博士生导师,教授
(E-mail:dweifan@nwpu.edu.cn).

式中

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4, \quad \xi_n = \frac{C}{2\rho\omega_n}$$

$$g(t) = \frac{2}{\rho l} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \quad (5)$$

方程(4)右端项 $F(t) = g(t)f(t)$, 故由此可见, 移动的平稳随机荷载 $f(t)$ 对桥梁结构的作用相当于均匀调制的非平稳随机荷载 $F(t)$ 对桥梁的作用。因此, 问题变为识别调制函数已知的非平稳随机荷载。

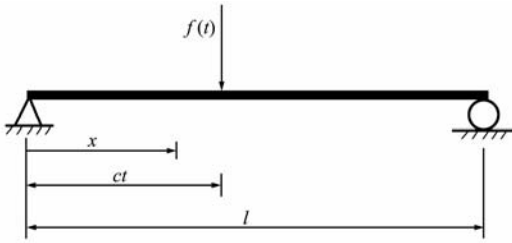


图1 移动平稳随机荷载识别的简支梁模型
Fig. 1 A simply supported beam subjected to a moving stationary random load

3 移动平稳随机荷载识别方法

(1) 已知 $[S_{vv}(\omega)]$, 求解 $[S_{qq}(\omega)]$ ($\hat{x}$ 代表 x 的虚拟量)

已知桥梁结构在移动平稳随机荷载作用下的位移为 $v(x, t)$, 根据振型叠加原理, 由式(2)得, 结构随机响应的位移谱密度为

$$[S_{vv}(\omega)] = [\Phi] S_{qq}(\omega) [\Phi]^T \quad (6)$$

则:

$$[S_{qq}(\omega)] = ([\Phi]^T [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [S_{vv}(\omega)] [\Phi] ([\Phi]^T [\Phi])^{-1} \quad (7)$$

直接利用上式, 需要进行矩阵求逆, 会产生较大的识别误差, 引起数值病态。由于响应谱矩阵是 Hermite 矩阵, 因此根据虚拟激励法的思想, 可利用特征值分解技术, 将响应谱矩阵分解为

$$[S_{vv}(\omega)] = \sum_{j=1}^p \lambda_j \{\Psi\}_j^* \{\Psi\}_j^T \quad (8)$$

式中 p 为该矩阵的秩, 不大于矩阵的维数 m , λ_j 和 $\{\Psi\}_j$ 分别为 $[S_{vv}(\omega)]$ 谱矩阵的特征值和特征向量, 满足:

$$\begin{cases} [S_{vv}(\omega)] \{\Psi\}_j = \lambda_j \{\Psi\}_j \\ \{\Psi\}_i^* \{\Psi\}_j^T = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

因此可构造虚拟响应:

$$\{\bar{v}\}_j = \sqrt{\lambda_j} e^{i\omega t} \{\Psi\}_j \quad (10)$$

$$[S_{vv}(\omega)] = \sum_{j=1}^p \{\bar{v}\}_j^* \{\bar{v}\}_j^T \quad (11)$$

同理, 由于 $[S_{vv}(\omega)]$ 及 $[\Phi]$ 均为对称矩阵, 则 $[S_{qq}(\omega)]$ 也应为 Hermite 矩阵。故可仿照对响应谱矩阵 $[S_{vv}(\omega)]$ 的处理, 将 $[S_{qq}(\omega)]$ 分解为

$$[S_{qq}(\omega)] = \sum_{j=1}^p \{\bar{q}\}_j^* \{\bar{q}\}_j^T \quad (12)$$

则将式(11)、(12)代入式(6)得

$$\sum_{j=1}^p \{\bar{v}\}_j^* \{\bar{v}\}_j^T = [\Phi] \sum_{j=1}^p \{\bar{q}\}_j^* \{\bar{q}\}_j^T [\Phi]^T = \sum_{j=1}^p ([\Phi] \{\bar{q}\}_j)^* ([\Phi] \{\bar{q}\}_j)^T \quad (13)$$

$$\{\bar{v}\}_j = [\Phi] \{\bar{q}\}_j \quad (14)$$

本文利用奇异值分解技术求解 $\{\bar{q}\}_j$, 首先对 $[\Phi]^T [\Phi]$ 进行奇异值分解, 得

$$[\Phi]^T [\Phi] = [U][\Sigma][V]^T \quad (15)$$

$$([\Phi]^T [\Phi])^{-1} = [V][\Sigma]^+ [U]^H \quad (16)$$

则

$$\{\bar{q}\}_j = ([\Phi]^T [\Phi])^{-1} [\Phi]^T \{\bar{v}\}_j = [V][\Sigma]^+ [U]^H [\Phi]^T \{\bar{v}\}_j \quad (17)$$

将式(17)代入式(12)即可求得 $[S_{qq}(\omega)]$ 。

(2) 已知 $[S_{qq}(\omega)]$, 求解 $S_{ff}(\omega)$

对于初始静止的线性体系, 即方程(4), 在任意外力 $F(t) = g(t)f(t)$ 作用下, 任意响应 $q(t)$ 可表示为如下 Duhamel 积分的形式:

$$q(t) = \int_0^t h(t-\tau) F(\tau) d\tau \quad (18)$$

对于零均值演变随机荷载, $q(t)$ 的自相关函数:

$$R_{qq}(t_1, t_2) = E[q(t_1)q(t_2)] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) E[F(\tau_1)F(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \quad (19)$$

其中

$$E[F(\tau_1)F(\tau_2)] = g(\tau_1)g(\tau_2)E[f(\tau_1)f(\tau_2)]$$

由于 $E[f(\tau_1)f(\tau_2)]$ 是平稳随机过程 $f(t)$ 的自相关函数 $R_{ff}(\tau)$, 其中 $\tau = \tau_2 - \tau_1$, 利用 Wiener-Khintchine 关系:

$$E[f(\tau_1)f(\tau_2)] = R_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega) e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} d\omega \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)得

$$R_{qq}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega) D^*(\omega, t_1) D(\omega, t_2) d\omega \quad (21)$$

$$D(\omega, t) = \int_0^t h(t-\tau) g(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (22)$$

由式(21)可知,积分号内即为响应 $q(t)$ 的自谱密度,即:

$$S_{qq}(\omega,t) = S_{ff}(\omega)D^*(\omega,t)D(\omega,t) \quad (23)$$

本文中 $g(t)$ 已知,故可利用 Duhamel 积分式(22)求得 $D(\omega,t)$,再利用式(23)可求得平稳随机荷载谱密度 $S_{ff}(\omega)$ 。

4 算 例

取如图 1 所示的简支梁模型,设 $\rho = 1.0 \times 10^4$, $EI = 8.6057 \times 10^{10}$,梁长 $l = 48$ m,设车辆对桥梁的作用力为谱密度为 $S_{ff}(\omega)$ 的平稳随机荷载 $f(t)$,车辆运行平均速度为 $c = 30$ m/s,即 $f(t)$ 以此速度沿梁长 l 移动,取桥梁的前 6 阶模态进行分析,阻尼比:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0.02$$

频率 $f_1 = 2.0$ Hz, $f_2 = 8.0$ Hz, $f_3 = 18.0$ Hz, $f_4 = 32.0$ Hz, $f_5 = 50.0$ Hz, $f_6 = 72.0$ Hz。同时选取 $i \times l/10 (i = 1, 2, \dots, 9)$ 9 个测点的响应做为输入,进行荷载谱识别。

本算例中平稳随机荷载 $f(t)$ 设为平稳高斯过滤波白噪声,其自谱为

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_g^2 \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} S_0 \quad (24)$$

式中 $S_0 = 142.75$, $\omega_g = 19.07$, $\zeta_g = 0.544$

在计算中取频率域 $\omega \in [\pi, 150\pi]$,频率步长 $\Delta\omega = \pi$,时间步长 $\Delta t = 0.01$ s,用由此算出的 9 个测点的位移响应值做为计算机模拟的测量值,来识别式(24)中的力谱。得识别曲线与原力谱曲线对比如图 2 所示。

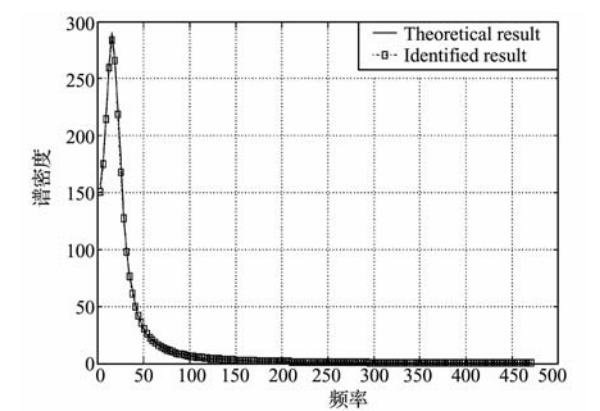


图 2 识别激励谱对比曲线

Fig. 2 Comparison of identified results and theoretical results

由此可见,无论是低频段还是高频段,识别效果都很好。因此,本文方法能够有效的识别桥梁结构的移动平稳随机荷载谱。

5 精度分析

分别改变外部荷载频率、参振振型数、结构阻尼比、测点数及测点位置,研究识别结果的变化情况。同时比较了由结构位移响应求取位移相关矩阵时的参数选择对识别结果的影响。为了有效表示识别结果对各参数的敏感性,定义百分误差如下:

$$RPE = \frac{\|S_{ff \text{ identified}}(\omega) - S_{ff \text{ true}}(\omega)\|}{\|S_{ff \text{ true}}(\omega)\|} \times 100\% \quad (25)$$

式中 $S_{ff \text{ identified}}$ 为识别荷载谱, $S_{ff \text{ true}}$ 为实际荷载谱。

(1) 求解位移响应相关矩阵时的参数对识别结果的影响

在求得位移响应的离散数据后,设为 $v_{ij} (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, s)$,其中 n 为响应测点数, s 为某一测点选取的数据点个数,本算例中 $n = 9$, $s = \frac{l}{c \times \Delta t} = \frac{48}{30 \times 0.01} = 160$,对这些离散点可以用下面的式子定义 $v_{ij} (j = 1, 2, \dots, s)$ 序列的自相关函数:

$$R_{v_i v_i}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{s-[k]-1} v_{il} v_{i(k+l)} \quad (0 \leq k \leq m-1) \quad (26)$$

类似地,还可以定义互相关函数:

$$R_{v_i v_j}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{s-[k]-1} v_{il} v_{j(k+l)} \quad (0 \leq k \leq m-1) \quad (27)$$

式中 $m < s$, N 为 k 的最大取值。选取 $N \in (0, 160)$, $\omega = 5\pi$, $S_{ff}(\omega) = 283.9$ 进行荷载

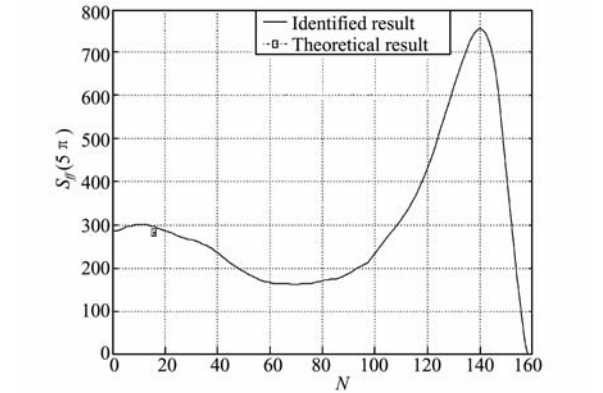


图 3 参数 N 的影响

Fig. 3 Effect of N

表 1 参振型数的影响(RPE 值)

Tab.1 Effect of mode number (RPE value)

	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
$\omega=5\pi$	15.55	7.3446	1.3749	1.3636	2.1568	0.13065	6.5843	5.314
$\omega=20\pi$	11.367	5.8158	2.7533	6.3916	7.8798	10.764	10.061	8.7867
$\omega=35\pi$	10.121	20.898	29.007	11.863	14.924	6.3049	4.3063	2.8536
$\omega=50\pi$	13.074	7.5384	15.43	9.5583	4.0847	0.23545	0.342	6.0268
$\omega=65\pi$	11.756	13.286	22.021	20.347	15.608	12.574	0.922	1.5911
$\omega=80\pi$	13.574	16.453	9.3301	15.62	13.461	10.031	6.9868	6.703
$\omega=95\pi$	11.423	15.691	15.516	10.402	10.003	8.9401	5.5381	4.539
$\omega=110\pi$	14.283	17.84	19.538	12.357	9.3265	13.068	9.5581	10.198
$\omega=125\pi$	10.237	15.351	18.978	17.633	22.669	25.723	22.861	25.816
$\omega=140\pi$	16.674	19.566	25.098	24.392	18.881	19.569	22.473	14.643

谱反演,得识别的荷载谱随 N 值的变化关系如图 3 所示,由此可见当 $N \approx 20$ 时,识别结果与理论值最接近.因此,在计算机模拟过程中,合理选择参数 N ,对识别结果的精确度影响很大.

(2) 参振型数及外部荷载频率对识别结果的影响

测点数选为 9,结构阻尼比均取为 $\xi=0.02$,分别取 2 阶~9 阶振型进行荷载谱反演.得识别误差列入表 1,其中 m 为参振型数, ω 为外部荷载的频率.由表 1 可知:

① 本文方法对低频荷载谱识别效果较好,对高频荷载谱识别误差较大.

② 一般要求外部荷载谱频率小于参振型中的最大频率,即 $\omega < \omega_m$,在条件许可的情况下,振型数 m 取得越大,识别精度越高.

③ 在外部荷载谱频率与结构参振型自振频率接近时,识别误差会明显增大.

由上可知,对于频率确定的外部荷载谱合理选择参振型数,可以得到很好的识别结果.

(3) 结构阻尼比对识别结果的影响

取振型数 $m=6$,测点数 $n=9$,结构阻尼比分别取为 $\xi=0.01, \xi=0.02, \xi=0.05$,比较识别结

果之间的异同,由图 4 可知:

① 除个别点外,荷载谱识别误差均在 20% 以内,即本文方法可以有效地反演移动平稳随机荷载谱.

② 在图 4 横坐标上标注了结构前 6 阶频率,可知,结构阻尼比的变化对识别结果的影响,在结构自振频率处较大,且随着阻尼比的增大,识别误差明显增大;而在其他点处识别误差随着阻尼比的增大而减小,且变化不明显.这是因为外部荷载频率与结构自振频率接近时,容易发生数值病态,引起识别误差的增大.因此,整体而言本文方法对小阻尼结构识别误差相对要小.

(4) 测点数及测点位置对识别结果的影响

取阻尼比 $\xi=0.02$,比较不同测点数及测点位置对识别结果的影响.仿真识别结果列入表 2,其中 n 为测点数, m 为参振型数.

由仿真过程及表 2 可知:

① 测点数 n 小于振型数 m 时,发生数值病态,不能反演.

② 在 $n > m$ 时,除个别点外,识别结果误差均在 20% 以内,即可以有效地反演移动平稳随机荷载谱.

③ 在参振型数 m 相同的情况下,测点个数 n 的增减对识别结果没有影响.

④ 在测点数 n 与振型数 m 均相同的情况下,测点位置的不同分布对识别结果有影响,且总可以找到一种识别结果较好的分布情况.

⑤ 本文方法对低频荷载谱识别效果较好,对高频荷载谱识别误差较大,且当荷载谱频率与结构自振频率接近时,误差突增,产生“奇点”.

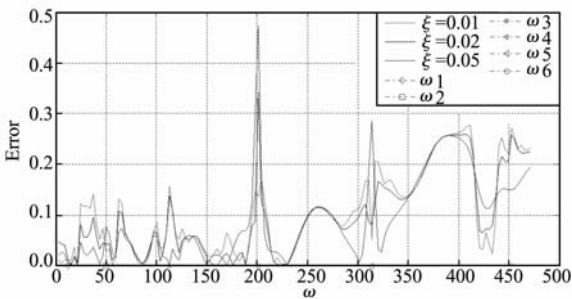


图 4 结构阻尼比的影响
Fig.4 Effect of structure damping

表 2 测点数目及测点位置的影响(RPE 值)

Tab. 2 Effect of measuring point number and position (RPE value)

测点数	测点位置	$\omega = 20\pi$	$\omega = 40\pi$	$\omega = 60\pi$	$\omega = 80\pi$	$\omega = 100\pi$	$\omega = 120\pi$	$\omega = 140\pi$
$n = 9$								
$(m = 6)$	$i \times l/10 \ (i = 1, 2, \cdots, 9)$	7. 8798	5. 0686	3. 0874	13. 461	7. 2697	20. 512	18. 881
$n = 6$	$i \times l/7 \ (i = 1, 2, \cdots, 6)$							
$(m = 6)$	$(2i-1) \times l/14 \ (i = 1, 2, \cdots, 6)$	5. 1247	3. 5486	3. 0519	6. 9787	32. 174	20. 126	27. 507
	$(4i-1) \times l/28 \ (i = 1, 2, \cdots, 6)$	4. 408	2. 5662	4. 2085	13. 003	11. 638	19. 876	22. 24
$n = 5$	$(2i-1) \times l/10 \ (i = 1, 2, \cdots, 5)$							
$(m = 3)$								
$n = 4$	$2i \times l/10 \ (i = 1, 2, \cdots, 4)$	5. 8158	8. 9741	12. 985	16. 453	17. 476	18. 241	19. 566
$(m = 3)$								
$n = 3$	$i \times l/4 \ (i = 1, 2, 3)$							
$(m = 3)$	$3i \times l/10 \ (i = 1, 2, 3)$	5. 7606	10. 559	19. 314	20. 919	20. 973	21. 14	21. 978
	$(2i-1) \times l/6 \ (i = 1, 2, 3)$	6. 5604	8. 7241	3. 8715	9. 1645	11. 469	13. 012	15. 077

参考文献(References):

[1] 夏禾,张楠. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京:科学出版社,2005. (XIA He, ZHANG Nan. *Dynamic Interaction of Vehicles and Structures* [M]. Beijing: Science Press,2005. (in Chinese))

[2] GRANGER S, PEROTIN L. An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 1;theory[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999, **13** (1);53-65.

[3] KULISIEWICZ M, LWANKIWICZ R, PIESIAK S. An identification technique for non-linear dynamical systems under stochastic excitations[J]. *Journal of Sound and Vibration*,1997,**200**(1);31-40.

[4] HOSSEINI S A A, KHADEM S E. Vibration and reliability of a rotating beam with random properties under random excitation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007,doi:10. 1016/j. ijmeec- ci. 2007. 04. 008

[5] 张方,唐旭东,秦远田,等. 结构连续分布的动态随机载荷识别方法研究[J]. 振动与冲击,2006,**25**(2): 120-124. (ZHANG Fang, TANG Xu-dong, QIN Yuan-tian, et al. The identification method research of dynamic random load distributing on structure[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006,**25**(2): 120-124. (in Chinese))

[6] 林家浩,张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京:科学出版社,2004. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui. *Pseudo-excitation Method for Stochastic Vibration* [M]. Beijing: Science Press,2004. (in Chinese))

A new method for the identification of a stationary random load moving on bridge structure

HOU Xiu-hui¹, DENG Zi-chen^{* 1,2}, HUANG Li-xin¹, HU Wei-peng¹

(1. School of Mechanics, Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract: The stationary random load moving on bridge structure is identified based on the fact that the effect of this load is the same as that of a fixed non-stationary random load with known modulated function. Firstly, the idea of pseudo excitation method was introduced into the identification of pseudo generalized coordinate from pseudo displacement response with the technique of eigenvalue and singular value decomposition, which avoided the matrix inversion and accordingly improved the identification precision. Then the stationary random load spectra was decided from the pseudo generalized coordinate spectra by using the Wiener-Khintchine relation and Duhamel integration. Numerical results show that, with a good choice of the number of mode and the response measuring position, the method presented here can identify the stationary random load moving on bridge structure effectively.

Key words: bridge structure; moving load; load identification; random load; precision analysis