

非粘滞阻尼系统时程响应分析的精细积分方法

段忠东*, 沈洪宇

(哈尔滨工业大学 土木工程学院, 哈尔滨 150090)

摘要:考虑一个具有非粘滞阻尼特性的多自由度系统响应的时程分析问题。该非粘滞阻尼模型假设阻尼力与质点速度的时间历程相关,数学表达式体现为阻尼力等于质点速度与某一核函数的卷积。在利用状态空间方法将系统运动方程转换成一阶的状态方程的基础上,采用精细积分方法对状态方程进行数值求解,得到一种求解该阻尼系统时程响应的精确、高效的计算方法。通过两个数值算例表明,采用该方法得到几乎精确的数值计算结果,而且计算效率有成数量级的提高。

关键词:非粘滞阻尼;状态空间方程;精细积分;时程分析

中图分类号:O322

文献标识码:A

1 引言

振动系统的阻尼特性及其动力响应研究是结构动力分析领域中的一个重要问题。人们通常用粘滞阻尼模型来模拟结构动力响应中的能量耗散,这种阻尼模型最初由 Lord Rayleigh 于 1877 年提出^[1]。由于该模型简单、分析方便等优点,使其得到了广泛的研究和应用。然而,众所周知,这种经典的阻尼模型只是一种数学上的理想化表达式,并不能完全反映实际结构复杂的阻尼耗能特性。现代工程中复合材料应用的增加、不同工程领域对智能控制等新技术的需求和动力学相关领域的技术发展都要求对系统的能量耗散特性进行更加准确合理的分析和设计。因而,近些年越来越多的研究人员开始探索能够更好地描述耗能特性的其他形式的阻尼模型,并研究相应系统的动力分析方法^[2-8]。

在各类动力分析法中,随着高层建筑复杂结构、结构动力分析理论和计算机技术的飞速发展,动态时程分析方法在工程中的应用越来越广泛。所谓时程分析,是将结构物视为一个弹性振动体,将外力作用或运动产生的位移、速度和加速度作用

在结构物上,然后用动力学的方法对结构动力方程做积分求解,研究它的振动情况。时程分析法的基本思想是由初始状态开始,选取合适的时间步长,逐步积分到结构振动的终止或者到所需要的时刻,求出结构由初始状态达到最终或某一状态的响应过程。目前常用的动力反应分析数值积分法有线性加速度法、Wilson- θ 法、Newmark- β 法等^[9]。上世纪 90 年代初,大连理工大学的钟万勰院士提出了一种基于 2^N 类算法的精细积分形式的逐步积分法^[10,11],所得数值结果几乎是计算机上的精确解^[12],开辟了时程积分的新思路,并开始应用于分析非线性动力学问题^[13-16]。

本文研究一种形式与一般的粘滞阻尼模型相近的卷积型非粘滞阻尼模型系统的时程分析方法,这种卷积形式的阻尼数学模型最早由 M. A. Biot 在一篇关于黏弹性材料的文章中提出^[17]。该模型考虑阻尼力与质点速度的时间历程相关,阻尼力在数学上表现为质点速度与某一核函数的卷积。这种阻尼模型比传统的粘滞阻尼更具有一般性,通过核函数形式的选择^[18],可以更广泛地描述不同机制的阻尼作用;同时这种卷积的数学形式能够更贴切地表达阻尼作用的时滞效应。本文选择指数函数为阻尼模型中的核函数^[19],研究具有该阻尼模型的系统的动力分析问题。

由于阻尼数学模型的改变导致系统运动方程特性的改变,系统相应的动力分析方法可能都要相应的有所不同,上面提到数值积分方法可能不能直接

收稿日期:2007-09-06; **修改稿收到日期:**2008-11-13.

基金项目:国家自然科学基金香港、澳门青年学者合作研究基金(50429802)资助项目.

作者简介:段忠东*(1968-),男,博士,教授
(E-mail: duanzd@hit.edu.cn).

应用于这种具有非粘滞阻尼特性的系统。Adhikari 和 Wagner 给出了具有该非粘滞阻尼模型系统的状态空间形式^[18],并提出了状态空间模态叠加法和时域近似直接积分法来分析系统的动力响应^[20]。数值算例表明,模态叠加法得到的结果精度高,但计算量巨大,耗时较多;而近似直接积分法计算速度较快,但精度较低。因此,本文希望找到一种兼顾精度和效率的时程分析方法。本文首先在文献[18]工作的基础上,对非粘滞阻尼系统运动方程进行状态空间转换,得到一阶的状态空间方程;然后利用精细积分法对该一阶方程进行数值积分求解,从而得到所求状态向量的高精度的时程递推表达式;最后给出数值算例对本文方法的计算精度和效率进行验证。

2 系统运动方程及其状态空间形式

本文研究的非粘滞阻尼模型考虑阻尼力与质点速度的历程相关,假定阻尼力可以表示为质点速度与一个指数函数的卷积^[17],即

$$\boldsymbol{F}_d(t)=\int_0^t\boldsymbol{G}(t-\tau)\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{G}(t)\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$ 为实的核函数矩阵,可表达为

$$\boldsymbol{G}(t)=\sum_{k=1}^n\boldsymbol{C}_k g_k(t)=\sum_{k=1}^n\boldsymbol{C}_k\mu_k\mathrm{e}^{-\mu_k t},\quad t\geqslant 0\tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{C}_k$ 为阻尼系数矩阵, $g_k(t)$ 为阻尼函数,本文取指数函数形式 $g_k(t)=\mu_k\mathrm{e}^{-\mu_k t}$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 为质点的相对速度。

考虑式(1)表达的非粘滞阻尼模型, N 自由度系统的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\sum_{k=1}^n\int_0^t\boldsymbol{C}_k\mu_k\mathrm{e}^{-\mu_k(t-\tau)}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t)\tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{K}\in\boldsymbol{R}^{N\times N}$ 为质量矩阵和刚度矩阵, $\boldsymbol{f}(t)\in\boldsymbol{R}^N$ 为激励向量,系数 $\mu_k\in\boldsymbol{R}^+$ 称为松弛参数, n 指描述不同阻尼作用情况的松弛参数的个数。方程(3)的初始条件可一般地设为 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^N$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\boldsymbol{x}}_0\in\boldsymbol{R}^N$ 。

显然,方程(3)表达了一种具有非比例、非粘滞阻尼的动力系统。这里效仿一般非比例粘滞阻尼系统的复模态分析所常用的状态空间法来进行分析,希望在状态空间中简化阻尼项和方程的表达形式,同时寻求可以实现逐步积分的格式。Wagner 给

出了该阻尼模型系统的状态空间形式^[18]。

2.1 阻尼系数矩阵为满秩的情况

首先引入一个辅助变量为

$$\boldsymbol{y}_k(t)=\int_0^t\mu_k\mathrm{e}^{-\mu_k(t-\tau)}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau\in\boldsymbol{R}^N\tag{4}$$

$\forall k=1,\cdots,n$

对式(4)两边求导,可得

$$\dot{\boldsymbol{y}}_k(t)+\mu_k\boldsymbol{y}_k(t)=\mu_k\dot{\boldsymbol{x}}(t)\tag{5}$$

取状态变量 $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)$,则方程(3)可以在状态空间中表示一阶形式为

$$\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{z}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{r}(t)\tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^n\boldsymbol{C}_k & \boldsymbol{M} & \frac{-\boldsymbol{C}_1}{\mu_1} & \cdots & \frac{-\boldsymbol{C}_n}{\mu_n} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \frac{-\boldsymbol{C}_1}{\mu_1} & \boldsymbol{O} & \frac{\boldsymbol{C}_1}{\mu_1^2} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \frac{-\boldsymbol{C}_n}{\mu_n} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{\boldsymbol{C}_n}{\mu_n^2}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}\tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{K} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{-\boldsymbol{C}_1}{\mu_1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \frac{-\boldsymbol{C}_n}{\mu_n}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{m\times m}\tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \cdots \\ \boldsymbol{0}\end{Bmatrix}\in\boldsymbol{R}^m,\quad \boldsymbol{z}(t)=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{y}_1(t) \\ \cdots \\ \boldsymbol{y}_n(t)\end{Bmatrix}\in\boldsymbol{R}^m\tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为扩展状态空间的系统矩阵,显然其为对称阵,阶数为 $m=2N+nN$, $\boldsymbol{z}(t)$ 为状态空间的状态向量, $\boldsymbol{r}(t)$ 为状态空间的激励向量, $\boldsymbol{O}$ 为 N 阶零阵。阻尼系数矩阵 $\boldsymbol{C}_k$ 为满秩,即 $\text{rank}(\boldsymbol{C}_k)=N,\forall k=1,\cdots,n$ 。

可以看出,当 $\mu\rightarrow\infty$ 时,式(4)变为 $\boldsymbol{y}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)$,方程(3)也将转化成我们熟悉的粘滞阻尼系统方程,同时式(6)中的各状态空间参量也与常用的粘滞阻尼系统状态空间表达式相同^[21]。

2.2 阻尼系数矩阵为非满秩的情况

当阻尼系数矩阵 $\mathbf{C}_k$ 为非满秩时, 即 $r_k = \text{rank}(\mathbf{C}_k) < N, \forall k = 1, \dots, n$, 在状态空间转换中, 应该考虑将 $\mathbf{C}_k$ 分解为更小阶数的满秩阵, 可节省大量的计算内存和时间。

取矩阵 $\mathbf{R}_k \in \mathbf{R}^{N \times r_k}$ 满足

$$\mathbf{R}_k^T \mathbf{C}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{d}_k \in \mathbf{R}^{r_k \times r_k} \quad (10)$$

式中 $\mathbf{d}_k$ 是由 $\mathbf{C}_k$ 的非零特征值组成的对角阵, 即 $\mathbf{R}_k$ 的各列为 $\mathbf{C}_k$ 的非零特征值所对应的特征向量。由 $\mathbf{R}_k$ 定义一个降维变量 $\tilde{\mathbf{y}}_k(t) \in \mathbf{R}^{N \times r_k}$ 满足

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{R}_k \tilde{\mathbf{y}}_k(t) \quad (11)$$

则方程(3)可以在状态空间表示为与式(6)相近的一阶形式:

$$\tilde{\mathbf{B}} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{r}}(t) \quad (12)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \mathbf{C}_k & \mathbf{M} & \frac{-\mathbf{C}_1 \mathbf{R}_1}{\mu_1} & \dots & \frac{-\mathbf{C}_n \mathbf{R}_n}{\mu_n} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O}_{N,N} & \mathbf{O}_{N,r_1} & \dots & \mathbf{O}_{N,r_n} \\ \frac{-\mathbf{R}_1^T \mathbf{C}_1}{\mu_1} & \mathbf{O}_{N,r_1}^T & \frac{\mathbf{R}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{R}_1}{\mu_1^2} & \dots & \mathbf{O}_{r_1,r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{-\mathbf{R}_n^T \mathbf{C}_n}{\mu_n} & \mathbf{O}_{N,r_n}^T & \mathbf{O}_{r_1,r_n}^T & \dots & \frac{\mathbf{R}_n^T \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n}{\mu_n^2} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\tilde{m} \times \tilde{m}} \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{O}_{N,N} & \mathbf{O}_{N,r_1} & \dots & \mathbf{O}_{N,r_n} \\ \mathbf{O}_{N,N} & \mathbf{M} & \mathbf{O}_{N,r_1} & \dots & \mathbf{O}_{N,r_n} \\ \mathbf{O}_{N,r_1}^T & \mathbf{O}_{N,r_1}^T & \frac{-\mathbf{R}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{R}_1}{\mu_1} & \dots & \mathbf{O}_{r_1,r_n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{O}_{N,r_n}^T & \mathbf{O}_{N,r_n}^T & \mathbf{O}_{r_1,r_n}^T & \dots & \frac{-\mathbf{R}_n^T \mathbf{C}_n \mathbf{R}_n}{\mu_n} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times m} \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0}_N \\ \mathbf{0}_{r_1} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{r_n} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\tilde{m}}, \tilde{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}_1(t) \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{y}}_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\tilde{m}} \quad (15)$$

可以看出状态空间系统矩阵的阶数为 $\tilde{m} = 2N +$

$\sum_{k=1}^n r_k$, 各符号意义同前。当所有的阻尼系数矩阵都

为满秩时, 即 $r_k = N, \forall k$, 取 $\mathbf{R}_k$ 为单位阵, 则式(12)与式(6)相同, 因而可以将 $\mathbf{C}_k$ 满秩视为特例。

得到状态空间系统矩阵之后, 对系统矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ (或 $\tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\tilde{\mathbf{B}}$) 进行二次特征值问题求解, 得到其特征值 $\mathbf{A}$ 和特征向量 Ψ 矩阵, 满足 $(\mathbf{A}\mathbf{A} + \mathbf{B}) \begin{Bmatrix} \Psi \\ \Psi \mathbf{A} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$, 式中 $\mathbf{A}$ 为对角阵。然后, 结合初始条件, 采用常用的模态叠加法即可求得系统的动力时程响应。在模态完备的理想状态下, 这种方法得到的时程分析结果是理论上的精确解, 但计算过程会耗费大量的时间, 效率较差, 使其实用性受到限制。

为了克服模态叠加法计算耗时过大这一缺陷, Adhikari 提出了一种时域的近似直接积分法^[20]。通过对式(6)或式(12)在各个时间步上的直接积分, 得到状态向量 $\mathbf{z}(t)$ 或 $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ 的时域递推表达式, 在此基础上推导出位移和速度的显式递推方程, 避免了对整个系统矩阵和状态向量的大规模计算, 从而使该系统的时程分析效率得到显著提高。但由于对状态方程直接积分的近似处理, 导致计算精度降低, 下文两个算例都给出了进一步的描述。

考虑在提高计算效率的同时保证分析结果的精度, 本文采用了钟万勰院士提出的精细积分法来处理该系统的状态空间方程^[10]。精细积分法的基本原理在于将常规的二阶系统方程变换为一阶表达式, 使得系统方程的通解为指数矩阵形式, 再利用指数函数加法定理, 通过 2^N 类算法计算指数矩阵, 从而完成对系统的时程分析。除去矩阵乘法带来的一些算术误差数外, 精细积分法的误差只能来自指数矩阵的展开式。而进一步的精度分析表明^[12], 对于实际的有阻尼振动系统, 展开式的误差无足轻重。因此, 精细积分法的数值结果能够比拟于精确解的结果。同时, 由于该方法的主体在于求解指数矩阵时所采用的加法运算, 能够充分发挥计算机固有的技术特性, 从而大大提高算法的计算效率。下面将精细积分法引入本文讨论的非粘滞阻尼模型的状态空间方程的求解。

3 运动方程的精细积分求解

讨论阻尼系数矩阵非满秩的一般情况, 将状态

空间方程(12) 整理可得

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{H}\mathbf{V} + \mathbf{F} \tag{16}$$

式中 $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{z}}(t)$, $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}(t)$ 。为了随后的描述算法,先引入下列矩阵级数:

$$e^{\mathbf{H}t} \approx \mathbf{I} + \mathbf{H}t + (\mathbf{H}t)^2/2 + (\mathbf{H}t)^3/6 + \cdots + (\mathbf{H}t)^n/n! + \cdots \tag{17}$$

将方程(16) 两边乘以 $e^{-\mathbf{H}t}$, 整理后对其从 t_k 到 t 进行积分,得

$$e^{-\mathbf{H}t}(\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{H}\mathbf{V}) = e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{F}$$
$$\int_{t_k}^t d(e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{V}) = \int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{F}(t)dt \tag{18}$$

可得

$$\mathbf{V} = e^{\mathbf{H}(t-t_k)}\mathbf{V}^k + e^{\mathbf{H}t}\int_{t_k}^t e^{-\mathbf{H}t}\mathbf{F}(t)dt \tag{19}$$

式中 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{V}^k$ 分别表示 t 和 t_k 时刻的解向量的值, 将状态方程的激励向量在 $t = t_k$ 处展开,有

$$\mathbf{F}(t) \approx \mathbf{F}^k + (t - t_k)\dot{\mathbf{F}}^k \tag{20}$$

将式(20) 代入式(19) 中,积分整理后可得^[14]:

$$\mathbf{V}^{k+1} = \mathbf{T}[\mathbf{V}^k + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{F}^k + \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{F}}^k)] - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{F}^k + \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{F}}^k + \tau\dot{\mathbf{F}}^k) \tag{21}$$

式中 $\mathbf{T} = e^{\mathbf{H}\tau}$, $\tau = t_{k+1} - t_k$, 式(21) 即为由 t_k 时刻的解向量 $\mathbf{V}^k$, 求下一 t_{k+1} 时刻的解向量 $\mathbf{V}^{k+1}$ 的逐步积分递推公式。

下面讨论指数矩阵 $\mathbf{T}$ 的精细计算^[22], 利用加法定理,有

$$\mathbf{T} = e^{\mathbf{H}\tau} = (e^{\mathbf{H}\tau/m})^m \tag{22}$$

式中选择 $m = 2^N$ 。如 $N = 20$, 而 τ 本来就是所选的很小的时间区段, 则 $\Delta t = \tau/m$ 将是非常小的时间步长。在 Δt 时段内,有

$$e^{\mathbf{H}\Delta t} \approx \mathbf{I} + \mathbf{H}\Delta t + (\mathbf{H}\Delta t)^2/2 = \mathbf{I} + \mathbf{T}_a \tag{23}$$

由于 Δt 足够小, 式(17) 的展开式中的项不必取得太多。本文例题计算采用式(23) 的形式。显然可将指数矩阵 $\mathbf{T}$ 表示为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^N} = [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^{N-1}} \times [\mathbf{I} + \mathbf{T}_a]^{2^{N-1}} \tag{24}$$

上式构成指数矩阵 $\mathbf{T}$ 的分解计算表达式, 这样的分解一直做 N 次, 即可得到矩阵 $\mathbf{T}$ 的高精度值^[10]。将其代入式(21), 即可实现对上述非粘滞阻尼模型系统的高精度高效率的时程分析。

4 算 例

算例 1 3 个自由度的非粘滞阻尼系统^[18] 阻尼模型由两个指数函数模型组成, 计算模型如图 1 所示。

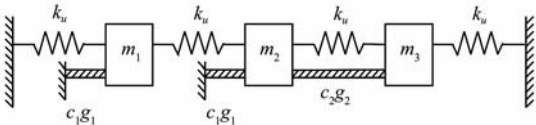


图 1 3 个自由度非粘滞阻尼系统计算模型^[18]
Fig. 1 Three-DOF system with non-viscous damping

系统运动方程见式(3), 其中 $n = 2$ 。质量阵、刚度阵和阻尼系数阵分别表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k_u & -k_u & 0 \\ -k_u & 2k_u & -k_u \\ 0 & -k_u & 2k_u \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

本例中各参数的取值为: $m_u = 3.0 \text{ kg}$ ($u = 1, 2, 3$), $k_u = 2.0 \text{ N/m}$, $c_1 = 0.6 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 0.2 \text{ Ns/m}$, $\mu_1 = 1.0 \text{ s}^{-1}$, $\mu_2 = 5.0 \text{ s}^{-1}$ 。两个阻尼系数矩阵皆为非满秩: $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, 因此状态空间系统矩阵的阶数为 $m = 2 \times 3 + (2 + 1) = 9$ 。

本例考虑由质量 m_1 的初始单位位移产生的系统动力响应, 即初始条件为 $f(t) = 0$, $u_0 = \{1, 0, 0\}^T$ (单位: m), $v_0 = 0$ 。分别取时间步长为 $h = 0.02 \text{ s}$ 和 $h = 0.5 \text{ s}$, 很容易计算得到该非粘滞阻尼系统各自由度的时程响应曲线。为了与文献[18, 20] 中的算例结果进行对比, 图 2 分别给出了文献[18] 的模态叠加法(视为精确解), 文献[20] 的时域直接积分法和本文采用的精细积分方法计算的结果。

以模态叠加法得到的结果为参考, 在小步长时, 时域直接积分法和精细积分方法得到的结果一致, 如图 2(a) 所示; 但当步长较大时, 时域直接积分法产生明显的误差, 而本文采用的精细积分方法仍然给出与模态叠加法同样的高精度结果, 如图 2(b) 所示。同时, 精细积分方法的计算效率比另两种方法有很大的优越性, 对于更多自由度体系的计算尤为明显, 将在例 2 中进一步说明。

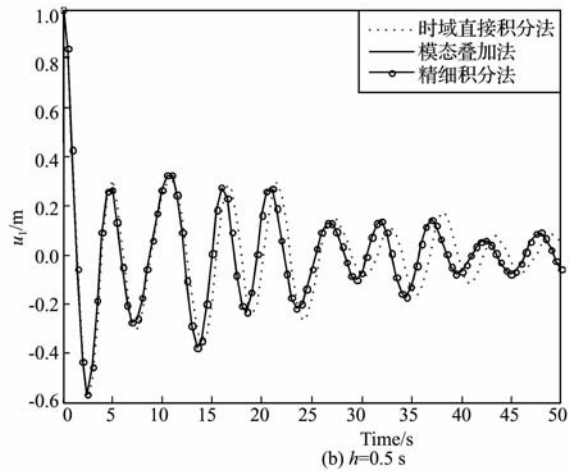
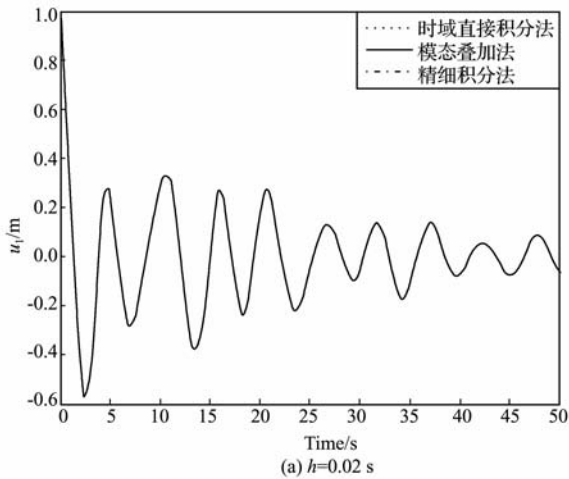


图 2 质量 m_1 的位移响应历程
Fig. 2 Displacement history of m_1

算例 2 非粘滞阻尼的轴向振动悬臂杆^[20], 阻尼模型由两个指数函数模型组成,有限元计算模型如图 3 所示。

系统运动方程见式(3), $n = 2$ 。考虑杆的有限元模型为 80 个自由度,单元质量阵、刚度阵为

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

本例中各参数的取值为: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A = 6.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $L = 4 \text{ m}$, $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,

$$\mu_1 = \frac{1}{\gamma_1 T_{\min}}, \mu_2 = \frac{1}{\gamma_2 T_{\min}}, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, T_{\min} =$$

$$\frac{2\pi}{\omega_{\max}}, \omega_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{2i-1}{2L} \pi (i = 1, \dots, 80), \mathbf{C}_1 = \alpha \mathbf{M},$$

$$\mathbf{C}_2 = \beta \mathbf{K}, \alpha = 2\xi \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \beta = 2\xi \frac{1}{\omega_1 + \omega_2}, \xi = 0.05.$$

考虑悬臂杆自由端初始速度产生的系统动力

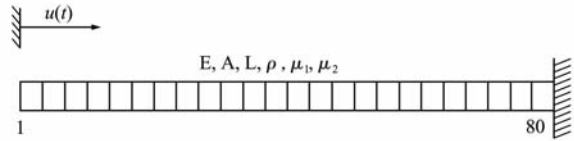


图 3 非粘滞阻尼模型轴向振动悬臂杆^[20]
Fig. 3 Axially vibrating free-fixed rod with non-viscous damping

响应,即初始条件为 $f(t) = 0, u_0 = 0, v_0 = e_1 \in \mathbf{R}^{80 \times 1}$ (单位: m/s , e_1 表示单位矩阵的第一列)。取时间步长为 $h = 1.5 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。图 4 和图 5 给出了由精细积分方法得到的杆端位移 $u_1(t) = u(x = 0, t)$ 和杆端速度 $v_1(t) = \dot{u}(x = 0, t)$ 的时程响应,图 6 给出了由例 1 中所采用另两种方法与精细积分方法得到的杆端速度时程曲线的比较。

从图 6 的高频振动时段的杆端速度时程曲线看出,时域直接积分法得到的结果与模态叠加方法得到的结果有少许差别(由于本例中的计算步长取

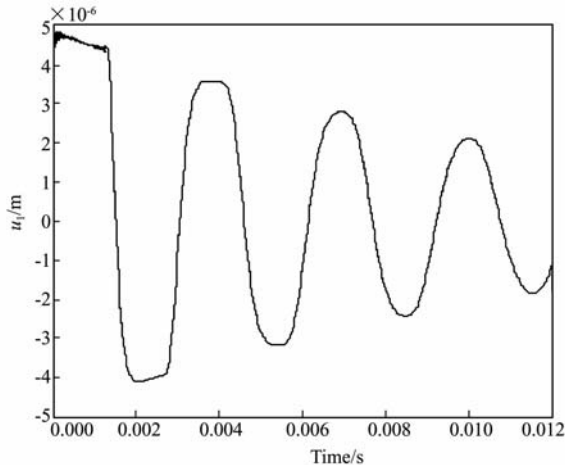


图 4 杆自由端位移曲线
Fig. 4 Tip displacement of the rod

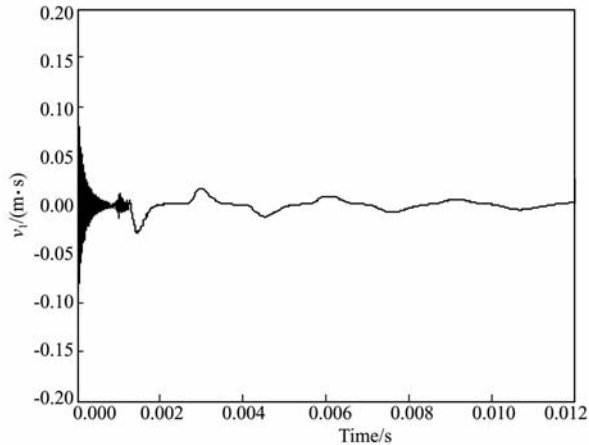


图 5 杆自由端速度曲线
Fig. 5 Tip velocity of the rod

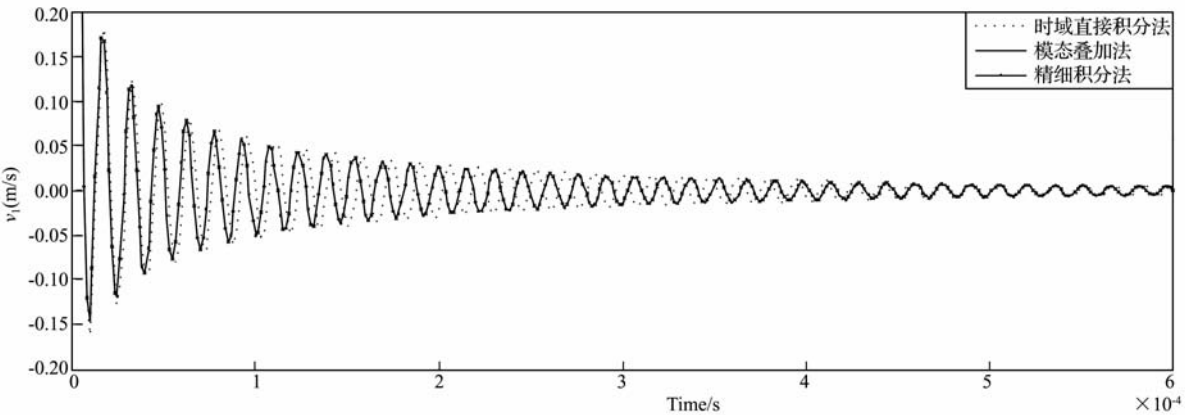


图 6 杆自由端速度时程比较
Fig. 6 Comparison of tip velocity of the rod

的很小),而利用精细积分方法则得到几乎与模态叠加法完全一致的结果。

对于图 3 划分为 80 个单元的悬臂杆的轴向振动,取计算时间步长 $h = 1.5 \times 10^{-6}$ s 时,精细积分方法、时域直接积分法和模态叠加法的计算耗时分别为 4 s,190 s 和 1180 s(PC 配置:CPU 主频 2.4GHz,内存 512M;计算软件 MATLAB7.1)。可见对于本例而言,精细积分方法的计算速度比时域直接积分法快两个量级,比模态叠加方法快三个量级。相信对于更精细的单元划分,或者更复杂的动力系统,采用精细积分方法求解这种非粘滞阻尼系统的时程响应,计算优势会得到更明显的体现。

5 结 论

本文研究了分析具有卷积型非粘滞阻尼特性的动力系统响应的时程分析方法。在 Adhikari 和 Wagner 提出的具有非粘滞阻尼系统的运动方程的状态空间表达的基础上,引入钟万勰院士提出的精细积分法对该系统的响应时程进行求解,得到了求解具有该阻尼系统的动力时程响应的计算方法。两个数值算例表明,本文采用的方法在得到几乎与模态叠加法同样精度结果的同时,计算速度比后者有了极大的提升;与文献[20]的时域直接积分法相比,不仅改进了计算精度,也极大地提高了计算效率。

参考文献(References):

[1] RAYLEIGH L. *Theory of Sound (two volumes)* [M]. 2nded. New York: Dover Publications; 1877 (1945 re-issue).

[2] 董 军,邓洪洲,王肇民. 结构动力分析阻尼模型研究[J]. 世界地震工程, 2000, **16**(4): 63-69. (DONG Jun, DENG Hong-zhou, WANG Zhao-min. Studies on the damping models for structural dynamic time history analysis[J]. *World Information on Earthquake Engineering*, 2000, **16**(4): 63-69. (in Chinese))

[3] 洪 峰. 时滞阻尼理论[J]. 世界地震工程, 2001, **17**(3): 1-8. (HONG Feng. Time-delay damping theory [J]. *World Information on Earthquake Engineering*, 2001, **17**(3): 1-8. (in Chinese))

[4] 梁超锋,欧进萍. 结构阻尼与材料阻尼的关系[J]. 地震工程与工程振动, 2006, **26**(1): 49-55. (LIANG Chao-feng, OU Jin-ping. Relationship between structural damping and material damping [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2006, **26**(1): 49-55. (in Chinese))

[5] WOODHOUSE J. Linear damping models for structural vibration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **215**(3): 547-569.

[6] MAIA N M M, SILVA J M M, RIBEIRO A M R. On a general model for damping[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **218**(5): 749-767.

[7] LI Q S, LIU D K, FANG J Q, et al. Damping in buildings: its neural network model and AR model [J]. *Engineering Structures*, 2000, **22**: 1216-1223.

[8] ADHIKARI S. Damping modelling using generalized proportional damping [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **293**: 156-170.

[9] 包世华. 结构动力学[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2005. (BAO Shi-hua. *Dynamics of Structures* [M]. Wuhan University of Technology Press, 2005. (in Chinese))

- [10] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, **34**(2): 131-136. (ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1994, **34**(2): 131-136. (in Chinese))
- [11] ZHONG W X. On precise integration method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **163**: 59-78.
- [12] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, **12**(1): 1-6. (ZHONG Wan-xie. Precise computation of transient analysis[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1995, **12**(1): 1-6. (in Chinese))
- [13] ZHONG W X, ZHU J P, ZHONG X X. A precise time integration algorithm for nonlinear systems [A]. Proc of WCCM-3[C]. 1994, **1**: 12-17.
- [14] 裘春航, 吕和祥, 蔡志勤. 在哈密顿体系下分析非线性动力学问题[J]. 计算力学学报, 2000, **17**(2): 127-132. (QIU Chun-hang, LU He-xiang, CAI Zhi-qin. Solving the problems of nonlinear dynamics based on Hamiltonian system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, **17**(2): 127-132. (in Chinese))
- [15] 吕和祥, 于洪洁, 裘春航. 精细积分的非线性动力学积分方程及其解法[J]. 固体力学学报, 2001, **22**(3): 303-308. (LU He-xiang, YU Hong-jie, QIU Chun-hang. An integral equation of non-linear dynamics and its solution method[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, **22**(3): 303-308. (in Chinese))
- [16] 吕和祥, 蔡志勤, 裘春航. 非线性动力学问题的一个显式精细积分算法[J]. 应用力学学报, 2001, **18**(2): 34-40. (LU He-xiang, CAI Zhi-qin, QIU Chun-hang. An explicit precise integration algorithm for nonlinear dynamics problem[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2001, **18**(2): 34-40. (in Chinese))
- [17] BIOT M A. Linear thermodynamics and the mechanics of solids[A]. Proc of the third US national congress on applied mechanics[C]. New York: ASME, 1958: 1-18.
- [18] WAGNER N, ADHIKARI S. Symmetric state-space formulation for a class of non-viscously damped systems[J]. *AIAA J*, 2003, **41**(5): 951-956.
- [19] ADHIKARI S, WOODHOUSE J. Identification of damping: Part 1, viscous damping[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **243**(1): 43-61.
- [20] ADHIKARI S, WAGNER N. Direct time-domain integration method for exponentially damped linear systems[J]. *Computers and Structures*, 2004, **82**: 2453-2461.
- [21] 傅志方, 华宏星. 模态分析理论与应用[M]. 上海交通大学出版社, 2000. (FU Zhi-fang, FANG Hong-xing. *Modal Analysis Theory and Application* [M]. Shanghai Jiao Tong University Press, 2000. (in Chinese))
- [22] 钟万勰, 杨再石. 联系时间 LQ 控制主要本征对的算法[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(1): 45-50. (ZHONG Wan-xie, YANG Zai-shi. On the computation of the main eigen-pairs of the continuous-time linear quadratic control problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, **12**(1): 45-50. (in Chinese))

Time-history analysis of a non-viscous damped system using precise integration

DUAN Zhong-dong*, SHEN Hong-yu

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

Abstract: Time-history analysis of a multiple-degree-of-freedom system with non-viscous damping is considered. In the non-viscous damped system, the damping force relates with the velocity time history by a convolution integral between the velocity and a decaying kernel function in its mathematical formulation. By transforming the equation of motion into a first-order extended state-space representation, the precise integration technique is employed to numerically solve the state-space equation. Two examples are given. The results show that the proposed method herein gives almost theoretically accurate solutions to the non-viscous damped system, and at the same time its computational efficiency has increased ten-fold.

Key words: non-viscous damping; state-space equation; precise integration; time-history analysis