

文章编号:1007-4708(2009)03-0420-04

中心刚体-柔性梁耦合系统离散模型的研究

覃晓英*, 洪嘉振

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200240)

摘要:采用数值仿真对由中心刚体、柔性梁组成的刚-柔耦合系统的动力学离散模型进行了研究。考虑到刚柔耦合系统的控制方程没有精确解析解,只能寻求数值解,最广泛使用的离散方法是有限元,但其广义坐标数目过于庞大,因此本文探讨了采用经典结构动力学中不同边界的模态函数离散动边界下刚柔耦合动力学方程的可行性及各自的优劣,得到刚柔耦合系统的模态缩减规律。

关键词:刚-柔耦合系统;离散;有限元;模态缩减

中图分类号:O313.7 **文献标识码:**A

1 引言

刚-柔耦合系统的动力学建模理论经过最近几十年的发展已经较为成熟,得到了形式各异但本质相同的刚-柔耦合动力学方程——非线性、时变及强耦合的偏微分程,要得到该方程的精确解析解几乎不可能,只能寻求有效的数值解法离散该方程。

有限元方法是目前最常用的离散化方法,而且理论上对任意复杂的构件都可以通过恰当的单元划分单元来离散,然而如果直接将有限元的结点坐标作为柔性体变形的广义坐标,动力学方程的广义坐标数量将非常庞大,如果能够通过选取少量低阶模态坐标代替结点坐标,将大大降低动力学方程的求解规模,把这种方法称为有限元模态截断或有限元模态缩减法,简称模态截断或模态缩减法。但是经典结构动力学中的模态函数是否能有效的模拟动边界下的刚柔耦合问题需要论证,必须确保选择了合适的模态函数并确定截取了合适的模态阶数。

因此本文首先简单回顾了刚-柔耦合的一次近似建模理论,对方程进行了无量纲化处理;然后采用数值仿真,分析由中心刚体、柔性梁组成的系统采用经典结构动力学中不同边界的模态函数缩减动边界下刚-柔耦合动力学的有限元方程的可行性,并进一步根据误差确定采用不同边界的模态函

数缩减的优劣,根据刚柔惯量比得到刚-柔耦合系统的模态缩减规律。

2 方程的无量纲化

刚-柔耦合的中心刚体、柔性梁及卷簧的模型如图1所示,其中 e_0 为系统的总体基, e_b 为浮动基, e_b 的原点与梁的端部重合, x 轴与梁端部相切。中心刚体半径为 r_0 ,质量为 m_0 ,惯量为 J_0 ,卷簧刚度为 K_0 ,柔性梁原长为 l ,密度为 ρ ,截面面积为 A ,质量为 m_b ,弹性模量为 E ,截面惯性矩为 I 。

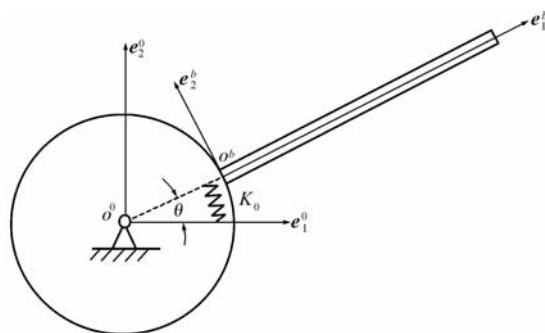


图1 中心刚体、柔性梁组成的刚-柔耦合系统
Fig. 3 A rigid-flexible coupling systems consisting of a hub and a flexible beam

许多学者如蒋丽忠^[1]、杨辉^[2]、刘锦阳^[3]和钱俊^[4]采用一次近似模型理论建立了形式各异本质一致的一次近似动力学方程,本章将参照钱俊^[4]的建模方法。为了使得讨论具有普适性,将钱俊的方程无量纲化,定义以下无量纲变量:

$$\tau = \frac{t}{T_0}, \hat{\omega}_c(\tau) = T_0 \omega_c, \dot{\hat{\omega}}_c(\tau) = T_0^2 \dot{\omega}_c, \hat{p} = \frac{p}{l},$$

$$\hat{r}_0 = \frac{r_0}{l}, \hat{\theta}(\tau) = \theta(t), \hat{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{l}, \hat{x} = \frac{x}{l},$$

收稿日期:2007-06-22;修改稿收到日期:2008-10-17.

基金项目:国家自然科学基金(10372057);教育部博士基金(20040248013)资助项目.

作者简介:覃晓英*(1978-),女,硕士生

(E-mail:qin1314@hotmail.com);

洪嘉振(1944-),男,教授,博士生导师.

$$\lambda = \frac{m_0}{\rho A l} = \frac{m_0}{m_b},$$

$$J' = \frac{J_0}{J_b} = \frac{J_0}{\int_0^l \rho A (\mathbf{r}'_0 + \rho'_0)^T (\mathbf{r}'_0 + \rho') dx}, K' = \frac{K_0 l}{EI}$$

式中 $T_0 = \sqrt{\frac{K_0}{(J_0 + J_b)}} = \sqrt{\frac{K_0}{J'(1 + J_b)}}$, T_0 的物理意义:其倒数 $\left(\frac{1}{T_0}\right)$ 为该系统的刚性化的频率,记做 $f_r = \frac{1}{T_0}$; J' 称为无量纲惯量, K' 称为无量纲刚度。

将以上变量代入钱俊^[4] 的方程得到无量纲的动力学方程:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{F}} \tag{1}$$

式中广义坐标阵为

$$\hat{\mathbf{q}} = [\hat{\mathbf{r}}_0^T \quad \hat{\theta} \quad \hat{\mathbf{p}}^T]^T \tag{2}$$

广义质量阵 $\hat{\mathbf{M}}$ 和广义力阵 $\hat{\mathbf{F}}$ 分别为

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{11} & \hat{\mathbf{M}}_{12} & \hat{\mathbf{M}}_{13} \\ \hat{\mathbf{M}}_{21} & \hat{\mathbf{M}}_{22} & \hat{\mathbf{M}}_{23} \\ \hat{\mathbf{M}}_{31} & \hat{\mathbf{M}}_{32} & \hat{\mathbf{M}}_{33} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \\ \hat{\mathbf{F}}_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中各个变量的具体表达式见文献[4]。

使用模态截断法截断有限元方程,就是指取该梁在无大范围运动时的前若干阶模态构成模态阵 Φ ,将节点的变形位移列阵 $\mathbf{p}$ 用模态阵 Φ 和模态坐标 $\mathbf{a}$ 表示为

$$\mathbf{p} = \Phi \mathbf{a} \tag{4}$$

$\Phi = [\Phi_1 \cdots \Phi_i \cdots \Phi_n], \mathbf{a} = [a_1 \cdots a_i \cdots a_n]^T$, n 为需要截取的模态的阶数。将式(4) 带入方程(1) 即可以得到模态截断后的方程,这里不再重复列出。

2 离散化仿真

取与文献[2] 相同的梁的参数: $l = 1.98 \text{ m}$, $A = 2.298 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $\rho = 8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E = 7.27 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $I = 4.496 \times 10^{-11} \text{ m}^4$, $r_0 = 0.1 \text{ m}$ 。通过改变中心刚体的转动惯量获得不同的刚柔惯量比 $J'(0.005 \leq J' \leq 200)$; K' 的取值参考文献[5],取 $K' = 5$ 。假设 $\theta(0) = 0$ 时,卷簧无变形,给定初始时刻 $\theta(0) = 3^\circ$,使弹簧产生变形,然后静止释放。梁初始时无变形,且无其他外力(矩) 作用在系统上。

文献[1] 表明,刚 - 柔耦合系统不具有结构动力学意义下的固有频率与振型,文献[2] 和[5] 进一步表明,刚 - 柔耦合时柔性梁的频率介于固支自由与简支自由之间,因此本文考察用该梁在固支自由边界、简支自由边界时的模态阵 Φ_c 和 Φ_s 缩减有限元的可行性,并比较 Φ_c 和 Φ_s 在模拟动边界刚 - 柔耦合问题的优劣,其中 Φ_c 和 Φ_s 由 ANSYS 处理得到。改变取值,求出系统的响应,分析模态缩减规律。列出部分参数下柔性梁端部位(图 2)、系统大范围运动的时间历程(图 3),图标含义如下:

iC 和 iS 分别为用前 i 阶 Φ_c 和 Φ_s 进行缩减的结果;FEM 为直接用有限元求解的结果。

从柔性梁端部位移和系统大范围运动的时间历程可以发现,在给定参数条件下,采用固支自由边界的模态函数和简支自由边界的模态函数都可以简化有限元的计算,并且可以发现系统大范围运动与柔性梁端部位移第一阶频率一致,高频相位相反,这与文献[6] 的实验结果相吻合。

3 误差分析

为了比较这两种边界的模态函数缩减的优劣,以有限元的结果作为“精确结果”定义误差:

$$\Delta \hat{u}_{ci} = \frac{(\hat{u}_{ci}(\tau) - \hat{u}_F(\tau))}{\hat{u}_M} \tag{5}$$

$$\Delta \hat{u}_{si} = \frac{(\hat{u}_{si}(\tau) - \hat{u}_F(\tau))}{\hat{u}_M} \tag{6}$$

式中 $i = 1, 2, \dots$, 表示截取的模态函数阶数; $\hat{u}_{ci}(\tau), \hat{u}_{si}(\tau), \hat{u}_F(\tau)$ 分别表示用前 i 阶固支 - 自由和前 i 阶简支 - 自由和有限元求解得到的端部横向位移; $\hat{u}_M = \max(\hat{u}_F(\tau))$ 表示在 $\tau \in [0 \quad 1]$ 内有限元求解得到的端部横向位移的最大值;作出部分参数下柔性梁端部位移的误差如图 4 所示。

按照工程标准,规定误差在 $\pm 5\%$ 范围内为合理截断标准,误差分析可以得到如下截断规律。

表 1 表明,无论 J' 的取值, Φ_c 相比 Φ_s 具有明显优势。模态缩减的总体规律:随着 J' 的增加,柔性梁的高频部分越来越少被激发,因此达到设定精

表 1 不同参数下柔性梁的截断规律
Tab. 1 Ruduction rule of MRM of a hub-beam system

J'	0.005	0.01	0.05	0.1	1	5	10	100	150	200
固支自由	5	4	3	2	1	1	1	2	3	3
简支自由	7	7	7	6	6	7	7	8	8	8

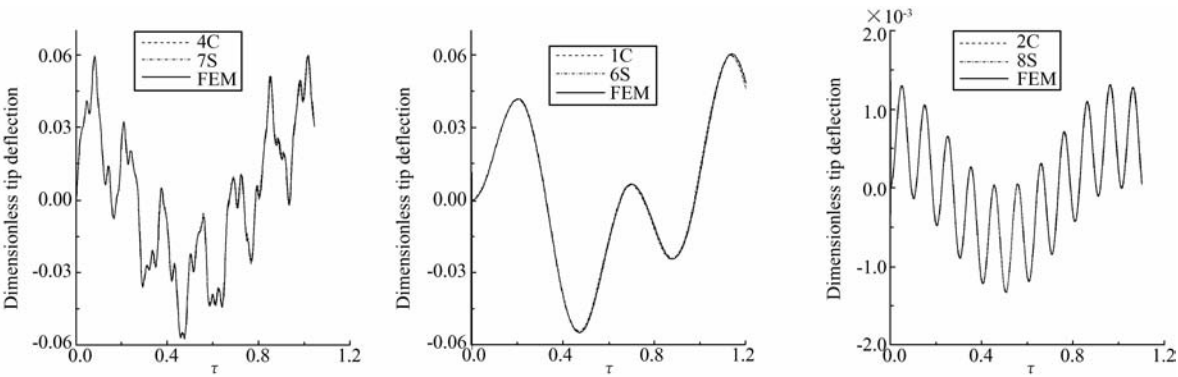


图 2 柔性梁端部在 y 方向的无量纲位移
Fig. 2 Dimensionless deflectoin of the beam tip in y -direction

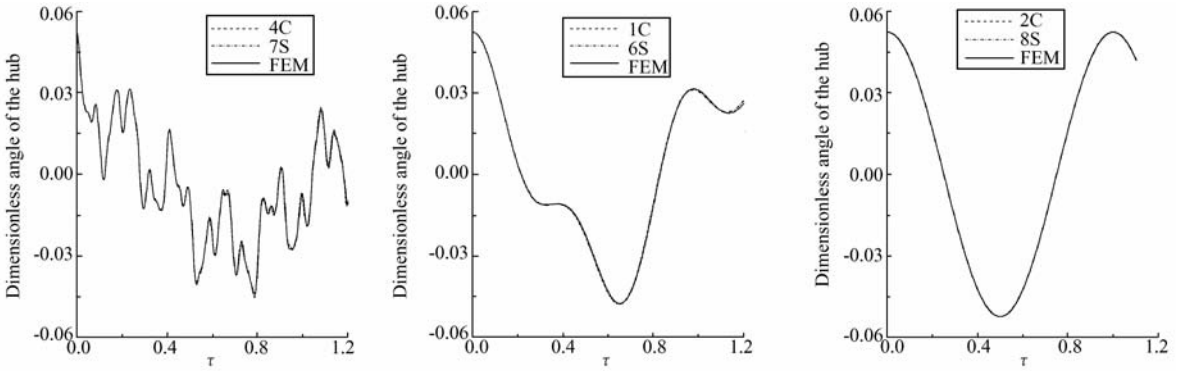


图 3 系统大范围运动的角度历程
Fig. 3 Dimensionless deflection of the beam tip in y -direction

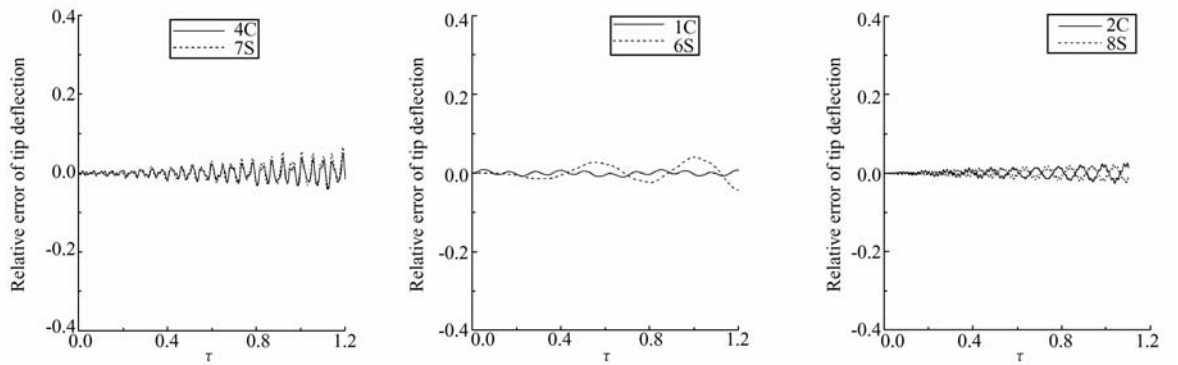


图 4 柔性梁端部位移的相对误差
Fig. 4 The relative error of deflection of the beam tip in y -direction

度需要截取的模态阶数逐渐减少,尤其是在 $J' \in [1, 10]$ 之间的时候,也就中心刚体与柔性梁惯量相当的时候,刚 - 柔耦合最为明显,此时动力学方程中 θ 和 $\mathbf{p}$ 之间的相互影响最大,需要截取的模态阶数最少。但是当 J' 继续增大到 100 甚至更大的时候,又需要更高阶的模态函数来缩减有限元方程;这是因为此时柔性梁的二阶频率所占比重继续增加,甚至达到和超过一阶频率的幅值。因此可以概括为整体趋势是随着 J' 的增加而减少,在 J' 等于 1 左右的时候需要最少的截断模态,当 J' 更大以

后,又有所增加。

采用简支自由边界的模态函数缩减规律如上,原因是一方面在 J' 增加的过程中,系统的特性从趋近简支自由到趋向于固支自由边界发展,使得需要更高阶的简支自由边界的模态函数才能实现模态缩减;另一方面,随着 J' 的增加,系统的刚 - 柔耦合效应增加,能激发柔性梁的高频部分减少,导致只需要较少的模态阶数就可以达到需要的精度,而且很明显的是随着 J' 的增加,系统高频部分减少很快,导致整体上用简支自由的时候也呈现先

减少后增加的趋势。

4 结 论

由中心刚体、柔性梁组成的耦合系统在不同刚-柔惯量比 J' 时,采用固支自由边界的模态函数和简支自由边界的模态函数,都可以简化有限元的计算,但采用固支自由的模态函数比简支自由的模态函数具有明显的优势。模态缩减总体规律为,在 J' 等于1附近,也就是刚体与柔性体惯量相当的时候,刚-柔耦合作用最为明显,此时达到相同的精度,需要的模态阶数最少,当 J' 更大或者更小都需要更高阶的模态函数缩减才能达到需要的精度。

参考文献(References):

- [1] 蒋丽忠,洪嘉振.大范围运动对弹性梁振动频率及模态的影响[J].振动与冲击,1999,16(1):12-18. (JIANG Li-zhong, HONG Jia-zhen. The frequency and mode of elastic beams in large overall motions, 1999,16(1):12-18. (in Chinese))
- [2] 杨辉.刚-柔耦合多体系统动力学建模与数值仿真[J].计算力学学报,2003,20(4):402-408. (YANG Hui. Dynamics modeling and numerical simulation

for a rigid-flexible coupling multibody system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(4):402-408. (in Chinese))

- [3] 刘锦阳.刚-柔耦合动力学系统的建模理论研究[D].上海交通大学,2000. (LIU Jin-yang. Study on modeling theory for a rigid-flexible coupling dynamics system[D]. Shanghai Jiaotong University, 2000. (in Chinese))
- [4] 钱俊.做平面运动的刚-柔耦合多体系统动力学建模理论研究[D].上海交通大学,2002. (QIAN Jun. Study on modeling theory for a rigid-flexible coupling multibody system with plan motion [D]. Shanghai Jiaotong University, 2002. (in Chinese))
- [5] LOW K H, LAU M W S. Experimental investigation of the boundary condition of slewing beams using a high-speed camera system[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1995,30(4):629-643.
- [6] 杨辉.刚-柔耦合建模理论的实验验证[J].力学学报,2003,35(2):253-256. (YANG Hui. Experiment validation on modeling theory for rigid-flexible coupling system[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2):253-256. (in Chinese))

Study on discretization model of coupling dynamics system consisting of hub-flexible beam

QIN Xiao-ying*, HONG Jia-zhen

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: In this thesis, discretization model of rigid-flexible coupling dynamics systems is studied. Modeling theory of rigid-flexible coupling dynamics systems has been studied for dozens of years. The accurate rigid-flexible coupling dynamics model has been established and corresponding governing equation of motions has been acquired. The equation is nonlinear, time dependent and strong coupling, so it is scarcely possible to acquire the exact analytical solution. Discretization is necessary to get the numerical solution. Finite-element-method (FEM) is widely used. While the number of generalized coordinates for the complex FMS by using the FEM is large, the mode-reduction-method (MRM) is more effective. It means that only lower order modes of the beam without large overall motions are chosen to reduce the number of the generalized coordinates. While the boundary conditions of the complex FMS don't usually fit a standard description. It is necessary to prove whether the classic mode-shape function effectively simulates the rigid-flexible coupling dynamics systems or not. In view of the issue mentioned above, this paper studies the feasibility and validity of using the classic mode-shape function to simulate the rigid-flexible coupling dynamics system and analyse the effectivity of different boundary condition mode-shape function. Then the rule of MRM of a hub-beam system is gained. The analysis above proves the validity of MRM and gets the procedure of MRM.

Key words: rigid-flexible coupling system; discretization; FEM; modal reduction