

文章编号:1007-4708(2009)03-0401-06

数学网格和物理网格分离的有限单元法(Ⅰ): 基本理论

凌道盛*, 徐小敏, 陈云敏

(浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室, 杭州 310058)

摘要:常规有限单元法在复杂边界问题的网格剖分、可移动边界和非连续变形问题的数值模拟等方面存在困难。本文将常规的有限单元分离为几何上相互独立的数学单元和物理单元,基于数学单元构造近似函数,引入位移模式关联法则以确定物理单元的位移模式,提出了在现有有限单元法框架内、基于数学网格和物理网格分离的强化有限单元法(FEM⁺⁺)。与常规有限单元法(SFEM)比较表明,强化有限单元法不仅很好地克服了常规有限单元法网格剖分上的困难,而且提供了一条更简便、更自然的分析移动边界问题和非连续变形问题的新途径。最后,通过数值算例验证了强化有限单元法的适用性和有效性。

关键词:有限单元法;移动边界;非连续变形;位移插值

中图分类号:TV313 **文献标识码:**A

1 引言

作为一种数值方法,有限元法在理论上已经比较成熟,并广泛应用在土木工程、机械工程、航空航天及船舶等领域,国内外先后出现了一批代表性著作^[1-5]。

如同其他数值方法一样,有限单元法还远不是一种完美的解法,其缺陷主要表现在:(1)网格划分的成本高,对于形状复杂的求解域,需要人工干预;(2)由于有限单元近似函数基于网格构造,求解精度受网格影响大;(3)有限单元法存在网格偏见,计算结果对网格划分有很强的敏感性^[6];(4)适合连续变形分析,对非连续变形问题无能为力。解决上述问题的方法可分为两类。第一类方法是在现有框架内对有限单元法进行改进,以完全或部分解决上述问题。例如,Belytschko等提出的扩展有限单元法 XFEM(eXtended Finite Element Method)^[7,8], Babuška等提出的广义有限单元法 GFEM(Generalized Finite Element Method)^[9,10]以及 Hansbo等提出的方法^[11]。GFEM通过引入近似网格和积分网格克服了复杂分析域网格剖分的困难。同时,基于单位分解法和一些特殊函数实现有限元近似

函数的局部富集,以提高角点、孔洞附近复杂应力场的分析精度。XFEM则在位移插值函数中引入阶跃函数和裂纹尖端附近的奇异位移解,通过局部富集节点自由度的方法实现裂纹动态扩展过程中非连续变形的数值模拟。Hansbo等则把常规单元位移插值的方法应用于被变形不连续面剖分的两个单元区域,分别构造单元区域位移近似函数。第二类方法是抛弃现有的有限元框架,提出新的理论和方法求解上述问题。无网格法、离散单元法等就是其中代表性的研究成果。

本文从常规的有限单元法 SFEM(Standard Finite Element Method)出发,将常规单元分离为几何上相互独立的数学单元和物理单元,利用数学单元构造离散位移场,根据位移模式关联法则确定物理单元的位移模式,提出了基于现有有限单元法框架、适用于任意非连续变形问题的强化有限单元法 FEM⁺⁺(Enhanced Finite Element Method)。

2 强化有限单元法(FEM⁺⁺)

为方便理解,先以梁单元为例说明物理单元和数学单元,进而介绍平面问题的强化有限单元法。

2.1 数学单元和物理单元

图1(a)所示的T型截面梁,在 xoz 平面内的弯曲荷载作用下产生面内弯曲变形,且变形满足直线假定。常规有限单元法将其离散为如图1(c)所示的2节点梁单元,线段12位于梁变形的中性层

收稿日期:2008-08-08;修改稿收到日期:2008-10-30.

基金项目:国家“973”重点基础研究课题(2007CB714200);

国家自然科学基金(50778163)资助项目.

作者简介:凌道盛*(1968-),男,博士,教授,博士生导师

(E-mail: dsling@zju.edu.cn).

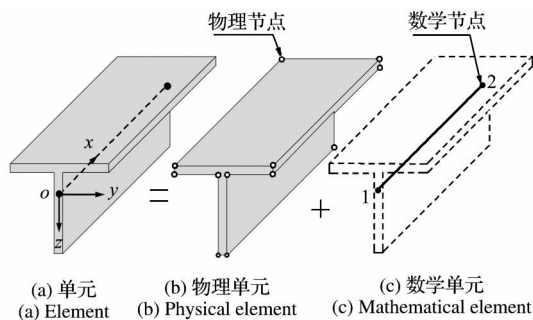


图 1 数学单元和物理单元

Fig. 1 Mathematical element and physical element

内,两个节点分别位于两端截面上。每个节点有 2 个独立的自由度:沿 z 轴方向平动自由度 w_i ($i = 1, 2$) 和绕 y 轴的转动自由度 θ_i ($i = 1, 2$)。

在小变形($\tan \theta \approx \theta$)条件下,根据线单元的四个自由度可以构造出一个关于 x 三次、定义在线段 12 上的挠度函数 $w_0(x)$ 。将 $w_0(x)$ 按直线假定向线段外延拓,使之覆盖整个 T 型截面梁,可得到一个定义在 T 型截面梁占据的空间区域内的、关于 x 三次、 z 一次和 y 零次的代数多项式位移模式:

$$u(x, y, z) = -z \frac{dw_0(x)}{dx}$$

$$v = 0, w = w_0(x, y, z) \quad (1)$$

利用虚功原理和式(1)给出的位移场,容易得到单元的元素矩阵(如刚度矩阵等)。单元的元素矩阵具有积分形式,其积分域是整个 T 型截面梁占据的物理区域。对于线弹性的等截面梁单元,很容易通过解析积分的方法得到单元的元素矩阵。

从上述分析可以看出:

(1) 线段 12 是为构造 T 型梁近似位移场而建立的,是数学上构造插值函数的需要。

(2) 依据直线假定的插值函数,延拓建立 T 型截面梁位移模式与线段上插值函数间的关系。

(3) 就 T 型梁位移模式的构造而言, T 型截面梁和线段 12 在几何上可以相互独立。

(4) 对单元刚度矩阵、质量矩阵有贡献的是整个 T 型截面梁占据的区域。

为表述更加明确起见,称单元(Element)占据的物理区域为物理单元 PE(Physical Element),如图 1(b) 所示;称为构建单元位移模式而建立的几何区域为数学单元 ME(Mathematical Element),如图 1(c) 所示。称定义物理单元几何及位移模式所需的节点为物理节点。定义数学单元几何及离散函数所需的节点为数学节点。称数学单元位移插值函数和物理单元位移模式间的对应关系为位移模

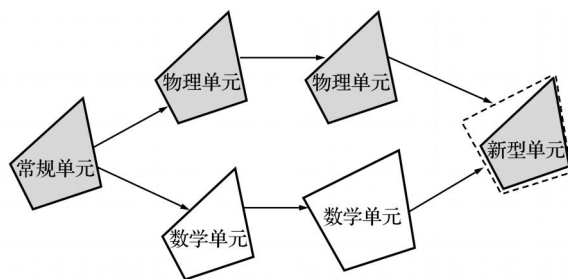


图 2 数学和物理网格分离的平面有限单元

Fig. 2 Plane finite element with separated mathematical and physical mesh

式关联法则。基于以上定义可见,有限单元实质上是物理单元和数学单元通过位移模式关联法则的统一(如图 1 所示),数学单元、物理单元和关联法则构成单元的三个基本要素。

杆单元、板壳单元、平面单元和空间实体单元同样可分解为数学单元和物理单元,只是常规的平面问题等参元的数学单元和物理单元在平面内完全重合而已。引入具有插值函数空间延拓功能的关联法则之后,数学单元和物理单元在平面内重合不再是必要条件,可以根据物理单元变形描述的需要调整数学单元的大小和形状,如图 2 所示。

2.2 数学网格和物理网格

为方便起见,称物理单元的集合为物理网格,称数学单元的集合为数学网格。数学单元和物理单元的分离使得有限元网格剖分更加容易实现。

首先,数学单元和物理单元的分离解除了数学网格与物理网格(或分析对象的物理区域)之间的几何限制。这意味着数学网格的覆盖区域不再必须与物理网格或物理区域相一致,数学网格的剖分可以不受分析域复杂边界的制约。

其次,数学单元和物理单元的分离解除了物理单元几何形状方面的限制。由于物理单元的位移模式由数学单元及关联法则确定,因此,物理单元不必局限于形状良好的四边形(或三角形)。

第三,数学单元和物理单元的分离还解除了物理单元材料组成方面的限制。在误差容许的条件下,同一个单元中可以包含多种材料。

几何形状和材料组成限制的解除使得物理网格的剖分也非常容易实现,物理单元的变形是物理网格剖分唯一需要考虑的因素。

可见,对几何性态要求高的数学网格可以不受复杂物理边界的限制,而受物理边界制约的物理网格对物理单元的形状没有限制,这使得复杂边界问题的数学网格和物理网格剖分大为简化。图 3(a)

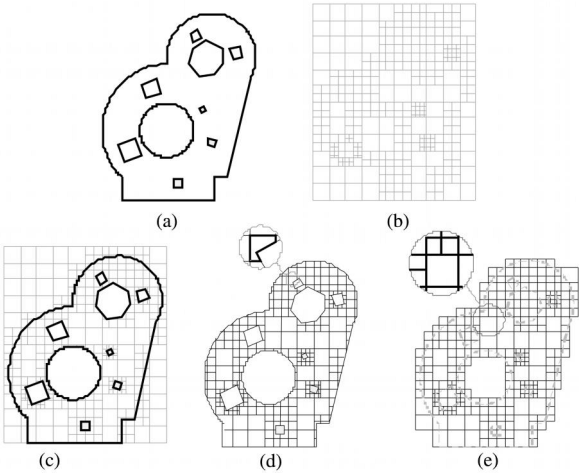


图 3 复杂结构的数学网格和物理网格
Fig. 3 Mathematical and physical meshes of complex structure

为一具有复杂边界的平面问题。在网格剖分时,首先建立一张规则的、允许局部加密的网格(不一定是数学网格),如图 3(b) 所示。将上述网格和结构叠加在一起,如图 3(c) 所示。每个正方形与分析域的交集就构成一个物理单元,网格与分析域的交集就构成物理网格,如图 3(d) 所示。其次,根据每个物理单元构造相应的数学单元。对于图示单元内不存在位移不连续性的物理单元,剖分物理单元的正方形即可作为数学单元。因此,只要删除所有与分析域没有交集的正方形,剩下的正方形就构成分析结构所需要的数学网格,如图 3(e) 所示。

由图 3(d) 的局部放大图可以看出,物理单元的形状可以是任意的,允许出现凹多边形。本文沿用 4~8 节点等参单元的概念,但与常规有限单元法不同,这里特指由 4~8 个数学节点构成的数学单元。

比较图 3 中的数学网格和物理网格可以看出以下几个特点:

- (1) 所有数学单元都具有很好的几何性态。
- (2) 在分析区域内部,与分析域边界不相交的数学单元在面内与物理单元完全重合,相应的数学节点和物理节点占据相同的平面位置。
- (3) 所有物理单元和物理单元的交界面都位于相应的数学单元和数学单元的交界面上。
- (4) 与内外边界相交的单元,物理单元和数学单元在面内可能不一致。图中物理单元的面内区域都包含于数学单元,但理论上允许物理单元超出数学单元占据的平面区域。
- (5) 数学网格的外边界部分与物理边界重合,部分物理边界包含在数学网格覆盖的平面区域内。

需要说明的是,特点(2)和(3)不是本文提出的有限单元法必须具备的特征,但考虑到:(1)数学单元随意性会导致数学网格的不确定性,这种不确定性反而会增加分析中的困难;(2)物理单元间位移连续条件是通过关联法则,最终由数学单元间的某种约束来实现的,特点(2)和(3)使得物理单元间位移连续条件很容易通过数学单元间的位移连续性得到满足。因此,上述特点使得本文提出的有限单元法在网格剖分时既保留了常规单元处理单元间连续条件的简便,又克服了常规有限元网格在复杂几何边界上容易畸变的缺点。

2.3 关联法则及单元列式

控制方程,无论是微分形式的还是积分形式的,都是建立在物理区域上的。为计算物理单元的刚度矩阵等单元量,必须建立物理单元位移模式和数学单元位移插值函数间的关联法则。限于篇幅,本文只介绍其中一种最常用的关联法则,即数学模式覆盖法。

基于数学单元构建的插值函数,其定义域为数学单元内部。数学模式覆盖法直接将插值函数的定义域延拓至整个物理单元,而插值函数的形式不变。

将等参插值应用于数学单元,得到定义在数学单元上的坐标插值和位移插值:

$$x = \sum_k^{n_m} N_k(\xi, \eta) x_k, u = \sum_k^{n_m} N_k(\xi, \eta) u_k \quad (2)$$

式中 $N_k = N_k(\xi, \eta)$ 为定义在母单元中插值形函数, $x = \{x, y\}^T$ 和 $u = \{u, v\}^T$ 分别为数学单元内任意一点的坐标和位移矢量, x_k 和 u_k 分别为数学节点 k 的坐标和位移矢量, n_m 为数学单元的节点数,这里取 4。注意到式(2)的定义域为数学单元内部及边界上,在自然坐标系中有

$$\xi \in [-1, 1], \quad \eta \in [-1, 1] \quad (3)$$

将式(2)的定义域适当延拓,直至覆盖整个物理单元,即物理单元中任意一点的位移也可以通过式(2)确定。

不失一般性,假定每个物理单元都可细化为若干互不重叠的四边形物理子域。同数学单元类似,每个四边形子域可由 4 个顶点(即物理节点)来描述。如图 4 所示,物理单元(1 2 4 5 8 7 6 3)被细化为 3 个四边形物理子域,分别为 1 2 4 3、3 4 7 6 和 4 5 8 7,共 8 个物理节点。物理子域节点编号方式同数学单元。

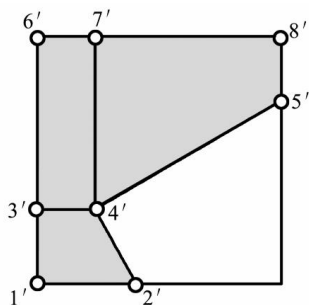


图 4 物理单元子域

Fig. 4 Subdomains of physical element

由于常规的位移插值函数总是一个连续函数,因此物理单元内各相邻子域交界面处的位移满足连续性要求。根据等参插值的性质,数学单元之间界面上满足位移连续条件。如果相邻物理单元间的交界面总位于数学单元交界面上,物理单元交界面间的位移连续条件就自动得到满足。

物理单元对刚度矩阵的贡献可以表示为

$$K = t \int_{\Omega^E} B^T D B dx dy \quad (4)$$

式中 t 为物理单元厚度, Ω^E 为物理单元占据的平面区域, 矩阵 B 和 D 分别为单元几何矩阵和材料系数矩阵。

由于物理单元被细化为若干子域, 根据积分的线性性质, 式(4) 可以改写成:

$$K = t \sum_s \int_{\Omega_s^E} B^T D_s B dx dy \quad (5)$$

式中 Ω_s^E 为第 s 个子域占据的平面区域, D_s 为第 s 个子域的材料系数矩阵, s_d 为子域总数。

为便于采用 Gauss 积分, 首先将物理单元子域映射到数学单元的母单元中, 并假定仍然保持为四边形, 如图 5(a, b) 所示。为减少映射带来的误差, 自然坐标系中的子域一律采用 8 节点曲边四边形表示, 物理节点的自然坐标记为 (ξ_k', η_k') 。

对母单元中的物理子域再次进行坐标变换, 即建立图 5(c) 和图 5(d) 间的坐标变换, 容易得到:

$$\xi = \sum_k^{n_p} N_k'(\xi', \eta') \xi_k' \quad (6)$$

式中 $\xi = \{\xi, \eta\}^T$, N_k' 为插值形函数, 形式上与 N_k 相同, 但是 ξ 和 η 的函数。

利用坐标变换关系式(2), 式(5) 可变换为

$$K = t \sum_s \int_{\Omega_s^{PE}} B^T D_s B |J| d\xi d\eta \quad (7)$$

式中 Ω_s^{PE} 为物理单元的第 s 个子域在母单元中占据的区域, J 为坐标变换(2) 对应的 Jacobi 矩阵, $|J|$ 为 Jacobi 矩阵行列式的值。将坐标变换式(6) 应用于式(7), 可得

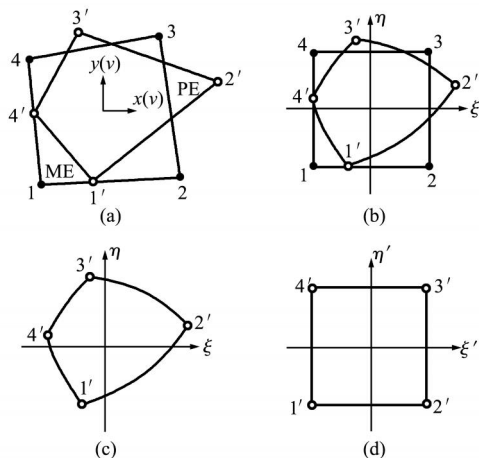


图 5 物理子域坐标变换

Fig. 5 Coordinate transfer of physical subdomains

$$K = t \sum_s \int_{\Omega_s^{PE}} B^T D_s B |J| d\xi d\eta \quad (8)$$

式中 J_s 为由坐标变换式(6) 引入的 Jacobi 矩阵。

与常规有限单元法 K 矩阵的计算相比, 本文的方法只是多增加了两项工作: (1) 子域求和; (2) 坐标变化。而这两项工作在现有的程序框架内实现是非常简便的。

2.4 强化有限单元法

为区别于常规有限单元法和其他有限单元法, 称基于数学网格和物理网格分离的有限单元法为强化有限单元法 FEM^{++} (Enhanced Finite Element Method)。强化有限元法实现的具体步骤为

(1) 按变形特性, 将分析的对象分解为一系列在节点和单元边界相互联系的物理单元的集合。

(2) 针对不同物理区域的变形特点及位移连续条件, 构造数学单元及位移插值模式。

(3) 建立数学单元位移插值模式和物理单元变形模式间的关联法则, 满足保证有限单元法收敛的物理力学条件(如位移协调条件、保续条件等)。

(4) 利用积分形式的控制方程对物理单元进行单元分析, 建立单元的平衡(运动) 方程。

(5) 完成所有物理单元的组集, 形成离散系统的平衡(运动) 方程。

(6) 求解获得数学节点自由度。

(7) 利用物理单元和数学单元间的关联法则求解物理单元的各种状态量。

与常规有限单元法的求解过程比较可见, 强化有限单元法是一种源于常规有限单元法、位于常规有限单元法求解框架内的新方法, 常规有限单元法是强化有限单元法的特例。另外, 基于数学网格和物理网格分离的思想, 不难看出众多半解析有限单元法的差异仅限于关联法则, 即延拓方向和延拓规

则,不同而已。

3 基于 FEM⁺⁺ 的非连续变形描述

除在网格剖分方面具有优势外,与 SFEM 相比,FEM⁺⁺ 的另一个优点表现在对非连续变形的描述能力上。众所周知,数值模拟裂纹扩展过程的难点在于裂纹位置通常事先并不知道。常规有限单元法需要不断移动网格或重新生成网格以适应裂纹的扩展,由此带来网格畸变、计算精度低下等问题。本节以裂纹扩展问题为例说明 FEM⁺⁺ 在非连续变形问题中的应用。

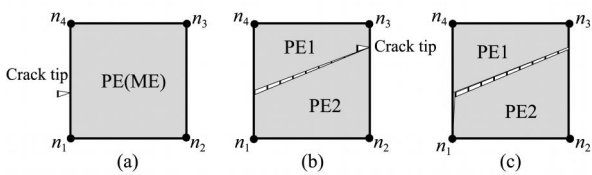


图 6 4 节点等参元中裂纹扩展

Fig. 6 Crack propagation in 4 node isoparametric element

如图 6(a) 所示物理单元 PE 和数学单元 ME 在平面内完全重合的四节点平面单元(四个数学节点编号分别为 n_1, n_2, n_3 和 n_4)。图 6(b) 为裂纹尖端穿越单元内部,止于单元的另外一个边界 $n_2 n_3$ 。图 6(c) 为裂纹尖端贯穿单元进入邻近单元。裂纹穿越过程中,原来的物理单元 PE 被划分成两个不同的物理单元,分别记为 PE1 和 PE2。在图 6(b) 情况下,物理单元 PE1 和 PE2 仅在裂纹尖端具有相同的位移,当裂纹完全贯穿时,物理单元 PE1 和 PE2 的变形各自独立。

对于图 6(b,c) 的情况,常规的有限单元法采用图 7(a,b) 示两个单元进行分析,节点数分别为 7 和 8。为保证单元间位移连续,图 7(a) 中的节点 n_7 的位移是不独立的,由节点 n_2 和 n_3 插值确定,具有独立自由度的节点数为 6。由图可以看出,常规有限元网格容易导致单元畸形。

由于物理单元 PE1 和 PE2 具有不同的变形模式,因此,必须采用不同的数学单元来描述。假定物理单元与数学单元位移模式采用数学模式覆盖法进行关联,并注意到:

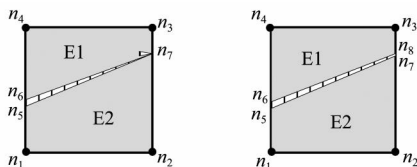


图 7 常规单元非连续变形描述

Fig. 7 Discontinuous deformation description of standard element

- (1) 数学单元 $n_1 n_2 n_3 n_4$ 具有良好的几何性状。
- (2) 数学单元和物理单元在几何上没有任何约束关系,只要保证按一定关联法则建立的物理单元位移模式满足有限元的连续和收敛性要求即可。

因此,可以取与物理单元 PE1 和 PE2 对应的数学单元 ME1 和 ME2 在几何上与 ME 重合,如图 8(a,b) 所示。

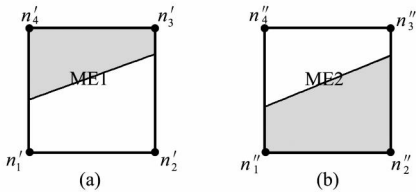


图 8 数学单元 ME1 和 ME2

Fig. 8 Mathematical elements ME1 and ME2

为保证物理单元 PE1 与上邻物理单元的位移连续性,必须有

$$n_3' = n_3, \quad n_4' = n_4 \tag{9}$$

同理,为保证物理单元 PE2 和下邻物理单元的位移连续性,必须有

$$n_1'' = n_1, \quad n_2'' = n_2 \tag{10}$$

当裂纹尖端位于单元边界上时,如图 6(b) 所示,为满足裂纹尖端所在边与邻单元的位移连续性,有

$$n_2' = n_2'', \quad n_3' = n_3'' \tag{11}$$

由此可见,为描述裂纹开展引起的不连续变形,需要适当增加数学节点并重新定义数学单元。对图 6(b) 的情况,需要新增两个数学节点 n_1' 和 n_4'' , ME1 的定义为 $n_1' n_2 n_3 n_4$, ME2 的定义为 $n_1 n_2 n_3 n_4''$ 。对图 6(c) 的情况,需要新增四个数学节点 n_1' 和 n_2' , n_3' 和 n_4'' , ME1 的定义为 $n_1' n_2' n_3 n_4$, ME2 的定义为 $n_1 n_2 n_3 n_4''$ 。

这样,只要用 ME1 和 PE1, ME2 和 PE2 分别代替 ME 和 PE 就不仅能描述裂纹在单元内的扩展引起的不连续变形,而且无需重新划分数学网格,能够保证裂纹开展过程中数学网格不会畸化,从而保证了位移插值函数的合理性,有效地克服了常规有限单元法分析非连续变形问题上的困难。

4 算例验证

为验证强化有限单元法的适用性,进行了一系列的数值算例分析,这里给出其中一例。

如图 9(a) 所示含裂纹试件,长度为 2,高为 1,单位厚度,属于平面应力问题。材料的杨氏模量为 1,泊松比为 0.2。试件右下角水平和竖向位移同时固定,右上角水平位移固定,左上角施加单位竖向

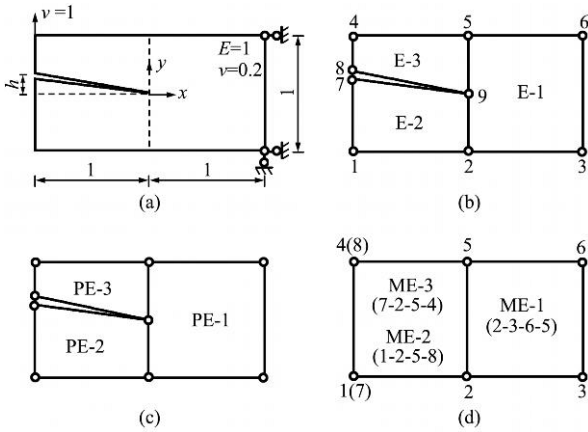


图 9 带裂纹试件及有限单元离散模型
Fig. 9 Cracking specimen and corresponding finite element discrete model

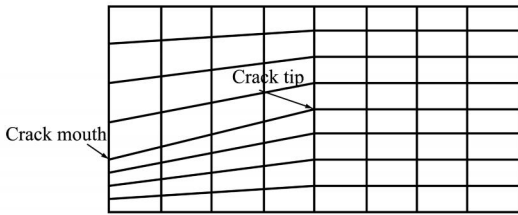


图 10 细化网格
Fig. 10 Refined mesh

位移。裂纹开口位于试件的左边界,纵坐标为 h ,裂纹的尖端位于试件中心位置。

常规有限单元法采用 3 个单元,9 个节点,如图 9(b) 所示。其中,节点 9 满足一定约束条件,即该节点的位移为节点 2 和 5 的平均值。在强化有限单元法中,整个区域被剖分为 3 个物理单元,如图 9(c) 所示。数学网格采用了 8 个数学节点,3 个数学单元。与物理单元 PE-2 相对应的数学单元为 ME-2 (1-2-5-8),与物理单元 PE-3 相对应的数学单元为 ME-3 (7-2-5-4),其中,物理单元位移模式采用数学模式覆盖法确定。两种网格具有相同的独立自由度,计算规模相同。

由于没有解析解,本文以图 10 所示细化网格、采用常规有限单元法的计算结果作为比较依据。常规有限单元法采用 ABAQUS 进行分析。

当 $h = 0$ 时,常规有限单元法和强化有限单元法给出几乎完全一致的计算结果,说明此时两者具有相同的计算精度。随着裂纹开口偏离中心位置距离的增加,常规单元发生几何畸变,而强化有限单元法中的数学网格始终不变,保持很好的几何性态。为比较由于单元畸变对计算结果的影响,以 $h = 0$ 时的计算结果作为基准定义无量纲量。以强制位移作用点的竖向反力 P 为例,开口位置为 h 时,无量纲竖向反力定义为

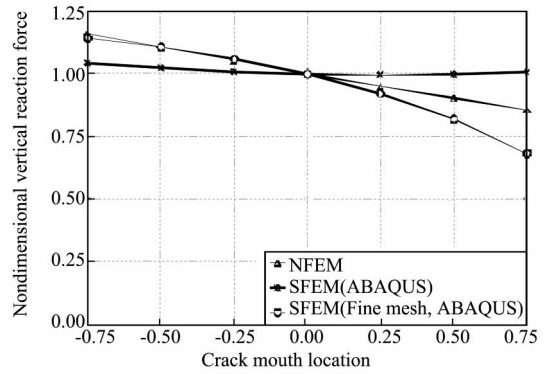


图 11 强制位移作用点竖向无量纲反力
Fig. 11 Nondimensional vertical reaction force at the point of forcing displacement

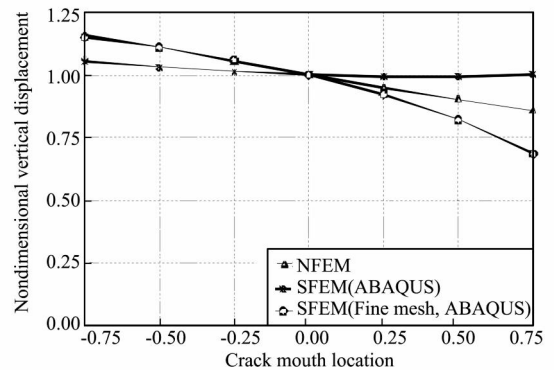


图 12 左下角点竖向无量纲位移
Fig. 12 Nondimensional vertical displacement at bottom left corner of the specimen

$$P(h) = \frac{P(h)}{P(0)} \quad (12)$$

式中 $P(h)$ 为裂纹开口位置位于 h 的位置时对应的竖向反力。图 11 为强制位移作用点竖向无量纲反力比较图,图 12 为左下角竖向无量纲位移比较图。

由图可以看出:

(1) 无论是竖向反力、竖向位移还是裂纹开口的张开距离,强化有限单元法给出的随裂纹开口位置变化的趋势都和细化网格一致,而常规的有限单元法的计算结果不尽如人意,甚至在 $h > 0$ 时表现出相反的趋势。

(2) 无论开口位置如何变化,由于数学单元不变,强化有限单元法抵抗物理单元畸变的能力远远好于常规的有限单元法。

5 结 论

通过上述分析可以看出:

(1) 数学网格和物理网格分离的强化有限单元法是一种基于现有有限单元法框架内的新型有限单元法,常规有限单元法是其特例。

(2) 强化有限单元法克服了常规有限单元法网格剖分上的困难。

(3) 强化有限单元法提供了一条比 XFEM、GFEM 和 Hansbo 方法更加简便、自然的分析非连续变形问题的新途径。

参考文献(References):

- [1] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L, ZHU J Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* [M]. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [2] BEL YTSCHKO T, LIU W K, MORAN M. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* [M]. New York: John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [3] 丁皓江, 何福保, 谢贻权, 等. 弹性和塑性力学中的有限单元法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989. (DING Hao-jiang, HE Fu-bao, XIE Yi-quan, et al. *Finite Element Method for Elastic and Plastic Mechanics* [M]. Beijing: China Machine Press, 1989. (in Chinese))
- [4] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997. (WANG Xu-cheng, SHAO Min. *Basic Principle and Numerical Method of Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [5] 凌道盛, 徐兴. 非线性有限元及程序[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2004. (LING Dao-sheng, XU Xing. *Nonlinear Finite Element Method for Elastic and Plastic Mechanics* [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2004. (in Chinese))
- [6] NEEDLEMAN A. Material rate dependent and mesh sensitivity in localization problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, **67**:68-85.
- [7] MOËS N, DOLBOW J, BEL YTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**:131-150.
- [8] MOËS N, BEL YTSCHKO T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, **69**:813-833.
- [9] BABUŠKA I, STROUBOULIS T, COPPS K. The design and analysis of the generalized finite element method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, **181**(1):43-69.
- [10] STROUBOULIS T, COPPS K, BABUŠKA I. The generalized finite method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2001, **190**:4081-4193.
- [11] HANSBO A, HANSBO P. A finite element method for the simulating of strong and weak discontinuities in solid mechanics [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, **193**:3523-3540.

An enhanced finite element method with separate mathematical and physical mesh(I) : theory

LING Dao-sheng^{*}, XU Xiao-min, CHEN Yun-min

(MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering,
Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: For standard finite element method (SFEM), mesh generation of domain with complex boundary and problems with movable boundary or discontinuous deformation are cumbersome to deal with. In this paper, conventional element is separated into two kinds of elements, mathematical element and physical element, which are geometrically independent. The mathematical element and physical element are applied for approximating construction and physical domain description, respectively. By introducing correlation rule between mathematical and physical element, the approximate displacement of physical element is determined. Basing on separated mathematical and physical meshes, an enhanced finite element method (FEM^{++}), which is in the framework of SFEM, is then put forwards. A typical correlation rule, named extension of mathematical displacement mode for regular mathematical element, is proposed with corresponding formulas. The most important advantage of FEM^{++} is that it provides a new simple way to simulate problems with movable boundary or strong/weak discontinuous deformation. Finally, its applicability and validity are verified through a numerical example.

Key words: finite element method; discontinuous deformation; movable boundary; displacement interpolation