

二维非局部线弹性平面问题的辛分析

姚 征*, 郑长良

(大连海事大学 交通与物流工程学院, 大连 116026)

摘 要:将二维非局部线弹性理论引入到 Hamilton 体系下, 基于变分原理推导得出了二维线弹性理论的对偶方程和相应的边界条件。在分析验证对偶方程的准确性的基础上, 该套方法被应用于二维弹性平面波问题的求解。将精细积分与扩展的 W-W 算法相结合在 Hamilton 体系下建立了求解平面 Rayleigh 波的数值算法。从推导到计算的保辛性确保了辛体系非局部理论与算法的准确性。通过对不同算例的数值计算, 分析和对比了非局部理论方法与传统局部理论方法的差别, 并进一步指出了该套算法的适用性和优势所在。

关键词:非局部理论; Hamilton 原理; 变分; 弹性波; 精细积分

中图分类号:O302

文献标识码:A

1 引 言

Eringen 的非局部弹性理论^[1]成功地描述了高频波在平面弹性介质中的散射现象, 并被应用于诸如断裂、位错、复合材料及流体力学等领域中^[2]。非局部连续介质理论在处理较小尺度问题上显示出特有的优点, 对处理纳米点、纳米线及纳米带等纳米器件的力学问题展示了较广阔的发展前景。在纳米尺度上, 材料的尺寸效应问题显得尤为突出, 纳微尺度上的物理问题日益成为研究者的热点目标, 受到研究者的关注。非局部理论通常导致积分微分方程, 其求解面临相当的困难, Eringen 给出了一种微分形式的非局部理论^[3], 使问题大为简化。针对微分形式的非局部理论, 近年来涌现出很多算法和应用性研究, 推动着非局部理论的逐步发展和完善^[4-7]。

近年来, Hamilton 体系与辛几何算法在较多领域得到了应用, 并取得了丰硕的成果^[8-10]。钟万勰教授等提出并建立了弹性力学 Hamilton 体系辛求解的一般方法, 将传统的弹性力学的求解导向了理性的求解方法^[8,9]。本文利用非局部线弹性理论的微分形式本构关系, 基于二维核函数利用变分原理将非局部线弹性理论导入到 Hamilton 体

系下, 并利用变分得出了二维非局部线弹性理论的对偶方程, 从而可以在辛体系下对非局部线弹性问题作分析和计算, 相应的辛几何算法也可得以应用。

半空间中的弹性平面波的研究, 在地震波的传播问题中有重要意义。作为一个简单的尝试, 本文利用二维非局部线弹性理论分析并计算了半空间中的弹性平面波的传播问题。在辛体系下, 结合精细积分方法和扩展的 Wittrick-Williams 算法^[8,11,12]成功地求解了该问题, 并与传统弹性理论下的结果作了分析对比。最后总结并讨论了辛体系算法在处理此类问题中的优势。

2 二维非局部线弹性模型

对于均匀各向同性弹性固体, Eringen 的非局部弹性理论可以利用如下方程组来描述^[1,3]:

$$t_{kl}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa) \sigma_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}') \quad (1)$$

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{kl}(\mathbf{x}') = \lambda e_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(\mathbf{x}') \quad (3)$$

$$e_{kl}(\mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k(\mathbf{x}')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(\mathbf{x}')}{\partial x'_k} \right) \quad (4)$$

式中 t_{kl} , ρ , f_l 和 u_l 分别是 t 时刻该弹性体上某个参考点 $\mathbf{x}$ 的应力张量, 质量密度, 体力密度和位移矢量, $e_{kl}(\mathbf{x}')$ 是弹性体上任意一点 $\mathbf{x}'$ 在 t 时刻的线性应变张量, $\sigma_{kl}(\mathbf{x}')$ 是相应的宏观(经典)应力张量, λ 和 μ 是 Lamé 系数, δ_{kl} 为 Kronecker 符号。

收稿日期:2008-08-08; 修改稿收到日期:2008-10-23.

基金项目:国家自然科学基金重点(50438010)资助项目.

作者简介:姚 征*(1978-), 男, 博士, 讲师

(E-mail: yaozheng.cn@gmail.com).

积分本构方程(1)中包含一个核函数 α (也称作非局部模数):

$$\alpha = \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \kappa), \quad \kappa = e_0 a/l \quad (5)$$

它有多种形式,不同的问题可以采用不同的形式。核函数依赖于一个特征长度比率 a/l ,其中 a 是内部特征长度(晶格参数、颗粒距离等), l 是外部特征长度(如裂缝长度、波长等), e_0 是相应的材料常数。对于二维问题,Eringen 指出可以采用核函数:

$$\alpha(|\mathbf{x}|, \tau) = (2\pi l^2 \kappa^2)^{-1} K_0(\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}/l\kappa) \quad (6)$$

式中 K_0 是修正 Bessel 方程。若取该核函数,则可推导出本构关系的微分形式^[3]:

$$(1 - \kappa^2 l^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

3 二维非局部线弹性理论的 Hamilton 形式

针对微分形式的非局部线弹性方程组,如果假设体力 $f_i = 0$,经过推倒整理以分量形式写出运动方程为

$$\begin{cases} (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_y}{\partial y^2} \right) - \\ \quad (1 - \kappa^2 l^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_y = 0 \\ (\mu + \lambda) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial u_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial u_x}{\partial y^2} \right) - \\ \quad (1 - \kappa^2 l^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_x = 0 \end{cases} \quad (8)$$

根据运动方程可写出相应的能量密度表达式(令 $c = e_0 a = \kappa l$):

$$\begin{aligned} U_0 = & \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right]^2 + \frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]^2 + \\ & \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho}{2} (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2) - \\ & \frac{\rho c^2}{2} [(\nabla \dot{u}_x)^2 + (\nabla \dot{u}_y)^2] \end{aligned} \quad (9)$$

如处理问题为振动或波动问题,则可把时间化为频域,令:

$$u_x = u(x, y) \cdot e^{-i\omega t}, \quad u_y = v(x, y) \cdot e^{-i\omega t} \quad (10)$$

则能量密度表达式(9)变为

$$\begin{aligned} U'_0 = & \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + \frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \\ & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2}{2} (u^2 + v^2) - \\ & \frac{\rho c^2 \omega^2}{2} [(\nabla u)^2 + (\nabla v)^2] \end{aligned} \quad (11)$$

将 y 模拟为时间坐标,利用变形能中的积分函数 U'_0 写出 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} L(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = & \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \dot{v} \right]^2 + \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dot{u}^2 \right]^2 + \right. \\ & \mu \dot{v}^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2}{2} (u^2 + v^2) - \\ & \left. \frac{\rho c^2 \omega^2}{2} \left[\dot{v}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dot{u}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

利用勒让德变换引入对偶变量:

$$\begin{aligned} \sigma &= \partial L / \partial \dot{v} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (2\mu + \lambda - \rho c^2 \omega^2) \dot{v} \\ \tau &= \partial L / \partial \dot{u} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} + (\mu - \rho c^2 \omega^2) \dot{u} \end{aligned} \quad (13)$$

对 $\dot{u}$ 和 $\dot{v}$ 求解得

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\mu - \rho c^2 \omega^2} \left[-\mu \frac{\partial v}{\partial x} + \tau \right] \\ \dot{v} &= \frac{1}{2\mu + \lambda - \rho c^2 \omega^2} \left[-\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \right] \end{aligned} \quad (14)$$

将位移与其对偶变量分别组成对偶向量并引入 Hamilton 密度函数:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - U_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (15)$$

式中 $\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \tau \\ \sigma \end{Bmatrix}$,相应的变分原理为

$$\begin{aligned} U_H = & \iint_V [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dV \\ & \delta(U_H + U_e) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中 U_e 是面力项。完成变分可导出协调方程式(14)与其对偶平衡方程:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \left[A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \omega^2 \right] u - B_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \dot{\sigma} &= \left[A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho \omega^2 \right] v - B_2 \frac{\partial \tau}{\partial x} \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} B_1 &= \lambda / (2\mu + \lambda - \rho c^2 \omega^2), B_2 = \mu / (\mu - \rho c^2 \omega^2) \\ A_1 &= \lambda B_1 - \lambda / B_1, A_2 = \mu B_2 - \mu / B_2 \text{ 以及相应的边界条件。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \left[B_1 \sigma - A_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right] + m \tau &= \bar{X}'_n \\ l \left[B_2 \tau - A_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right] + m \sigma &= \bar{Y}'_n \end{aligned} \quad (18)$$

从而得到矩阵形式的对偶方程:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \mathbf{v} \quad (19)$$

式中

$$\boldsymbol{v} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^H \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -B_2 \frac{\partial}{\partial x} \\ -B_1 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -\frac{B_2}{\mu} & 0 \\ 0 & -\frac{B_1}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -A_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & -A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\omega^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(19) 就是二维非局部线弹性理论的对偶方程,原非局部二维线弹性理论已转化到 Hamilton 体系下。

4 二维弹性平面波的辛算法

考虑二维弹性平面波的传播问题,假设介质是分层横关各向同性,选取 x 轴为传播方向, y 轴向下。 $y = y_0 = 0$ 是自由边界(地面),假设共有 $n + 1$ 层介质,前 n 层为有限厚度,底层为均匀半无限大空间,如图 1 所示。由于波动方程与位移 u 和 v 相关, 对应于 P-SV 波 (Compressional-Vertical Polarized Shear Waves)。

针对该问题,令:

$$u(x,y,t) = \tilde{u}(y) \cdot \exp[-i(kx - \omega t)]$$
$$v(x,y,t) = \tilde{v}(y) \cdot \exp[-i(kx - \omega t)] \quad (21)$$

将方程(12) 转化到频率 - 波数域为

$$(\boldsymbol{K}_{22} - \rho c^2 \omega^2 \boldsymbol{I}_2) \ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + (\boldsymbol{K}_{21} - \boldsymbol{K}_{12}) \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} -$$
$$(\boldsymbol{K}_{11} - \rho \omega^2 \boldsymbol{I}_2 - \rho c^2 \omega^2 k^2 \boldsymbol{I}_2) \tilde{\boldsymbol{q}} = 0 \quad (22)$$

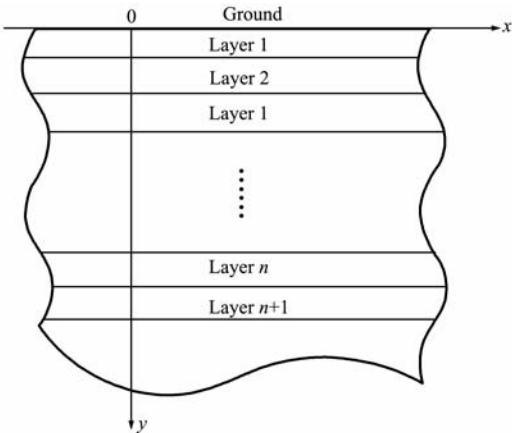


图 1 分层半弹性空间
Fig. 1 Layered half-space

式中

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{22} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{K}_{21} = \boldsymbol{K}_{12}^H = ik \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{11} = k^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

根据式(20) 写出该问题在状态空间下的对偶方程组:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{p}}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{D} \\ -\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \tilde{\boldsymbol{p}} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & ikB_2 \\ ikB_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -\frac{B_2}{\mu} & 0 \\ 0 & -\frac{B_1}{\lambda} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} k^2 A_1 + \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & k^2 A_2 + \rho\omega^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

该问题的上表面为水平自由表面,根据非局部边界条件式(18) 不能得出:

$$\tilde{\boldsymbol{p}}(0) = \boldsymbol{0} \quad (25)$$

对于该自由边界条件还要进一步转换到对应的能量矩阵形式并计算相应的本征值计数。对于多层结构还要满足分界面间的连续性条件:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}(y_r^+) = \tilde{\boldsymbol{q}}(y_r^-), \quad \tilde{\boldsymbol{p}}(y_r^+) = \tilde{\boldsymbol{p}}(y_r^-)$$
$$(r = 1, 2, \cdots n) \quad (26)$$

下面给出均匀半无限空间(底层) 波动方程的辐射边界条件。假设均匀半无限空间中的状态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}} = \bar{\boldsymbol{H}} \tilde{\boldsymbol{v}} \quad (27)$$

令 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ 分别是矩阵 $\bar{\boldsymbol{H}}$ 的特征向量和特征值矩阵, 则有

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}} = \bar{\boldsymbol{T}} \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\boldsymbol{T}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{v}} \quad (28)$$

式中 $\bar{\boldsymbol{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Lambda}}$ 按下式排序和分块:

$$\bar{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1, -\alpha_2)$$
$$\bar{\boldsymbol{T}}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{uu} & \boldsymbol{T}_{ud} \\ \boldsymbol{T}_{du} & \boldsymbol{T}_{dd} \end{bmatrix} \quad (29)$$

令 $\bar{\boldsymbol{b}} = \bar{\boldsymbol{T}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{v}}$, 则由式(28) 可以得

$$\dot{\bar{\boldsymbol{b}}} = \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\boldsymbol{b}}, \quad \bar{\boldsymbol{b}}(y) = \exp[\bar{\boldsymbol{\Lambda}}(y - y_n)] \bar{\boldsymbol{b}}(y_n)$$
$$(30)$$

式中 $\bar{\boldsymbol{b}}(y_n)$ 的分量表示向上或向下传播的波,辐射边界条件要求在均匀半无限空间没有向上传播的波,即 $\bar{\boldsymbol{b}}(y_n)$ 的前两个分量必须为零,因此有:

$$\bar{\mathbf{v}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{uu} & \mathbf{T}_{ud} \\ \mathbf{T}_{du} & \mathbf{T}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{b}}_d \end{Bmatrix}$$
$$\bar{\mathbf{q}}_n = \mathbf{T}_{ud}\bar{\mathbf{b}}_d, \quad \bar{\mathbf{p}}_n = \mathbf{T}_{dd}\bar{\mathbf{b}}_d \tag{31}$$

式中 $\bar{\mathbf{b}}_d$ 表示 $\bar{\mathbf{b}}(y_n)$ 的后 2 个元素。方程(31) 就是均匀半无限空间的辐射边界条件^[11]。

寻找满足状态方程 (23) 和边界条件 (25), (26) 和 (31) 的 Rayleigh 波是一个特征值问题, 即给定波数 k , 找出所有满足条件的特征频率 ω 。对于多层介质, 其特征值由复杂的超越方程确定, 难以准确求解。而利用精细积分算法和扩展 W-W(Wittrick-Williams) 算法就可以无遗漏、精确的找出任意层数所有特征值。关于精细积分算法与 W-W 算法的详细介绍, 可参考文献[8, 11, 12], 这里不再赘述。

算例 1 均匀半无限空间的 Rayleigh 波问题。对于半无限空间, 给定如下 lamé 常数和密度: $\lambda = 3.3 \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$, $\mu = 3.5 \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$, $\rho = 3.0 \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, 计算当波数 k 分别为 $0.0002 \text{ (m}^{-1}\text{)}$, $0.0004 \text{ (m}^{-1}\text{)}$ 和 $0.0008 \text{ (m}^{-1}\text{)}$ 时的本征值 ω 。

该问题存在经典弹性理论的分析解:

$$\left[2 - \frac{c_2^2}{c_2^2}\right]^4 = 16 \left[1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right] \left[1 - \frac{c_2^2}{c_2^2}\right] \tag{32}$$

式中

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c = \frac{\omega}{k}$$

可以用于检验本文算法的正确性。

对于均匀半无限空间, 存在且仅存在一个 Rayleigh 表面波。分别取非局部参数 $e_0ka = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ ($e_0ka = 0$ 时问题退化为经典弹性波问题)。利用精细积分和扩展的 W-W 算法进行计算, 结果表明无论波数与非局部参数如何改变, 均只存在一个本征值列入表 1。

表 1 Rayleigh 表面波特征频率计算结果

Tab. 1 The eigenvalues of Rayleigh surface wave

ω^2	$k = 0.0002$	$k = 0.0004$	$k = 0.0008$
分析解	0.39343384480	1.57373537933	6.2949415172
$e_0ka = 0$	0.39343384481	1.57373537927	6.2949415171
$e_0ka = 0.1$	0.38878278622	1.5551311449	6.2205245794
$e_0ka = 0.2$	0.37539773943	1.5015909577	6.0063638308
$e_0ka = 0.3$	0.35482802946	1.4193121179	5.6772484714
$e_0ka = 0.4$	0.32921160863	1.3168464345	5.2673857381

将表 1 中的分析解与 $e_0ka = 0$ 的结果对比可以看出: 本文所采用的算法具有很高的精度。对比不同特征长度参数 e_0ka 下的计算结果可以发现: 随着 e_0ka 增大, Rayleigh 表面波的特征频率会减小, 这与 Eringen 在文献[3] 中给出的结果具有相同的现象。

算例 2 考虑 Gutenberg 岩层模型, 该模型包括 24 层介质^[13], 表 2 列出了各层介质的基本参数, 计算当 $k = 0.00001 \text{ m}^{-1}$, $k = 0.00002 \text{ m}^{-1}$ 时的 Rayleigh 表面波。

对于这种多层模型, 其超越本征方程非常复杂, 已无分析解可对比。通过将 $e_0ka = 0$ 时的经典弹性力学解与文献[11] 给出的结果对比发现, 两者的结果几乎完全吻合, 从而验证了本文算法的正确性和精确性。不同特征参数下计算得出的特征频率见表 3。

从表 3 的结果可以发现:

(1) 各阶特征频率 ω_i^2 的大小变化与算例 1 的情况类似, 随着 e_0ka 增大, Rayleigh 表面波的各阶特征频率会有所减小。

表 2 Gutenberg 模型参数

Tab. 2 Parameters for Gutenberg model

Layer	$\lambda/10^{11} \text{ N/m}^2$	$\mu/10^{11} \text{ N/m}^2$	$\rho/10^3 \text{ kg/m}^3$	Thickness/km
1	0.33	0.35	2.74	19.0
2	0.44	0.43	3.00	19.0
3	0.80	0.72	3.32	12.0
4	0.82	0.70	3.34	10.0
5	0.82	0.69	3.35	10.0
6	0.83	0.68	3.36	10.0
7	0.85	0.67	3.37	10.0
8	0.85	0.65	3.38	10.0
9	0.83	0.64	3.39	25.0
10	0.81	0.64	3.41	25.0
11	0.83	0.65	3.43	25.0
12	0.87	0.66	3.46	25.0
13	0.92	0.67	3.48	25.0
14	0.96	0.69	3.50	25.0
15	1.02	0.72	3.53	50.0
16	1.09	0.78	3.58	50.0
17	1.14	0.85	3.62	50.0
18	1.21	0.93	3.69	50.0
19	1.33	1.03	3.82	50.0
20	1.53	1.19	4.01	100.0
21	1.67	1.39	4.21	100.0
22	1.84	1.59	4.40	100.0
23	2.07	1.76	4.56	100.0
24	2.26	1.84	4.63	semi-infinite

(2) 随着 e_0ka 的增大,存在的 Rayleigh 表面波的个数也会逐渐增多,当 e_0ka 较大时与经典弹性波的解会有很大的差异。

表 3 不同波数和特征参数下的 Rayleigh 波特征频率

Tab. 3 Eigenvalues of Rayleigh surface wave with different k and characteristic parameter

$k=0.00001\text{ m}^{-1}$	$e_0ka=0$	$e_0ka=0.2$	$e_0ka=0.4$	$e_0ka=0.6$
$\omega_1^2\times10^{-3}$	1.773298	1.685128	1.461298	1.186478
$\omega_2^2\times10^{-3}$	3.234059	3.074555	2.670080	2.172848
$\omega_3^2\times10^{-3}$	3.972144	3.802508	3.321242	2.667110
$k=0.00002\text{ m}^{-1}$	$e_0ka=0$	$e_0ka=0.2$	$e_0ka=0.4$	$e_0ka=0.6$
$\omega_1^2\times10^{-3}$	6.373670	6.074217	5.309584	4.359953
$\omega_2^2\times10^{-3}$	9.970995	9.514390	8.357018	6.931981
$\omega_3^2\times10^{-3}$	12.43949	11.82020	10.25468	8.335818
$\omega_4^2\times10^{-3}$	14.59015	13.82905	11.89105	9.507213
$\omega_5^2\times10^{-3}$	—	15.25981	13.27767	10.52613
$\omega_6^2\times10^{-3}$	—	—	—	11.32272

5 结 论

利用变分原理将积分形式的二维非局部线弹性本构方程的导入到 Hamilton 体系下,推导了其相应的对偶方程和边界条件。利用该对偶方程,并结合辛几何算法成功地求解了二维非局部线弹性平面 Rayleigh 波的传播问题。精细积分与扩展的 W-W 算法相结合给出了精度令人满意的结果。该套方法不仅具有很高的精度,而且可以用于计算任意层数复杂结构的任意指定阶次的特征频率,因而具有极高的适用性;由于利用了子结构法与本征值计数,该算法的计算效率并不会因模型的复杂而降低。通过不同算例的分析计算再次证明了 Hamilton 体系和辛几何算法的优势,也为非局部线弹性理论在 Hamilton 体系下的分析求解奠定了一定的理论基础。

参考文献 (References):

[1] ERINGEN A C. *Nonlocal Continuum Field Theories* [M]. New York: Springer, 2002.

[2] WANG Y S. Nonlocal elastic analogy for wave propagation in periodic layered composites[J]. *Mechanics Research Communications*, 1999,**26**(6):719-723.

[3] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and sur-

face waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983,**54**(9):4703-4710.

[4] 郑长良. 非局部弹性直杆振动特征及 Eringen 常数的一个上限[J]. *力学学报*, 2005,**37**(6):796-798. (ZHENG Chang-liang. The free vibration characteristics of nonlocal continuum bar and an upper bound of material constant in Eringen's nonlocal model[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005,**37**(6):796-798. (in Chinese))

[5] BURHANETTIN S A, GHATU S. A nonlocal formulation based on a novel averaging scheme applicable to nanostructured materials[J]. *Mechanics of Materials*, 2003,**35**(3-6):281-294.

[6] GANGHOFFER J F, BORST R de, A new framework in nonlocal mechanics[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2000,**38**(4):453-486.

[7] REDDY J N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007,**45**(2-8):288-307.

[8] ZHONG W X. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control* [M]. New York: Kluwer, 2004.

[9] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

[10] 冯 康, 秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2004. (FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithm for Hamiltonian Systems* [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2004. (in Chinese))

[11] 高 强. 哈密顿体系中波的传播、鲁棒控制与辛方法探索[D]. 大连理工大学, 2006. (GAO Qiang. Wave propagateion, Robust Control and Symplectic Method in Hamilton [D]. Dalian Universiy of Technology, 2006. (in Chinese))

[12] GAO Q, LIN J H ZHONG W X, HOWSON W P. The precise method for Rayleigh waves in stratified solids[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006,**67**(6):771-786.

[13] AKI K, RICHARDS P G. *Quantitative Seismology* [M]. San Francisco: W H Freeman and Company, 1980.

Symplectic analysis for two dimensional nonlocal linear elastic plane problems

YAO Zheng^{*}, ZHENG Chang-liang

(School of Transportation and Logistics Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

Abstract: The two dimensional nonlocal linear elastic theory is derived to the Hamilton system, the corresponding dual equilibrium equations and boundary conditions are presented from the variational principle. After the validity of the dual equations is confirmed; this methodology is applied in solving the 2D linear elastic plane-wave problems. The symplectic algorithm, consists of precise integration method and external Wittrick-Williams algorithm, for solving the plane Rayleigh waves is presented under the Hamilton system. The symplectic conservation characteristic insures the accuracy of the nonlocal symplectic theory and corresponding algorithm. The analysis and comparison between nonlocal theory and classical local theory are given out based on different numerical examples. The advantages and applicability of the nonlocal symplectic methodology are also presented.

Key words: nonlocal; Hamilton theory; variation; elastic wave; precise integration method

(上接第 378 页)

Control on nonlinear seismic response of cable-stayed bridge using SMA damper based on OpenSees

LI Hui^{*1}, LIU Jin-long¹, MA He¹, OU Jin-ping^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China;

2. School of Civil Engineering and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Shape memory alloys (SMA) are materials with recoverable property. The software of stress-strain relationship of SMA is written and added into material library in OpenSees. A SMA damper with special configuration, which guarantees the SMA wires in damper being elongation regardless of motion direction, is proposed and incorporated into the bridge between the deck and tower. A parametric analysis of seismic response of the bridge with SMA damper under near-fault earthquake ground motion is conducted. Furthermore, the seismic response and failure modes of the cable-stayed bridge with three kinds of connecting configurations are investigated and compared with each other. The effects of SMA damper on the reduction of maximum seismic response and the control of residual deformation are verified.

Key words: SMA damper; OpenSees; cable-stayed bridge; seismic; residual deformation