

非线性随机动力系统的概率密度演化分析

陈建兵^{*1}, 刘章军^{1,2}, 李 杰¹

(1. 同济大学 土木工程学院 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092;

2. 三峡大学 土木水电学院, 宜昌 443002)

摘 要:阐述了基于概率密度演化理论进行多自由度结构非线性随机动力反应分析的基本思想。采用随机过程的正交分解或物理系统建模的思想,实现随机激励的随机函数表述。对由此获得的随机状态方程采用概率密度演化理论求解,可以获得随机动力系统反应的概率密度函数及其演化。以某剪切型框架结构的非线性随机地震反应分析为例,说明了所发展方法的可行性和有效性。

关键词:随机动力系统;非线性;概率密度演化;概率守恒;正交分解

中图分类号:O313.7 **文献标识码:**A

1 引 言

工程结构在地震、强风和巨浪等具有强烈随机性的灾害性荷载作用下往往会不可避免地进入非线性状态。要准确地把握大型复杂结构在这些荷载作用下的反应性态,需要进行非线性系统的随机反应分析。经过近 50 年的发展,随机振动已经取得了丰硕的成果^[1,2],对线性系统的随机振动分析取得了长足的进步^[3,4]。然而,在多自由度非线性体系的随机振动分析问题上,经典随机振动理论遇到了巨大的困难^[5]。20 世纪 90 年代中期以来发展起来的 Hamilton 理论体系,对白噪声或滤过白噪声激励的情况,获得了几大类多自由度非线性系统的精确平稳解^[6]。然而,对更一般激励下多自由度非线性系统非平稳反应的分析,则仍然付之阙如。

近年来发展的概率密度演化理论^[7-9],从状态空间描述和随机事件描述的不同角度理清了概率守恒原理的物理意义,结合对随机动力系统方程的 Euler 描述和 Lagrange 描述,分别导出了经典的概率密度演化方程,如 Liouville 方程、FPK 方程和 Dostupov-Pugachev 方程。不仅如此,结合概率

守恒原理的随机事件描述和任意维 Lagrange 描述,获得了广义密度演化方程,从而使得多自由度非线性随机结构的随机反应分析与可靠度分析成为可能^[10,11]。事实上,引用对随机激励的正交分解或物理随机过程模型^[12,13],具有随机激励的非线性系统,可转化为一类不同于 Ito 随机微分方程的随机状态方程,进而,通过求解广义密度演化方程即可获得该非线性系统随机反应的概率密度函数及其演化。本文即利用这一基本思想进行非线性随机动力系统的概率密度演化分析。以某 10 层剪切型框架结构为例,说明了所发展方法的有效性和可行性。

2 两类随机状态方程

不失一般性,多自由度结构体系的动力方程为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + f(X) = F(t) \quad (1)$$

式中 M 和 C 分别为 $n \times n$ 质量与阻尼矩阵, $f(\cdot)$ 为 n 维恢复力向量; $\ddot{X}$, $\dot{X}$ 和 X 分别为 n 维加速度、速度和位移向量, $F(t)$ 为外部激励向量。若 $f(X) = KX$, 这里 K 为 $n \times n$ 刚度矩阵, 则式(1)为线性系统, 否则为非线性系统。若激励 $F(t)$ 是随机过程或随机过程向量, 例如在地震或强风的情况下, 方程(1)是一个随机振动问题。为明确本文以地震激励为例, 此时 $F(t) = -MI\ddot{x}_g(t)$, 方程(1)变为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + f(X) = -MI\ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

式中 I 为全部元素为 1 的 n 维列向量, $\ddot{x}_g(t)$ 为地震加速度过程; $\ddot{X}$, $\dot{X}$ 和 X 分别为相对加速度、相对

收稿日期:2008-08-28;修改稿收到日期:2008-10-23.

基金项目:国家自然科学基金创新研究群体科学基金(50621062)和教育部新世纪优秀人才支持计划联合资助项目。

作者简介:陈建兵^{*}(1975-),男,博士,副教授

(E-mail: chenjb@tongji.edu.cn)

李 杰(1957-),男,特聘教授,博士生导师。

速度和相对位移。

引入状态向量 $\mathbf{Y} = (\dot{\mathbf{X}}^T, \mathbf{X}^T)^T$, 方程(1)可转化为状态方程的形式:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(t) \tag{3}$$

式中

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}, t) = \begin{Bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}) \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

对上述方程中随机激励的不同处理,导致了不同的分析思路。

2.1 Itô 随机微分方程与 FPK 方程

若假定 $\mathbf{F}(t)$ 为白噪声过程,则微分方程(3)可理解为 Itô 随机微分方程^[14]:

$$d\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, t)dt + \mathbf{B}d\mathbf{W}(t) \tag{5}$$

式中,在形式上可认为 $d\mathbf{W}(t) = \mathbf{F}(t)dt$, 其中 $\mathbf{W}(t)$ 为 n 维 Wiener 过程,且 $E[d\mathbf{W}(t)] = \mathbf{0}, E[d\mathbf{W}(t)d\mathbf{W}^T(t)] = \mathbf{D}dt, \mathbf{D}$ 为正定对称矩阵。

在此情况下,记 $\mathbf{Y}(t)$ 的联合概率密度函数为 $p_Y(\mathbf{y}, t)$, 经过一系列推导可得著名的 FPK 方程

$$\frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) a_i(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial [p_Y(\mathbf{y}, t) \sigma_{ij}(\mathbf{y}, t)]}{\partial y_i \partial y_j} \tag{6}$$

式中 σ_{ij} 是扩散矩阵 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{BDB}^T$ 。

这是一类概率密度演化方程。顺便指出,从概率守恒原理的状态空间描述出发,亦可导出上述方程并获得关于 FPK 方程物理意义的进一步认识^[9]。

上述 FPK 方程是 $2n$ 维偏微分方程,对多自由度非线性体系问题,无论是解析求解还是数值求解,均极为困难^[2,5]。上个世纪 90 年代中期发展起来的 Hamilton 理论体系在求解多自由度非线性体系平稳解方面获得了重大的突破^[6]。但对于工程实践,例如地震反应分析中往往更为关心的非平稳解问题,仍然束手无策。

2.2 随机过程的正交分解与随机状态方程

对于相关结构已知的随机过程或随机场,可以采用相关结构分解将其表达为一系列确定性函数的随机组合^[15]。例如,采用 Karhunen-Loeve 分解^[16],若某随机过程 $X(t)$ 的相关函数为 $K_X(t_1, t_2)$, 则 $X(t)$ 可分解为

$$X(t) \doteq X_0(t) + \sum_{j=1}^s \zeta_j / \sqrt{\lambda_j} f_j(t) \tag{7}$$

式中 $X_0(t)$ 为均值过程, $\zeta_j (j = 1, 2, \dots, s)$ 为不相关随机变量,即 $E[\zeta_k \zeta_l] = \delta_{kl}$, ζ_j 和 $f_j(t)$ 分别为满足下式的本征值和本征函数:

$$\int_T K_X(t_1, t_2) f_j(t_1) dt_1 = \lambda_j f_j(t_2) \tag{8}$$

与 Itô 随机微分方程只能处理白噪声激励不同,上述分解可以适用于非平稳过程。但在一般情况下,为了较好地逼近原随机过程,式(7)所需的项数往往需要达到数百,这给实际处理带来了较大的困难。研究表明,采用一类 Hartley 正交基函数并应用能量等效原理可以使得所需的项数大为减少^[12]。例如,对地震动过程 $X_g(t)$, 有

$$X_g(\zeta, t) = \sum_{j=1}^s \zeta_j / \sqrt{\lambda_j} f_j(t) \tag{9}$$

式中

$$f_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{j,k+1} \varphi_k(t) \tag{10}$$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{cas}\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{11}$$

式中 $\varphi_k(t)$ 是 Hartley 正交基函数, $\text{cas}(t) = \sin(t) + \cos(t)$ 。

而地震动加速度过程则可以进一步表达为

$$\ddot{X}_g(\zeta, t) = \sum_{j=1}^s \zeta_j / \sqrt{\lambda_j} F_j(t) \tag{12}$$

式中

$$F_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \phi_{j,k+1} \ddot{\varphi}_k(t) \tag{13}$$

式中 α_{k+1} 为能量等效确定的调制系数。

采用上述 Karhunen-Loeve 分解式(7)或基于 Hartley 函数的正交分解式(12), 方程(2)可转化为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{f}(\mathbf{X}) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_g(\zeta, t) \tag{14}$$

进而,若记 $\boldsymbol{\Theta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s)$, 上式可改写为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\Theta}, t) \tag{15}$$

此即为与一般随机函数激励相应的随机状态方程。

顺便指出,对地震和风速激励过程,采用基于物理的随机建模方法^[13,17],亦可实现由随机函数描述的随机状态方程。

3 广义密度演化方程及其求解思路

3.1 广义密度演化方程

对适定的微分方程(14)或(15),在给定的初始条件下,其解答存在、唯一且依赖于随机参数 $\boldsymbol{\Theta}$,

不妨记为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_X(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \boldsymbol{\Theta}, t) \quad (16)$$

类似地,可记其速度为

$$\dot{\mathbf{X}} = h_X(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \boldsymbol{\Theta}, t) \quad (17)$$

式中 $\mathbf{x}_0$ 和 $\dot{\mathbf{x}}_0$ 分别为 $\mathbf{X}$ 和 $\dot{\mathbf{X}}$ 的初始值向量,当为确定性初始值时,为简单计,在后续公式中将其略去。

考察系统(1)中任意感兴趣的物理量 $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$,例如结构内某点的应力、应变或某截面的内力或变形等。一般地,这些物理量总可以通过速度与位移来确定,即

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathcal{G}[\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)], \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \quad (18)$$

将式(16)、式(17)带入,有

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathcal{G}[\mathbf{H}_X(\boldsymbol{\Theta}, t), h_X(\boldsymbol{\Theta}, t)] = \mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}, t) \quad (19)$$

显然,从式(19)可知,在增广系统 $(\mathbf{Z}(t), \boldsymbol{\Theta})$ 中,所有的随机因素均来自 $\boldsymbol{\Theta}$,因此,在演化过程中该系统概率守恒。从而,对于任意随机事件 $\{(\mathbf{Z}(t_0), \boldsymbol{\Theta}) \in \Omega_0 \times \Omega_\theta\}$,这里 Ω_0 为 $\mathbf{Z}$ 的初始取值空间中任意区域, Ω_θ 为 $\boldsymbol{\Theta}$ 空间中的任意区域。若 t 时刻 Ω_0 对应的区域为 Ω_t ,则该随机事件的概率测度不变,从而

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t \times \Omega_\theta} p_{Z\theta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, t) d\mathbf{z} d\boldsymbol{\theta} = 0 \quad (20)$$

式中 D/Dt 表示全导数,注意在上式中积分区域也是时变的, $p_{Z\theta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, t)$ 为 $(\mathbf{Z}(t), \boldsymbol{\Theta})$ 的联合概率密度函数。该式即为概率守恒原理的随机事件描述的体现^[8]。

由 Reynold 转换定理,并结合式(19),经一系列变换可得广义密度演化方程:

$$\frac{\partial p_{Z\theta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{Z}_j(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{Z\theta}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z_j} = 0 \quad (21)$$

广义密度演化方程是一类不同于 FPK 方程、Liouville 方程和 Dostupov-Pugachev 方程等经典概率密度演化方程的新方程。在上述经典概率密度演化方程中,所有的状态量是不可分离地耦合在一起的,因而这些方程均是与随机微分方程维数一致的高维偏微分方程。与此形成鲜明对照的是,广义密度演化方程的维数 m 取决于所需要的维数,即随机微分方程(18)的维数,而不是原随机系统的维数,它们是完全独立的。因此,广义密度演化方程可以是任意维的。特别地,由于对随机系统不同物

理量的关心往往可以转化为依次对单个物理量的关心,即 $m = 1$,广义密度演化方程(21)退化为如下的一维方程:

$$\frac{\partial p_{Z\theta}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{Z\theta}(z, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

换言之,对任意多维复杂随机动力系统,总可以获得一维的广义密度演化方程。式(22)的初始条件:

$$p_{Z\theta}(z, \boldsymbol{\theta}, t_0) = \delta(z - z_0) p_\theta(\boldsymbol{\theta}) \quad (23)$$

式中 z_0 为初始值。

求解式(22)、式(23)获得 $p_{Z\theta}(z, \boldsymbol{\theta}, t)$ 之后,即可进一步获得 $Z(t)$ 的概率密度函数 $p_Z(z, t)$:

$$p_Z(z, t) = \int_{\Omega_\theta} p_{Z\theta}(z, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \quad (24)$$

3.2 概率密度演化理论的求解思路

采用概率密度演化理论求解的核心是在初始条件下求解广义密度演化方程(22),然后进一步通过式(24)获得概率密度函数。式(22)是一个一阶线性偏微分方程,理论上可以采用特征线方法求解获得解析解答,但在实际问题中,由于非线性问题解答的显式表达难以获得,仅对一些特殊简单的问题可行。对于一般的复杂非线性系统,往往需要采用合适的数值求解方法。

为了求解偏微分方程(22),需要首先知道该方程的系数 $\dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t)$ 。幸运的是,在该方程中,没有关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的偏微分,这意味着,对于一个特定的 $\boldsymbol{\theta}$,方程(22)可以采用常规的确定性微分方程数值解方法求解。为此,需要首先将 $\boldsymbol{\theta}$ 离散化,即在 $\boldsymbol{\theta}$ 的分布空间中取得一系列的离散代表点。一旦这些离散代表点确定之后,即可通过对系统(1)和式(19)进行确定性分析获得物理量的速度过程 $\dot{Z}(\boldsymbol{\theta}, t)$ 。进而,将其代入广义密度演化方程(22)即可求解获得联合概率密度函数,并在此基础上利用式(24)获得该物理量的概率密度函数。

根据上述分析,概率密度演化理论数值求解的基本步骤如下:

(1) 在 $\boldsymbol{\theta}$ 的分布空间中取得一系列离散代表点,记之为 $\boldsymbol{\theta}_q (q = 1, 2, \dots, n_{\text{sel}})$,相应的赋得概率为 $P_q (q = 1, 2, \dots, n_{\text{sel}})$ 这里 n_{sel} 是所选的离散代表点数。

(2) 对于给定的 $\boldsymbol{\theta}_q$,代入动力系统方程(1)和

物理方程(19),获得该物理量的速度时程 $\dot{Z}(\boldsymbol{\theta}_q,t)$ 。

(3) 对于给定的 $\boldsymbol{\theta}_q$,分别求解广义密度演化方程(22)的半离散化方程:

$$\frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z,\boldsymbol{\theta}_q,t)}{\partial t} + \dot{Z}(\boldsymbol{\theta}_q,t) \frac{\partial p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z,\boldsymbol{\theta}_q,t)}{\partial z} = 0$$
$$q = 1,2,\dots,n_{\text{sel}} \quad (25)$$

其初始条件式(23)可半离散化为

$$p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z,\boldsymbol{\theta}_q,t_0) = \delta(z-z_0)P_q$$
$$q = 1,2,\dots,n_{\text{sel}} \quad (26)$$

(4) 获得所需物理量的概率密度函数:

$$p_Z(z,t) = \sum_{q=1}^{n_{\text{sel}}} p_{Z\boldsymbol{\theta}}(z,\boldsymbol{\theta}_q,t)$$
$$(27)$$

上述步骤(1)可以采用基于概率空间剖分的两步选点法,即首先获得一个在 $\boldsymbol{\theta}$ 分布空间均匀散布的点集,然后根据 $\boldsymbol{\theta}$ 概率分布特性对此点集进行变换,获得 F -偏差及一阶和二阶偏差均较小的点集作为最终的离散代表点集^[18]。步骤(2)是常规的确定性非线性动力反应分析问题。步骤(3)可采用具有 TVD 性质的差分格式求解。

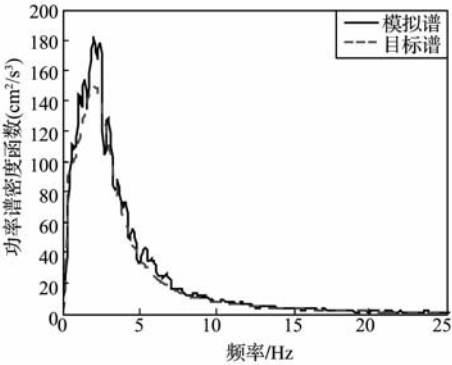


图 1 生成地震功率谱与目标功率谱比较
Fig. 1 The target power spectrum and the power spectrum of the generated ground motion

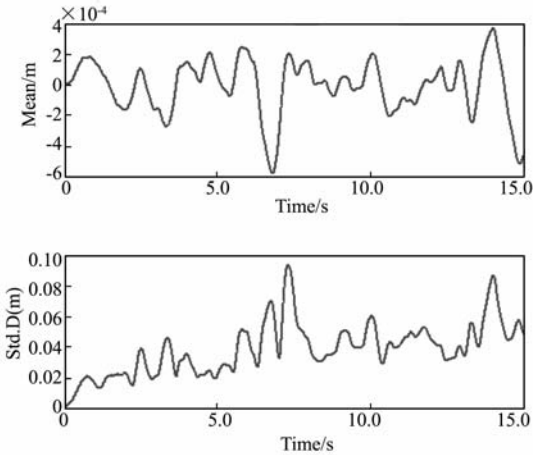


图 3 随机地震反应均值与标准差
Fig. 3 Mean and standard deviation of the stochastic seismic response

4 分析实例

考察一个 10 层层间剪切型框架结构。各层质量从下至上依次为 $(1.2,1.2,1.2,1.3,1.1,1.1,1.0,1.1,1.1,0.5) \times 10^5$ kg,两跨三柱,柱截面尺寸为 $400\text{ mm} \times 400\text{ mm}$,混凝土初始弹性模量 $1 \sim 4$ 层为 3.25×10^{10} Pa, $5 \sim 8$ 层为 3.0×10^{10} Pa, $9 \sim 10$ 层为 2.8×10^{10} Pa,假定为 Rayleigh 阻尼,层间恢复力曲线采用 Bouc-Wen 模型描述^[19,20]。

采用随机过程的正交分解,获得了含有 10 个随机变量的地震随机模型。根据基于概率空间剖分的两步选点法,选取 570 个离散代表点生成 570 条代表性地震动加速度时程。图 1 是生成的地震功率谱与目标功率谱的比较,可见,在总体上,生成的地震动符合目标功率谱要求^[21]。图 2 所示是其中一条典型地震动输入时的实际恢复力-层间位移曲线。可见,在地震动作用下,结构已经进入了严重的非线性阶段。采用经典随机振动方法是难以获得这一多自由度结构非线性随机地震反应解答的。

图 3 所示是顶层位移随机地震反应均值和标准差。从中可见,均值反应较之标准差反应小两个

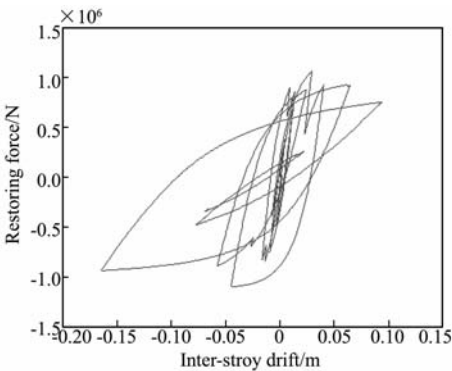


图 2 典型恢复力曲线
Fig. 2 Typical restoring force curve

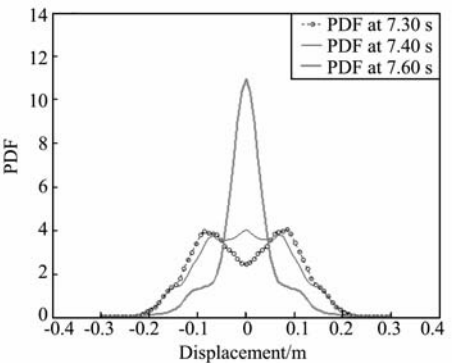


图 4 随机地震反应典型时刻的概率密度函数
Fig. 4 PDFs at typical time instants

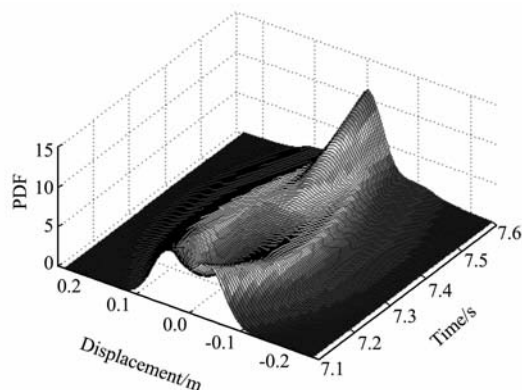


图 5 随机地震反应的概率密度函数演化曲面

Fig. 5 PDF evolution surface of stochastic seismic response

数量级,因此,随机地震反应可以认为是零均值反应。图 4 所示是典型时刻随机地震反应的概率密度函数。对此结构,由于对称性,其地震反应的概率密度函数亦具有对称性,这是合理的。图 5 所示是[7.1, 7.6]秒期间概率密度函数随着时间演化的情况,从中可以清晰看到概率密度在不同时刻的不同分布和演化,有时似山脊,有时又似盆地,而概率密度函数则有时是单峰,有时是双峰乃至多峰分布,这一现象,值得进一步深入研究^[22]。

5 结 论

对激励随机性的不同处理导致了非线性随机动力系统研究的不同思路。从以随机函数表述的随机状态方程出发,基于概率守恒原理,阐述了非线性随机动力系统分析的密度演化理论的基本思路。以 10 层剪切型框架结构的随机地震反应分析为例,说明了本文方法的合理性和可行性。

参考文献(References):

- [1] LIN Y K, CAI G Q. *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications* [M]. McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
- [2] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京:科学出版社,1998. (ZHU Wei-qiu. *Random Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese))
- [3] LUTES L D, SARKANI S. *Random Vibrations: Analysis of Structural and Mechanical Systems* [M]. Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [4] 林家浩,张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京:科学出版社,2004. (LIN Jian-hao, ZHANG Ya-hui. *Pseudo-Excitation Method in Random Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [5] SCHÜLLER G I (Ed.). A state-of-the-art report

- on computational stochastic mechanics[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1997, **12**(4):197-321.
- [6] ZHU W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2006, **59**:230-248.
- [7] 李 杰,陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化方法[J]. 力学学报, 2003, **35**(6):716-722. (LI Jie, CHEN Jian-bing. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(6):716-722. (in Chinese))
- [8] LI J, CHEN J B. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation [J]. *Structural Safety*, 2008, **30**:65-77.
- [9] CHEN J B, LI J. A note on the principle of preservation of probability and probability density evolution equation[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, **24**(1):27-42.
- [10] CHEN J B, LI J. Dynamic response and reliability analysis of nonlinear stochastic structures[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, **20**(1):33-44.
- [11] LI J, CHEN J B, FAN W L. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. *Structural Safety*, 2007, **29**:112-131.
- [12] 李 杰,刘章军. 基于标准正交基的随机过程展开法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2006, **34**(10):1279-1283. (LI Jie, LIU Zhang-jun. Decomposition of stochastic processes based on standard orthogonal basis[J]. *Journal of Tongji University*, 2006, **34**(10):1279-1283. (in Chinese))
- [13] 李 杰,艾晓秋. 基于物理的随机地震动模型研究[J]. 地震工程与工程振动, 2006, **26**(5):21-26. (LI Jie, AI Xiao-qiu. Study on random model of earthquake ground motion based on physical process[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2006, **26**(5):21-26. (in Chinese))
- [14] GARDINER C W. *Handbook of Stochastic Methods for Physics* (2nd Ed.) [M]. Chemistry and the Natural Sciences. Springer, Berlin, 1983.
- [15] 李 杰. 随机结构系统——分析与建模[M]. 北京:科学出版社,1996. (LI Jie. *Stochastic Structural System: Analysis and Modeling* [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese))
- [16] LOEVE M. *Probability Theory* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [17] ZHANG L L, LI J, PENG Y B. Dynamic response

and reliability analysis of tall buildings subject to wind-loading[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2008,**96**:25-40.

[18] CHEN J B, GHANEM R, LI J. Partition of the probability-assigned space in probability density evolution analysis of nonlinear stochastic structures[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009,**24**(1): 51-59.

[19] WEN Y K. Method for random vibration of hysteretic systems[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976,**102**(2):249-263.

[20] BABER T T, NOORI M N. Random vibration of degrading, pinching systems[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985,**111**(8):1010-1027.

[21] 李杰. 工程结构随机动力激励的物理模型. 随机振动理论与应用新进展[C]. 上海: 同济大学出版社, 2009. (LI Jie. Physical stochastic models for the dynamic excitations of engineering structures. Advances in Theory and Applications of Random Vibration[C]. Shanghai: Tongji University Press, 2009. (in Chinese))

[22] LI J, CHEN J B. *Stochastic Dynamics of Structures* [M]. John Wiley & Sons, 2009.

Probability density evolution analysis of nonlinear dynamical systems

CHEN Jian-bing^{*1}, LIU Zhang-jun^{1,2}, LI Jie¹

- (1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. School of Civil & Hydroelectric Engineering, Three-Gorge University, Yichang 443002, China)

Abstract: The basic idea of stochastic response analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear structures is outlined. Employing the orthogonal decomposition or physical modeling, the stochastic excitation can be represented by random combination of a set of deterministic functions. The probability density evolution theory can then be applied to the resulted stochastic dynamical system and the instantaneous probability density function and its evolution can thus be obtained. Stochastic response analysis of a shear frame subjected to random ground motions is exemplified, showing the feasibility and validity of the proposed method.

Key words: Stochastic dynamical system; nonlinear; probability density evolution; principle of preservation of probability; orthogonal decomposition