

随机结构动力特性分析格林函数法

苏 成*, 范学明

(华南理工大学 土木与交通学院 亚热带建筑科学国家重点实验室, 广州 510640)

摘 要:在考虑材料参数和几何参数小变异情况下,采用一阶近似方法将随机杆件动力特性分析的控制微分方程分解为关于动力特性均量和偏量的两组控制微分方程,然后利用这两组方程在形式上与静力问题控制微分方程的相似性,采用静力问题基本解以及域外布设虚荷载方法和多域耦合技术,提出了随机结构动力特性分析格林函数法。从数值算例可以看出,在小变异情况下,本文方法的结果与 Monte-Carlo 法的结果相当吻合,计算精度较高;在计算效率方面,本文方法的计算量远少于摄动随机有限元法的计算量。

关键词:随机结构;随机振动;动力特性;格林函数法

中图分类号:O313 **文献标识码:**A

1 引 言

结构动力特性是结构振动的固有属性,是结构动力分析的基础。目前结构动力特性的研究一般限于具有确定参数的结构问题。由于在材料特性和构件制造等方面难免存在误差,使结构的材料参数和几何参数具有不确定性,因此结构动力特性也具有不确定性。研究结构参数随机性对结构动力特性的影响,对结构设计与分析、结构损伤识别、结构抗风及抗震研究等具有重要意义。

在具有随机参数结构的动力特性分析中, Monte-Carlo 有限元法是一种统计型方法,其原理简单,但计算量大、耗时多,对大型复杂随机结构动力特性分析无能为力。摄动随机有限元法是一种非统计型方法,它将确定性有限元法和摄动法及随机场理论结合起来,已成功应用于桥梁结构固有频率统计分析^[1]以及动力特性对结构参数的灵敏度分析^[2]。但在摄动随机有限元法中同时存在两套网格,即有限元网格和随机场网格,这使得问题变得较为复杂。当采用空间离散法离散随机场时,要求有限元必须嵌于随机场单元中,即一个随机场单元要包括一至几个有限元,因此随机有限元法存在确定性有限元法因全域剖分而带来的固有缺点,同

时还进一步加大其计算工作量。为了提高随机有限元法的计算效率,对随机场的离散提出了较高的要求,例如要采用局部平均法、形函数法等随机场离散方法^[3-5],但计算工作量仍相当可观。为此,有必要发展新的非统计型随机分析方法。

在确定性结构静力问题格林函数法中,由于利用了问题的基本解,因此域内控制微分方程可以得到满足,域内并不需要对待求物理场进行剖分,只要对边界条件和交界条件进行处理即可得到问题的解答^[6]。这为该法推广应用于随机结构问题的分析带来极大的好处。在随机结构问题中,可以独立地对杆件内随机场进行离散,而结构仍以杆件为单元进行划分,因此不存在摄动随机有限元法中有限元网格跟随随机场网格进行划分的情况,从而避免了计算工作量随着随机场的细分而大幅增加的问题。文献^[7,8]成功地采用格林函数法对随机结构静力问题进行了分析,并应用于斜拉桥施工控制可靠度分析中。

在上述工作基础上,本文进一步提出了随机结构动力特性分析格林函数法,将格林函数法拓展到随机结构动力特性分析领域,也为具有随机参数结构的动力特性分析提供一种效率更高的随机分析方法。

2 随机动力特性分析的控制微分方程

杆件动力特性分析的控制微分方程为

收稿日期:2008-08-28;修改稿收到日期:2008-10-23.

基金项目:国家科技支撑计划子课题(2006BAJ01B07);华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室资助课题(20082CZ1)资助项目.

作者简介:苏 成*(1968-),男,博士,教授

(E-mail: cvchsu@scut.edu.cn).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} [E(x)A(x) \frac{dU(x)}{dx}] &= -\lambda m(x)U(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} [E(x)I(x) \frac{d^2V(x)}{dx^2}] &= \lambda m(x)V(x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 x 为杆件轴向坐标, $E(x)$ 、 $A(x)$ 和 $I(x)$ 分别为杆件的弹性模量、截面面积和惯性矩, $m(x)$ 为杆件的线密度, $U(x)$ 和 $V(x)$ 分别为杆件的轴向位移振型和横向位移振型, 动力特征值 $\lambda = \omega^2$, ω 为自振圆频率。

考虑 $E(x)$ 、 $A(x)$ 、 $I(x)$ 和 $m(x)$ 的变异性, 将它们看成随机场并写成均量与偏量和的形式为

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= E_E + \delta E(x), \quad A(x) = A_E + \delta A(x) \\ I(x) &= I_E + \delta I(x), \quad m(x) = m_E(x) + \delta m(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中下标 E (表示数学期望) 的量为均量, $\delta(\cdot)$ 为偏量, 是零均值随机场。相应地, 位移振型和内力振型也为随机场, 动力特征值 λ 为随机变量, 它们也可以写成均量与偏量和的形式为

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_E(x) + \delta U(x), \quad V(x) = V_E(x) + \delta V(x) \\ \theta(x) &= \theta_E(x) + \delta \theta(x), \quad N(x) = N_E(x) + \delta N(x) \\ Q(x) &= Q_E(x) + \delta Q(x), \quad M(x) = M_E(x) + \delta M(x) \\ \lambda &= \lambda_E + \delta \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $\theta(x)$ 、 $N(x)$ 、 $Q(x)$ 和 $M(x)$ 分别表示杆件的转角振型、轴力振型、剪力振型和弯矩振型。

将式(2)和式(3)的前两式代入式(1), 略去二阶以上微量 (小变异情况下) 后, 对式两边取数学期望得

$$\left. \begin{aligned} E_E A_E \frac{d^2 U_E(x)}{dx^2} &= -\lambda_E m_E(x) U_E(x) \\ E_E I_E \frac{d^4 V_E(x)}{dx^4} &= \lambda_E m_E(x) V_E(x) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将式(4)代回前述略去二阶以上微量的式子得

$$\left. \begin{aligned} E_E A_E \frac{d^2 \delta U(x)}{dx^2} &= -\delta \lambda m_E(x) U_E(x) - \\ &\lambda_E \delta m(x) U_E(x) - \lambda_E m_E(x) \delta U(x) - \\ &\frac{d}{dx} [\delta E(x) A_E \frac{dU_E(x)}{dx} + E_E \delta A(x) \frac{dU_E(x)}{dx}] \\ E_E I_E \frac{d^4 \delta V(x)}{dx^4} &= \delta \lambda m_E(x) V_E(x) + \\ &\lambda_E \delta m(x) V_E(x) + \lambda_E m_E(x) \delta V(x) - \\ &\frac{d^2}{dx^2} [\delta E(x) I_E \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2} + E_E \delta I(x) \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2}] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)和式(5)分别为随机杆件动力特性分析中关于均量的控制微分方程和关于偏量的控制微分方程。显然, 如果将式(4)和式(5)的等号右端项看作等效荷载, 那么式(4)和式(5)在形式上与均质等截面杆件静力问题的控制微分方程是一致的, 进而可以采用静力问题的基本解进行求解, 只需将基本解中的材料参数和几何参数应分别取为均量参数 E_E 、 A_E 和 I_E 。

3 随机内力振型与位移振型的微分关系

杆件内力振型与位移振型的微分关系为

$$\left. \begin{aligned} N(x) &= E(x)A(x) \frac{dU(x)}{dx} \\ Q(x) &= \frac{d}{dx} [E(x)I(x) \frac{d^2V(x)}{dx^2}] \\ M(x) &= E(x)I(x) \frac{d^2V(x)}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(2)和式(3)相关式子代入式(6), 并按式(1)的分解方法处理后可得杆件内力振型的均量和偏量分别为

$$\left. \begin{aligned} N_E(x) &= E_E A_E \frac{dU_E(x)}{dx} \\ Q_E(x) &= E_E I_E \frac{d^3 V_E(x)}{dx^3} \\ M_E(x) &= E_E I_E \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta N(x) &= E_E A_E \frac{d\delta U(x)}{dx} + \\ &[\delta E(x) A_E \frac{dU_E(x)}{dx} + E_E \delta A(x) \frac{dU_E(x)}{dx}] \\ \delta Q(x) &= E_E I_E \frac{d^3 \delta V(x)}{dx^3} + \\ &\left\{ \frac{d}{dx} [\delta E(x) I_E \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2} + E_E \delta I(x) \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2}] \right\} \\ \delta M(x) &= E_E I_E \frac{d^2 \delta V(x)}{dx^2} + \\ &[\delta E(x) I_E \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2} + E_E \delta I(x) \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2}] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可见, 在随机动力特性分析中, 内力振型均量与位移振型均量之间的微分关系在形式上与静力问题相同, 但内力振型偏量与位移振型偏量之间的微分关系在形式上与静力问题的不完全一致, 等式右边括号内的部分可视为修正

项。

4 随机结构动力特性分析的均量解答

先进行单元分析。设图 1 所示杆件单元 ab 为结构中的一根杆件, x - y 为该单元的局部坐标系, 其杆端坐标为 x_a 和 x_b 。该单元的控制微分方程为式(4), 弹性模量为 E_E , 截面面积为 A_E , 截面惯性矩为 I_E , 在杆件域内作用的等效分布荷载 $F_E^i(x)$ ($i = 1, 2$) 为

$$\left. \begin{aligned} F_E^1(x) &= \lambda_E m_E(x) U_E(x) \\ F_E^2(x) &= \lambda_E m_E(x) V_E(x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将杆件 ab 嵌入到具有相同材料性质与截面性质的无限长杆件中, 并在杆件域外 ξ_j 处布设 6 个大小未知的集中虚荷载 X_{Ej}^i ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$)。根据叠加原理, 在域外虚荷载 X_{Ej}^i 和域内等效荷载 $F_E^i(x)$ 的共同作用下, 杆件 ab 上的位移振型均量和内力振型均量为

$$Y_E(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 G_Y^i(x; \xi_j) X_{Ej}^i + \sum_{i=1}^2 \int_{x_a}^{x_b} G_Y^i(x; \xi) F_E^i(\xi) d\xi \quad (10)$$

式中 Y 分别代表 U, V, θ, N, Q 和 M, G_Y^i ($i = 1, 2, 3$) 为杆件静力问题基本解, 即无限长均质等截面杆件在任一点处受单位轴向荷载(以 $i = 1$ 标识)、单位横向荷载(以 $i = 2$ 标识)或单位力偶(以 $i = 3$ 标识)作用时的位移和内力解, 具体形式见文献[6], 其中的弹性模量、截面面积和惯性矩分别取为 E_E, A_E 和 I_E 。由于所采用的是结构参数的均量, 因此上述基本解也可称为杆件静力问题均量基本解。

将杆端坐标 x_a 和 x_b 分别代入式(10), 并对积分项进行离散处理, 可得单元杆端均量的矩阵形式为

$$\left\{ \begin{aligned} \{S_{Ea}\}^e &= [A_a]^e \{X_E\}^e + \lambda_E [B_a]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e \\ \{S_{Eb}\}^e &= [A_b]^e \{X_E\}^e + \lambda_E [B_b]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 $\{S_{Ea}\}^e$ 和 $\{S_{Eb}\}^e$ 为单元杆端均量列阵, $\{X_E\}^e$

为单元虚荷载均量列阵, $\{\phi_E\}^e$ 为单元位移振型均量列阵, $[M_E]^e$ 为单元质量均量矩阵, 其他矩阵为单元影响矩阵。式(11) 即为单元分析所要建立的单元方程。

此外, 将杆件 ab 振型离散点坐标分别代入式(10), 同样对积分项进行离散处理, 可将单元位移振型均量列阵表示为

$$\{\phi_E\}^e = [\tilde{A}]^e \{X_E\}^e + \lambda_E [\tilde{B}]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e \quad (12)$$

式中 $[\tilde{A}]^e$ 和 $[\tilde{B}]^e$ 分别为相应的单元影响矩阵。式(12) 将在整体分析中用来导出整体补充方程。

下面进行整体分析。展开各杆件的单元方程(11), 将各杆杆端量分别代入结构齐次边界条件和交界条件, 整理后写成矩阵的形式得

$$[A] \{X_E\} + \lambda_E [B] [M_E] \{\phi_E\} = \{0\} \quad (13)$$

式中 $\{X_E\}$ 为由所有单元列阵 $\{X_E\}^e$ 组成的整体列阵, $\{\phi_E\}$ 为由所有单元列阵 $\{\phi_E\}^e$ 组成的整体列阵, $[M_E]$ 为由所有单元矩阵 $[M_E]^e$ 组成的整体矩阵, $[A]$ 和 $[B]$ 根据具体的边界条件和交界条件分别由各单元矩阵 $[A_a]^e, [A_b]^e, [B_a]^e$ 和 $[B_b]^e$ 确定。式(13) 即为整体分析所需建立的整体方程。

为了建立动力特性分析的振型方程, 还需列出补充方程。由式(12) 可组装成下述整体补充方程:

$$\{\phi_E\} = [\tilde{A}] \{X_E\} + \lambda_E [\tilde{B}] [M_E] \{\phi_E\} \quad (14)$$

式中 $[\tilde{A}]$ 和 $[\tilde{B}]$ 为由所有单元矩阵 $[\tilde{A}]^e$ 和 $[\tilde{B}]^e$ 组成的整体矩阵。

联立式(13) 和式(14), 消去 $\{X_E\}$ 后得

$$\{\phi_E\} = \lambda_E [\delta_E] [M_E] \{\phi_E\} \quad (15)$$

式中

$$[\delta_E] = [\tilde{B}] - [\tilde{A}] [A]^{-1} [B] \quad (16)$$

式(15) 即为随机结构动力特性分析中关于均量的振型方程, 解之即可获得随机结构动力特性的均量解答, 包括 λ_E 和 $\{\phi_E\}$ 。从本质上讲, 式(15) 实际上是基于柔度矩阵的振型方程, $[\delta_E]$ 为结构的均量柔度矩阵。

值得注意的是, 由于式(16) 中的 $[A]$ 为 $6N \times 6N$ 的矩阵, 其规模只与结构杆件数 N 有关, 而与杆件的质量离散份数无关, 因此由式(16) 求结构柔度矩阵时所涉及的矩阵求逆计算规模也不会因杆件质量的离散而有所增大, 这与动力有限元法的

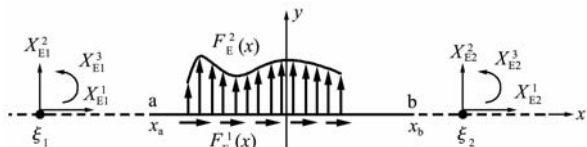


图 1 杆件单元 ab 及虚荷载

Fig. 1 Beam element ab and fictitious loads

情况明显不同,后者的刚度矩阵的规模随杆件质量离散规模的增大而增大,相应地方法的计算量也随之增加。

5 随机结构动力特性分析的协方差解答

先进行单元分析。设图 2 所示杆件单元 ab 为结构的一根杆件, x - y 为该单元的局部坐标系,其杆端坐标为 x_a 和 x_b 。该单元的控制微分方程为式(5),弹性模量为 E_E ,截面面积为 A_E ,截面惯性矩为 I_E ,在杆件域内作用的等效分布荷载 $\delta F^i(x)$ ($i = 1, 2$) 为

$$\delta F^1(x) = \delta \lambda m_E(x) U_E(x) + \lambda_E \delta m(x) U_E(x) +$$
$$\lambda_E m_E(x) \delta U(x) + \frac{d}{dx} [\delta E(x) A_E \frac{dU_E(x)}{dx} +$$
$$E_E \delta A(x) \frac{dU_E(x)}{dx}]$$
$$\delta F^2(x) = \delta \lambda m_E(x) V_E(x) + \lambda_E \delta m(x) V_E(x) +$$
$$\lambda_E m_E(x) \delta V(x) - \frac{d^2}{dx^2} [\delta E(x) I_E \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2} +$$
$$E_E \delta I(x) \frac{d^2 V_E(x)}{dx^2}]$$

(17)

将杆件 ab 嵌入到具有相同材料性质与截面性质的无限长杆件中,并在杆件域外 ξ_j 处布设 6 个大小未知的集中虚荷载 δX_j^i ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$)。根据叠加原理,在域外虚荷载 δX_j^i 和域内等效荷载 $\delta F^i(x)$ 的共同作用下,杆件 ab 的位移振型偏量和内力振型偏量为

$$\delta Y(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 G_Y^i(x; \xi_j) \delta X_j^i +$$
$$\sum_{i=1}^2 \int_{x_a}^{x_b} G_Y^i(x; \xi) \delta F^i(\xi) d\xi + D$$

(18)

式中 δY 分别代表 $\delta U, \delta V, \delta \theta, \delta N, \delta Q$ 和 $\delta M, G_Y^i$ ($i = 1, 2, 3$) 为杆件静力问题均量基本解,具体形式见文献[6],其中的弹性模量、截面面积和惯性矩分别取为 E_E, A_E 和 I_E 。由于采用静力问题均量基

本解,因此上式中 $\delta N(x), \delta Q(x)$ 和 $\delta M(x)$ 需分别考虑式(8)中各式的修正项,用 D 表示。对于 $\delta U(x), \delta V(x)$ 和 $\delta \theta(x), D = 0$ 。

将杆端坐标 x_a 和 x_b 分别代入式(18),并对积分项进行离散处理,可得单元杆端偏量的矩阵形式为

$$\{\delta S_a\}^e = [A_a]^e \{\delta X\}^e + \delta \lambda [B_a]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e +$$
$$\lambda_E [B_a]^e [M_E]^e \{\delta \phi\}^e + [H_a]^e \{\delta R\}^e$$
$$\{\delta S_b\}^e = [A_b]^e \{\delta X\}^e + \delta \lambda [B_b]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e +$$
$$\lambda_E [B_b]^e [M_E]^e \{\delta \phi\}^e + [H_b]^e \{\delta R\}^e$$

(19)

式中 $\{\delta S_a\}^e$ 和 $\{\delta S_b\}^e$ 为单元杆端偏量列阵, $\{\delta X\}^e$ 为单元虚荷载偏量列阵, $\{\delta \phi\}^e$ 为单元位移振型偏量列阵, $\{\delta R\}^e$ 为随机场通过中点离散法离散后得到的单元随机列阵, $[H_a]^e$ 和 $[H_b]^e$ 为 $\{\delta R\}^e$ 的单元影响矩阵,其他矩阵同式(11)中相应的矩阵。式(19)即为单元分析所要求建立的单元方程。

此外,将杆件 ab 振型离散点坐标分别代入式(18),同样对积分项进行离散处理,可将单元位移振型偏量列阵表示为

$$\{\delta \phi\}^e = [\tilde{A}]^e \{\delta X\}^e + \delta \lambda [\tilde{B}]^e [M_E]^e \{\phi_E\}^e +$$
$$\lambda_E [\tilde{B}]^e [M_E]^e \{\delta \phi\}^e + [\tilde{H}]^e \{\delta R\}^e$$

(20)

式中 $[\tilde{A}]^e$ 和 $[\tilde{B}]^e$ 同式(12)的, $[\tilde{H}]^e$ 为 $\{\delta R\}^e$ 的单元影响矩阵。式(20)将在整体分析中用来导出整体补充方程。

下面进行整体分析。展开各杆件的单元方程(19),将各杆杆端量分别代入结构齐次边界条件和交界条件,整理后写成矩阵的形式得

$$[A] \{\delta X\} + \delta \lambda [B] [M_E] \{\phi_E\} +$$
$$\lambda_E [B] [M_E] \{\delta \phi\} + [H] \{\delta R\} = \{0\}$$

(21)

式中 $\{\delta X\}$ 为由所有单元列阵 $\{\delta X\}^e$ 组成的整体列阵, $\{\delta \phi\}$ 为由所有单元列阵 $\{\delta \phi\}^e$ 组成的整体列阵, $\{\delta R\}$ 为由所有单元列阵 $\{\delta R\}^e$ 组成的整体列阵, $[H]$ 根据具体的边界条件和交界条件由各单元矩阵 $[H_a]^e$ 和 $[H_b]^e$ 确定, $[M_E], [\phi_E], [A]$ 和 $[B]$ 同式(13)的。式(21)即为整体分析所需建立的整体方程。

为了建立动力特性分析的振型方程,还需列出补充方程。由式(20)可组装成下述整体补充方程:

$$\{\delta \phi\} = [\tilde{A}] \{\delta X\} + \delta \lambda [\tilde{B}] [M_E] \{\phi_E\} +$$
$$\lambda_E [\tilde{B}] [M_E] \{\delta \phi\} + [\tilde{H}] \{\delta R\}$$

(22)

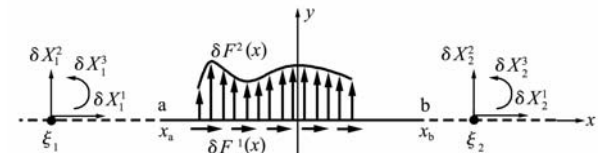


图 2 杆件单元 ab 及虚荷载

Fig. 2 Beam element ab and fictitious loads

式中 $[\tilde{A}]$ 和 $[\tilde{B}]$ 同式(14)的, $[\tilde{H}]$ 为由所有单元矩阵 $[\tilde{H}]^e$ 组成的整体矩阵。

联立式(21)和式(22),消去 $\{\delta X\}$ 后得

$$\{\delta \phi\} = \lambda_E [\delta_E] [M_E] \{\delta \phi\} + \delta \lambda [\delta_E] [M_E] \{\phi_E\} + [S_\phi] \{\delta R\} \quad (23)$$

式中 $[\delta_E]$ 为结构的均量柔度矩阵,见式(16); $[S_\phi]$ 如下式所示:

$$[S_\phi] = [\tilde{H}] - [\tilde{A}] [A]^{-1} [H] \quad (24)$$

式(23)即为随机结构动力特性分析中关于偏量的振型方程。

对于第 i 阶频率和振型,式(23)可以写为

$$\{\delta \phi_i\} = \lambda_{Ei} [\delta_E] [M_E] \{\delta \phi_i\} + \delta \lambda_i [\delta_E] [M_E] \{\phi_{Ei}\} + [S_{\phi i}] \{\delta R\} \quad (25)$$

对上式两边同时乘以 $\{\phi_{Ei}\}^T$,并根据均量振型的正交性与线性无关性得

$$\delta \lambda_i = [S_{\lambda i}] \{\delta R\} \quad (26)$$

式中

$$[S_{\lambda i}] = -\lambda_{Ei} \{\phi_{Ei}\}^T [S_{\phi i}] \quad (27)$$

式(26)建立了输入偏量 $\{\delta R\}$ 和输出偏量 $\delta \lambda_i$ (即第 i 阶动力特征值偏量)之间的关系。 $[S_{\lambda i}]$ 称为 $\delta \lambda_i$ 对 $\{\delta R\}$ 的灵敏度矩阵(行阵),其中的元素反映了各输入量变化对第 i 阶动力特征值变化贡献的灵敏程度。

同理,对第 j 阶频率有

$$\delta \lambda_j = [S_{\lambda j}] \{\delta R\} \quad (28)$$

于是 $\delta \lambda_i$ 和 $\delta \lambda_j$ 的协方差为

$$\text{cov}(\delta \lambda_i, \delta \lambda_j) = [S_{\lambda i}] \text{cov}(\{\delta R\}, \{\delta R\}) [S_{\lambda j}]^T \quad (29)$$

式中 $\text{cov}(\{\delta R\}, \{\delta R\})$ 为 $\{\delta R\}$ 的协方差矩阵,当 $i = j$ 时,由式(29)即可求得 $\delta \lambda_i$ 的方差。

将式(26)和式(27)代回式(25)后得

$$\{\delta \phi_i\} = [S_{\phi i}] \{\delta R\} \quad (30)$$

可见, $[S_{\phi i}]$ 为 $\{\delta \phi_i\}$ 对 $\{\delta R\}$ 的灵敏度矩阵,其中的元素反映了各输入量变化对第 i 阶振型分量变化的贡献的灵敏程度。同理,对第 j 阶振型有

$$\{\delta \phi_j\} = [S_{\phi j}] \{\delta R\} \quad (31)$$

于是 $\{\delta \phi_i\}$ 和 $\{\delta \phi_j\}$ 的协方差为

$$\text{cov}(\{\delta \phi_i\}, \{\delta \phi_j\}) = [S_{\phi i}] \text{cov}(\{\delta R\}, \{\delta R\}) [S_{\phi j}]^T \quad (32)$$

由式(29)和式(32)可见,为了求出动力特征值和振型的协方差,关键是要求出灵敏度矩阵 $[S_{\lambda i}]$, $[S_{\lambda j}]$, $[S_{\phi i}]$ 和 $[S_{\phi j}]$ 。由式(27)和式(24)可以进一步看出,在求灵敏度矩阵时所涉及到的求逆计算是 $[A]^{-1}$,该逆矩阵在随机结构动力特性分析的均量解答中已经求出式(16),并不需要重新进行计算。 $[A]$ 为 $6N \times 6N$ 的矩阵,其规模只与结构杆件数 N 有关,而与杆件的随机场离散份数无关,因此本文方法所涉及的矩阵求逆计算规模也不会因杆件随机场的离散而有所增大,求灵敏度矩阵时所涉及的矩阵相乘计算量也由于 $[A]$ 的维数较小而保持在一个较小的规模上,这与摄动随机有限元法的情况明显不同,后者由于需要在杆件内进行有限元剖分且要求有限元必须包含在随机场单元中,因此其刚度矩阵的规模远大于 $[A]$ 的规模,相应地方法涉及的矩阵求逆和矩阵相乘计算量也远大于本文方法的计算量。

6 数值算例

考虑一个复合随机场问题。如图3所示2跨6层框架结构,层质量都分布在各层横梁上。考虑各层柱子和各层横梁的弹性模量 E ,截面面积 A ,截面惯性矩 I 以及各层横梁的线密度 m 为均匀随机场,其均值列入表1,相关结构取为指数型,柱子随机场的相关长度为10 m,横梁随机场的相关长度为20 m, E 、 A 、 I 和 m 的变异系数为0.03。采用格林函数法和 Monte-Carlo 有限元法(以下简称 MC 法)计算前5阶动力特征值的均值和标准差。

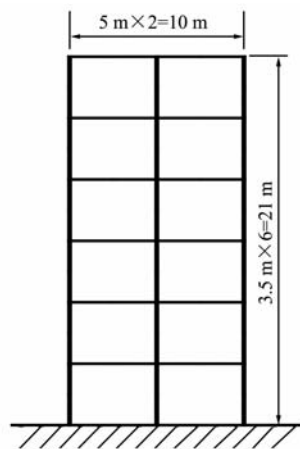


图3 框架结构
Fig. 3 A frame structure

在格林函数法中取 30 个杆单元(每层柱子与和每跨横梁各视为 1 个杆单元),每个杆单元的随机场采用中点离散法离散为 10 份,则整个框架结构的随机场共离散为 300 份。作为相对精确解,在 MC 法中采用局部平均法也将整个框架结构的随机场离散为 300 份;有限元网格取为随机场网格,即采用 300 个杆单元;样本数取为 10^4 。计算结果见表 2。

表 1 框架结构参数均值

Tab.1 Mean values of parameters of frame structure

构件	$E_E(\text{GPa})$	$A_E(\text{m}^2)$	$I_E(\text{m}^4)$	$m_E(\text{kg/m})$
横梁	2.75E+10	8.00E-02	1.07E-03	1.25E+03
柱子	2.75E+10	1.20E-01	1.60E-03	0.00E+00

表 2 框架结构动力特征值均值和标准差

Tab. 2 Mean values and standard deviations of dynamic characteristics of frame structure (rad/s)²

统计值	方法	阶数				
		1	2	3	4	5
均值	本文方法	4.75E+01	4.77E+02	1.58E+03	3.70E+03	6.82E+03
	MC 法	4.74E+01	4.76E+02	1.58e+03	3.69E+03	6.81E+03
标准差	本文方法	3.88E-01	3.51E+00	1.19E+01	2.72E+01	4.80E+01
	MC 法	3.98E-01	3.60E+00	1.16E+01	2.66E+01	4.63E+01

由表 2 可见,本文方法结果与 MC 法结果相当吻合,其中均值结果平均误差为 0.17%,标准差结果平均误差为 2.61%,这进一步验证了本文方法的正确性。此外,对于本算例,经计算量统计分析,若采用摄动随机有限元法进行分析(网格划分同本算例中 Monte-Carlo 有限元法的网格划分),其计算量是本文方法的 29.7 倍,即本文方法的计算量仅为摄动随机有限元法的 3.4%,计算效率远远高于摄动随机有限元法,而 Monte-Carlo 有限元法的计算量是本文方法的 14.5 万倍,计算量相当庞大,计算效率很低。

7 结 语

在考虑材料参数和几何参数小变异情况下,本文采用一阶近似方法将随机杆件动力特性分析的控制微分方程分解为关于动力特性均量和偏量的两组控制微分方程,然后利用这两组方程在形式上与静力问题控制微分方程的相似性,采用形式简单

的静力问题基本解以及域外布设虚荷载方法和多域耦合技术,提出了随机结构动力特性分析格林函数法。该法对随机场的处理相当灵活,同时可以保持以杆件为单元对结构进行划分,因此随机场的离散不会大幅增大问题的求解规模,计算效率较高。通过数值算例,验证了本文方法的正确性。

参考文献(References):

[1] 刘春华,秦 权. 桥梁结构固有频率的统计特征[J]. 中国公路学报,1997,**10**(4):49-54. (LIU Chun-hua, QIN Quan. Statistics of natural frequencies for bridge structures [J]. *China Journal of Highway and Transport*, 1997,**10**(4):49-54. (in Chinese))

[2] 刘春华,秦 权. 悬索桥振动特性对结构参数的灵敏度[J]. 清华大学学报(自然科学版),1998,**38**(12):48-51. (LIU Chun-hua, QIN Quan. Sensitivities of natural modes of suspension bridges to structural parameters[J]. *Jouranal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 1998,**38**(12):48-51. (in Chinese))

[3] VANMARCKE E H. *Random Fields*[M]. MIT Press,1983.

[4] 秦 权. 随机有限元及其进展(I)—随机场的离散和反应矩的计算[J]. 工程力学,1994,**11**(4):1-10. (QIN Quan. Progress in stochastic finite element methods, part I. Discretization of random fields and moments of structural responses [J]. *Engineeting Mechanics*, 1994,**11**(4):1-10. (in Chinese))

[5] LI C C, KIUREGHIAN A D. Optimal discretization of random fields[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1993,**119**(6):1136-1154.

[6] 范学明. 结构分析格林函数法及其工程应用[D]. 华南理工大学,2003. (FAN Xue-ming. The Green's Method for Structure Analysis and Its Application in Engineering[D]. South China University of Technology, 2003. (in Chinese))

[7] 苏 成,范学明. 考虑材料与荷载变异时崖门大桥施工阶段随机分析[J]. 桥梁建设,2003,(1):62-65. (SU Cheng, FAN Xue-ming. Stochastic analysis of Yamen bridge at erection stage in consideration of variant material and loading parameters [J]. *Bridge Construction*, 2003, (1):62-65. (in Chinese))

- [8] 苏 成, 范学明. 斜拉桥施工控制参数灵敏度与可靠度分析[J]. 土木工程学报, 2005, **38**(10): 81-87.
(SU Cheng, FAN Xue-ming. Parameter sensitivity

and reliability analysis during construction control of cable-stayed bridges [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2005, **38**(10): 81-87. (in Chinese))

Dynamic eigenvalue analysis of stochastic structures by the Green's method

SU Cheng* , FAN Xue-ming

(School of Civil Engineering and Transportation, State Key Laboratory of Subtropical Building Science,
South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: In consideration of small variations of material and geometry parameters, the governing differential equations of dynamic eigenvalue problems for stochastic beams are decomposed by the first approximation method into two sets of governing differential equations corresponding to means and deviations of dynamic characteristics, respectively. Based on the similarity between the equations derived and those corresponding to static problems, the Green's method for dynamic eigenvalue analysis of stochastic structures is proposed in this study by the use of static fundamental solutions, together with the application of fictitious loads outside domains and the multi-domain techniques. Numerical examples show the results of the proposed method agree well with those of the Monte-Carlo method under the circumstance of small variations, while the computation cost of the present method is much less than that of the perturbation stochastic finite element method.

Key words: stochastic structures; random vibration; dynamic eigenvalues; Green's method