DOI: 10.7511/jslx20231118001

# 基于 Bézier 三角形的曲面网格划分及等几何板壳分析

罗 飞[1,2], 郭玉杰*[2], 孙芳斌[2], 张 兴[1]

(1. 中国飞机强度研究所 强度与结构完整性重点实验室, 西安 710065;
2. 南京航空航天大学 飞行器先进设计技术国防重点学科实验室, 南京 210016)

**摘 要**: 针对单张 NURBS 曲面提出了一套考虑裁剪与非裁剪形式的 Bézier 三角形网格划分方法, 并将其应用于等几何 Kirchhoff-Love 壳结构的分析中。首先, 将 NURBS 曲面插值为 Bézier 曲面; 其次, 在参数域内计算裁剪曲线与各个参数节点的拓扑关系, 并在裁剪曲线上取点, 生成参数域内的 Bézier 轮廓曲线集合; 基于该轮廓曲线集合, 生成参数域上的三角形网格; 最后, 采用映射法生成物理域上的 Bézier 三角网格。通过三个模型验证了算法的适应性与鲁棒性, 并计算了网格质量, 结果表明整体网格质量良好; 在此基础上, 以 Scordelis-Lo's Roof 壳模型为例, 采用罚函数法施加 Kirchhoff-Love 壳单元间的转动约束, 验证了基于 Bézier 三角形的 Kirchhoff-Love 壳单元的精度。

**关键词**: 等几何分析; Bézier 三角网格划分; Bézier 曲面映射; 曲线裁剪; Kirchhoff-love 壳

**中图分类号**: O242.21 **文献标志码**: A **文章编号**: 1007-4708(2025)05-0825-06

## 1 引 言

Hughes 等[1]基于等参单元的概念提出了等几何分析(IGA)方法, IGA 不仅采用非均匀有理 B 样条(NURBS)描述几何模型, 还以 NURBS 函数插值位移场[2], 因此 IGA 消除了几何离散误差, 并且 IGA 还具有高阶连续、几何精确等特性, 使得其非常适于曲面等薄壁结构的分析。NURBS 由于具有张量积的性质, 因此只能描述较为简单的形状。但工程结构常较为复杂, 难以采用单张 NURBS 张量积曲面进行描述, 进而需要采用裁剪、布尔、拼接等操作方式才能构建所需曲面构型。针对裁剪曲面, 采用四边形单元分析时, 需要对裁剪单元进行额外处理; Kim 等[3]提出了一种处理二维剪裁曲面的 NURBS 增强单元, 在积分时, 根据裁剪单元的形状对其进行分类, 并连接对应的节点以及裁剪交点, 从而在曲面参数域中构建裁剪单元的三角网格。采用三角形单元进行离散比四边形单元更加灵活, 因此国内外许多学者对其进行了研究。Farin[4]首先在计算机辅助设计(CAGD)中提出伯恩斯坦 Bézier 三角形的概念, 给出了两个三角面片连续的约束条件, 但是该公式并不能保证适用于任意阶次的三角形单元。Lasser[5]提出了从一个 Bézier 四边形面片(母片)中提取出任意三角形面片(子片)的方法, 通过构造辅助控制点, 可以将在 Bézier 张量积曲面参数域内的子三角形映射到物理域, 通过调整参数域中子片以及母片的阶数, 能够生成任意阶数的 Bézier 三角曲面。

曲壳是工程中常见的结构形式, 在对曲壳进行力学分析时, 常采用 Kirchhoff-Love 壳单元, 由于不考虑横向剪切, Kirchhoff-Love 壳单元能够以较少自由度模拟曲壳的位移场, 节省计算时间。基于 NURBS 函数的高阶连续特点, Kiendl 等[6]首先发展了 NURBS 基的 Kirchhoff-Love 壳单元, 采用将单元交界面上的自由度直接耦合在一起的方式, 满足了 Kirchhoff-Love 壳单元在单元交界面所需的 $C^1$ 连续性约束条件。Schuβ 等[7]基于拉格朗日乘子以及修改基函数的方式, 提出了一种针对多片 Kirchhoff-Love 壳单元的耦合方法。Guo 等[8]采用具有变分一致特性的 Nitsche 方法实现了薄壳

**收稿日期**: 2023-11-18; **修改稿收到日期**: 2024-02-07.
**基金项目**: 国家自然科学基金面上项目(11972187); 中央高校基本科研业务费(NT2022004)资助项目.
**作者简介**: 郭玉杰*(1986-), 男, 博士, 副教授(E-mail: yujieguo@nuaa.edu.cn).

**引用本文**: 罗 飞, 郭玉杰, 孙芳斌, 等. 基于 Bézier 三角形的曲面网格划分及等几何板壳分析[J]. 计算力学学报, 2025, **42**(5): 825-830, 838.
LUO Fei, GUO Yujie, SUN Fangbin, et al. Bézier triangular surface mesh generation and isogeometric plate and shell analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(5): 825-830, 838.

结构的本质边界条件施加，提升了薄壳结构分析的精度。Herrema 等[9]采用罚函数法施加多片NURBS的界面约束，误差在工程允许范围内。Zareh 等[10]在已有 Bézier 三角网格的基础上，通过 Clough-Tocher 和 Powell-Sabin 方法进一步将大网格划分为若干小网格以满足连续性要求。此外，等几何分析还应用到边界元求解[11]等问题中。

本文针对单张 NURBS 曲面的三角网格划分进行研究，提出了一套考虑裁剪与非裁剪的NURBS曲面 Bézier 三角网格自动划分方法；进一步将划分的 Bézier 三角形应用到薄壳计算中，研究了基于 Kirchhoff-Love 薄壳理论的等几何分析方法。

## 2 理论及方法

### 2.1 B样条和 NURBS 曲线曲面

B样条基函数以递归形式定义在一个单调不减的节点向量 $\boldsymbol{U}=\{u_1,\cdots,u_{n+p+1}\}$ 上，对于每个节点值，总有 $\boldsymbol{u}_i\leqslant u_{i+1}$（$i=1,\cdots,n+p$），$n$ 是控制点数量，$p$ 是曲线的阶数。

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & (u_i\leqslant u<u_{i+1})\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{1}$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \tag{2}$$

一条 NURBS 曲线可定义为

$$C(u)=\sum_{i=1}^{n}R_{i,p}\boldsymbol{P}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{j=1}^{n}N_{j,p}w_j}\boldsymbol{P}_i \tag{3}$$

$\boldsymbol{P}_i$ 是曲线的第 $i$ 个控制点，$w_i$ 是权重。采用张量积形式可以定义一张 NURBS 曲面为

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}R_{ij}(u,v)\boldsymbol{P}_{ij} \tag{4}$$

$$R_{ij}(u,v)=\frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\omega_{ij}}{\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)\omega_{kl}} \tag{5}$$

$\{\boldsymbol{P}_{ij}\}$ 形成两个方向的控制点网络，$\{\omega_{ij}\}$ 是权因子，$\{R_{ij}\}$ 是非均匀有理 B 样条函数，$p$ 和 $q$ 是NURBS曲面在两个参数方向的阶数[12]。

### 2.2 Bézier 三角形

两变量的伯恩斯坦基定义为

$$B_{i,d}(\zeta)=\frac{d!}{i!j!}\zeta^i(1-\zeta)^j\quad(|\boldsymbol{i}|=i+j=d) \tag{6}$$

采用面积坐标，其可定义为

$$B_{i,d}=\frac{d!}{i!j!k!}\zeta_1^i\zeta_2^j\zeta_3^k\quad(|\boldsymbol{i}|=i+j+k) \tag{7}$$

在此基础上，Bézier 三角形可定义为

$$\boldsymbol{T}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=\sum_{|\boldsymbol{i}|}B_{i,d}\boldsymbol{P}_i \tag{8}$$

$\boldsymbol{T}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ 是 Bézier 三角形上的一点，$\zeta_1$、$\zeta_2$、$\zeta_3$ 是参数三角形上的面积坐标[2]，其中 $\boldsymbol{i}=(i,j,k)$，$i$、$j$、$k$ 是对应控制点的下标，$\boldsymbol{P}_i$ 是对应的控制点。

### 2.3 映射算法

选择文献[5]的映射公式将 Bézier 四边形面片映射为若干张 Bézier 三角形面片，相关公式为

$$\boldsymbol{S}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)=\sum_{|\boldsymbol{I}|}\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}}B_{\boldsymbol{I}}^{N(l+m)}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{I}}=\sum_{\boldsymbol{I}^u+\boldsymbol{I}^v=\boldsymbol{I}}C_{\boldsymbol{I}}^{l+m}(N,\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}_{0,0}^{l,m}(\mu_{\boldsymbol{I}^u}^{l},\nu_{\boldsymbol{I}^v}^{m}) \tag{10}$$

$\boldsymbol{S}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ 是曲面三角形面片上的控制点，计算 $\boldsymbol{S}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ 首先需要在 Bézier 四边形面片的参数域内选取一个参数三角形，记参数三角形的阶数为 $N$，则最终映射得到的物理三角形的阶数为 $N\times(l+m)$，其中 $l$ 与 $m$ 分别是 Bézier 四边形面片两个方向的阶次。本文参数三角形的阶数只考虑 $N=1$ 的情况，$C_{\boldsymbol{I}}^{l+m}$ 是辅助控制点的插值系数，$\boldsymbol{R}_{0,0}^{l+m}$ 是辅助构造控制点，其由开花算法计算得到，$\mu_{\boldsymbol{I}^u}^{l}$，$\nu_{\boldsymbol{I}^v}^{m}$ 是中间迭代系数。

### 2.4 Bézier 曲面三角形壳单元的应用

#### 2.4.1 等几何离散

采用划分的 Bézier 三角网格对 K-L 壳进行离散，K-L 壳[13]需要计算二阶微分，因此在单元界面上要保持一阶连续，而 Bézier 三角形在单元界面上为 $C^0$ 连续，因此本文基于罚函数方法施加三角形界面上的转动约束。由等几何的概念可知，采用伯恩斯坦-Bézier 基进行单元离散后，域上一点处的位移，可以由单元的控制点位移插值得到，其定义如下，其中，$\boldsymbol{u}$ 是壳中面层上一点的位移，$\boldsymbol{U}_i$ 是控制点位移。

$$\boldsymbol{u}(\xi,\eta)=\sum_{i}B_i^p\boldsymbol{U}_i \tag{11}$$

在小变形线性假设下，单元的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_e=\int_{\Omega^e}\left(\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\boldsymbol{U}_{|i|}}:\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{U}_{|j|}}+\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\boldsymbol{U}_{|i|}}:\frac{\partial\boldsymbol{\kappa}}{\partial\boldsymbol{U}_{|j|}}\right)\mathrm{d}\Omega^e \tag{12}$$

耦合刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_p=\int_{\Gamma}f\,\frac{\partial\{\varphi_T\}}{\partial\boldsymbol{U}_{|i|}}\cdot\frac{\partial\{\varphi_T\}}{\partial\boldsymbol{U}_{|j|}}\mathrm{d}\Gamma \tag{13}$$

其中 $f$ 是罚因子，$\Gamma$ 是对应的单元交界面。$\{\varphi_T\}$ 是界面上两个单元沿切线方向转角的差值。

## 3 曲面三角形网格划分流程

经典 NURBS 曲面三角形网格划分方法在处理裁剪区域的思路为在参数域中的裁剪曲线上进

行取点，然后将所取的点向参数域四条边界映射，连接对应的映射点，形成若干矩形单元格，随后对矩形单元格一分为二，得到参数域三角形，最终经过映射得到物理域三角形[2]，该思路简单，容易实现，但是对曲面进行三角形网格剖分时容易生成畸形网格。

本文提到的 NURBS 曲面三角形网格划分算法思路为先形成参数域中的贝塞尔曲线集，再结合二维网格划分算法进行参数域网格划分，因为参数域网格为自动生成，因此保证了模型的网格质量。本文算法共分为六个步骤。

(1)在犀牛软件中进行模型创建，保存模型为 3dm 格式并由程序读取该模型。

(2)对曲面在两个参数方向进行节点插值，将 NURBS 面片转换为 Bézier 面片；假设 NURBS 面片在两个方向的节点长度为 $a\times b$(不考虑重复度，后续提到的节点重复度均不考虑重复度)，则经过节点插入转换后可以得到 $(a-1)\times(b-1)$ 张 Bézier 面片。

(3)对参数域的所有节点进行遍历，判断节点是否在裁剪曲线内，并进行分类，生成 $(a-1)\times(b-1)$ 个初始节点单元(每个初始节点单元包含四个节点，其存储在数组 $A_1$ 中)，与之对应物理域上 $(a-1)\times(b-1)$ 张 Bézier 面片。

(4)对所有初始节点单元遍历，每个节点单元的四条边分别与裁剪曲线求交；若有交点，则将交点保存到一个 $4\times n_i$ 的二维数组 $A_2$ 中，$n_i$ 是对应第 $i$ 边上的裁剪交点个数；再将 $A_2$ 中所有交点在各条边上按逆时针的拓扑结构进行排序；图 1 是数组 $A_2$ 中的交点位置变化情况。

(5)对于每一条边，将数组 $A_1$ 与 $A_2$ 中的点按照对应的拓扑关系(该点是否在模型的参数域内)轮流填入到一个 1m 的数组 $A_3$，其中，m 为数组 $A_1$ 中在单元上的点数量与数组 $A_2$ 中点的数量之和。在对应裁剪曲线上取点，并按逆时针连接节点单元所有的点，使其成为一条闭合的一次 Bézier 曲线。对所有节点单元遍历，得到 $(a-1)\times(b-1)$ 条一次 Bézier 轮廓曲线。将这些曲线输出为 .spline格式文件，并基于该轮廓，通过二维网格划分程序 XMESH[14] 生成二维三角网格，最后返回模型参数域内的网格信息。

(6)采用式(9)将每一个二维网格映射到物理域中。若网格不满足要求，对模型进行升阶或节点插入，然后跳转到第(2)步，若满足要求，则网格划分结束。图 2 为裁剪单元边界处理流程。

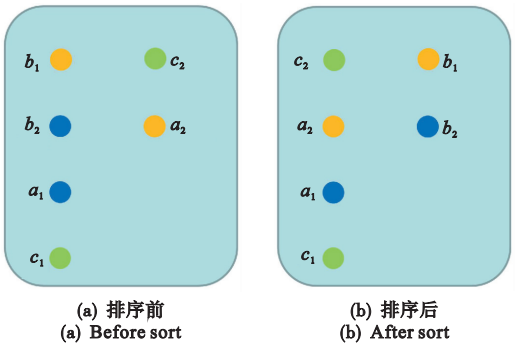


图 1　数组中裁剪点排序前后存储位置的变化

Fig. 1　Sorting of the intersection points between trimming curves and knot lines in array $A_2$

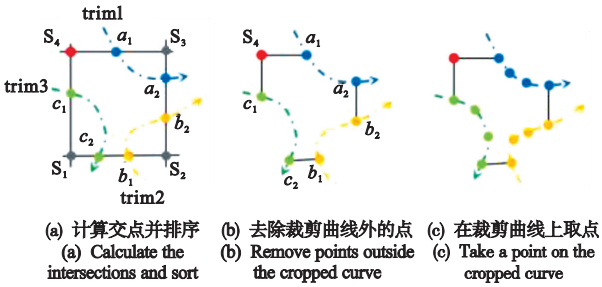


图 2　裁剪单元边界处理

Fig. 2　Treatment of trimmed element boundary

## 4　网格划分算例

将模型的形状质量系数作为衡量网格质量的一项指标；对单个三角形，其形状质量系数为

$$\varphi=4\sqrt{3}\,\frac{S_\Delta}{(L_1^2+L_2^2+L_3^2)} \tag{14}$$

其中 $\varphi$ 的取值在(0,1)之间，$S_\Delta$ 表示该三角形的面积，$L_1$、$L_2$、$L_3$ 分别是三角形对应三边的长度；当 $\varphi$ 值越大，网格越趋近于等边三角形，表明网格形状质量越好。对于整体模型，可将所有网格的形状质量系数的平均值以及标准差作为评价指标，具体可表示为

$$\bar{G}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi_i \tag{15}$$

$$\delta_G=\sqrt{\frac{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\varphi_i-\bar{G})^2}{M-1}} \tag{16}$$

其中 $\bar{G}$ 是网格的整体质量系数，$\delta_G$ 是整体质量系数的标准差，反映整个网格质量的差异性；$M$ 是模型的网格总数。

### 4.1　开孔半圆柱模型

开孔壳模型在 $U$ 和 $V$ 方向的基函数阶数分别为 2 阶和 1 阶，节点向量长度均为 5；其 NURBS 几何描述如图 3 所示。划分的三角形单元如图 4 所示。由图 4 可知，在裁剪区域附近，网格较密，在模

型非裁剪边界附近，网格较粗。网格质量系数为0.9137，标准差为0.0673。

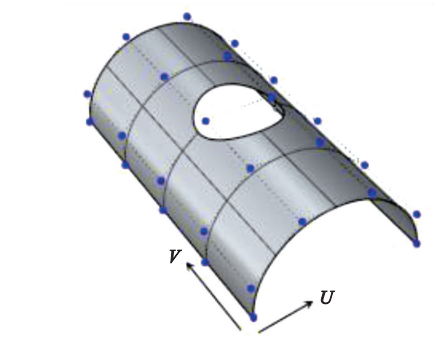


图3 开孔半圆柱壳的NURBS表示

Fig. 3 NURBS representation of a half cylindrical shell with one hole

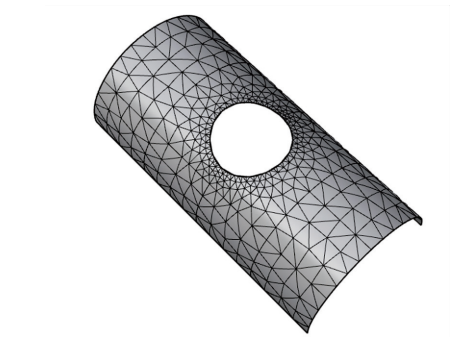

图4 开孔半圆柱壳的物理域三角网格

Fig. 4 A half cylindrical shell with a hole problem: The triangular mesh in the physical space

### 4.2 多孔半圆柱壳模型

多孔半圆柱壳模型包含五条NURBS裁剪曲线，在$U$方向的阶数为2阶，节点向量长度为5，$V$方向为1阶，节点向量长度为7。利用本文算法可得最终网格划分模型(如图5所示)。该模型形状质量系数为0.9175，大于0.9，标准差为0.0723，低于0.1，有较高的网格质量。

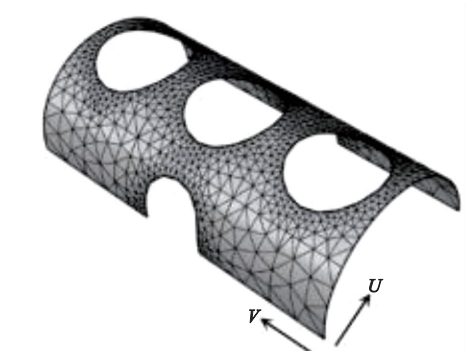


图5 多孔半圆柱壳的物理域三角网格

Fig. 5 Triangular mesh in the physical space of cylindrical shell with multiple holes

### 4.3 锥形曲壳

本算例研究一锥形曲壳的网格划分问题。图6为采用本文算法得到的物理域网格，图7为对照网格[16]。通过对比发现，本文模型所得网格规整性略好，且网格数量略少，数量为文献[16]的2/3。

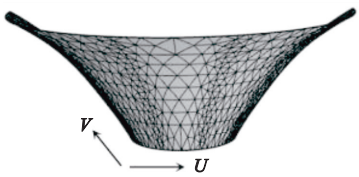


图6 锥形壳的物理域三角网格

Fig. 6 Triangular mesh of the frustum surface

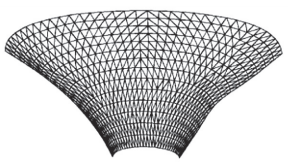

图7 锥形曲面的参考网格[16]

Fig. 7 Triangular mesh of the Frustum surface: A reference[16]

## 5 Scordelis-Lo's Roof壳结构分析

将上述三角形网格算法应用于壳结构的分析，采用算例为Scordelis-Lo's Roof壳，其几何描述如图8所示，该壳结构长度为50 mm，半径为25 mm，圆弧张开角度为80°，杨氏模量$E$=432 e+8 MPa，泊松比$\nu=0$，该壳结构受$Z$方向的均布力，大小为$p=-90$ N/mm$^2$，位移边界条件为曲边简支。本算例罚因子取为1.0e+8。图9是$p$=5时的结构$Z$向位移云图；图10为本文算法计算得到的Roof壳的弯曲力$M_{12}$，图11为ABAUQS计算得到的Roof壳的弯曲力$M_{12}$，可以看出，二者在分布形式上基本一致。图12为当单元阶次$p$从3升高为5时(单元数为337)，该壳结构的$Z$向最大位移的收敛曲线，可知该收敛曲线波动不大，最终结果收敛于−0.302 mm，与其他文献和ABAUQS的对比结果列入表2；由表2可以看出，

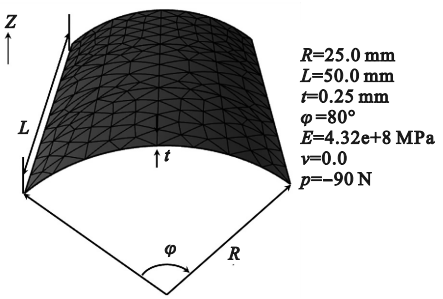


图8 Scordelis-Lo's Roof壳的物理三角网格

Fig. 8 Triangular mesh of the Scordelis-Lo's Roof

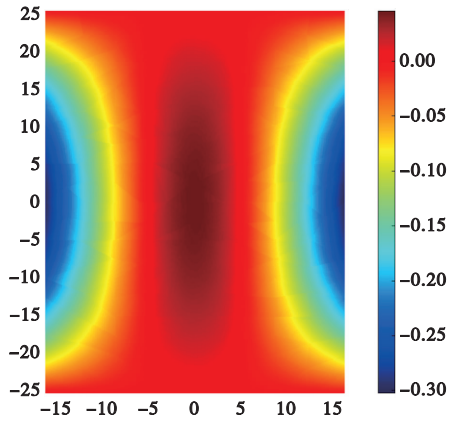


图 9　Scordelis-Lo's Roof 壳在 $Z$ 方向的位移云图(俯视图)

Fig. 9　Contour plots of the $z$-direction displacement of the Scordelis-Lo's Roof(top view)

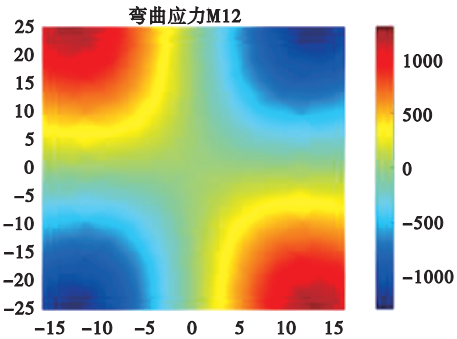


图 10　Scordelis-Lo's Roof 壳的弯曲力 $M_{12}$(本文)

Fig. 10　Bending force $M_{12}$ of Scordelis-Lo's Roof shell(this Paper)

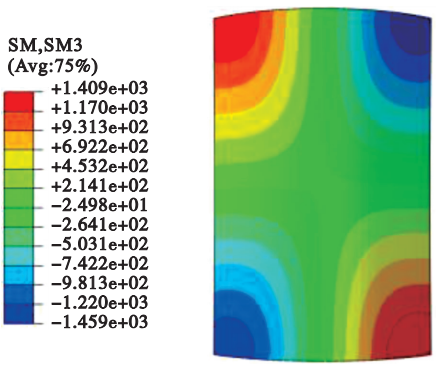


图 11　Scordelis-Lo's Roof 壳的弯曲力 $M_{12}$(ABAQUS)

Fig. 11　Bending force $M_{12}$ of Scordelis-Lo's Roof shell(ABAQUS)

本文结果与参考文献中的结果相近，与 ABAQUS 有所差别。其原因为 ABAQU 目前采用的方法仍是经典有限元法，本文以及其余两篇文献均采用了 IGA 方法，其消除了几何离散误差。

图 13 为 Scordelis-Lo's Roof 壳 $Z$ 方向的位移随单元数增加的收敛曲线，可知基于本文的 Bezier 三角形单元计算结果收敛更快，其最终收敛到−0.303 mm。通过本算例可知本文网格划分算法以及等几何壳单元的有效性及精确性。

表 2　Roof 壳结果对比

Tab. 2　Comparison of calculation results of Roof shell in $Z$-direction maximum displacement

| 参数 | 本文结果 | 文献[8](Nitsche 法) | 文献[10](光顺 rTBS 法) | ABAQUS |
|---|---|---|---|---|
| $W_{max}$/mm | −0.302 | −0.301 | −0.308 | −0.386 |

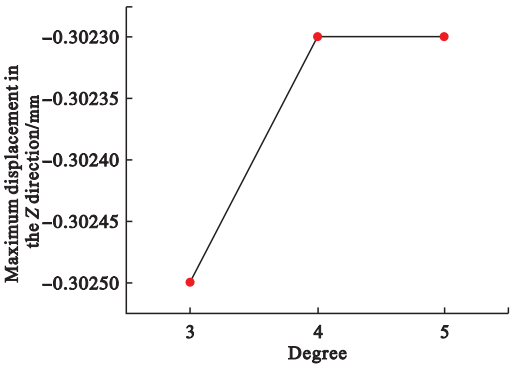


图 12　Scordelis-Lo's Roof 壳 $Z$ 方向的最大位移随单元次数变化的收敛曲线

Fig. 12　Convergence curve of the maximum $z$-direction displacement of the Scordelis-Lo's Roof with respect to the order of the basis

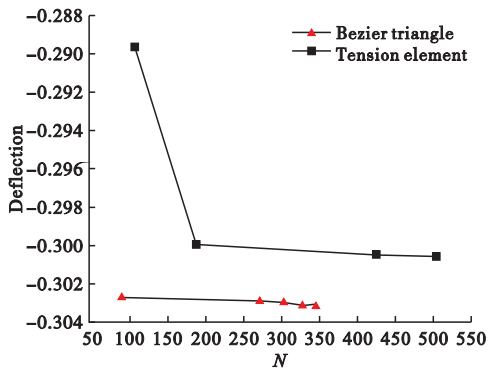


图 13　Scordelis-Lo's Roof 壳 $Z$ 方向的位移收敛曲线

Fig. 13　Displacement convergence curve in the $Z$ direction of Scordelis-Lo's Roof shell

## 6　结　论

本文针对单张 NURBS 曲面，通过将 NURBS 曲面以节点插值的方式转化为 Bézier 面片，并将曲面的裁剪问题转化为与 Bézier 面片对应的二维张量积参数域四条边的相交问题，从而简化了曲线裁剪的复杂性，同时结合成熟网格划分算法保证了网格划分结果的质量。通过三个算例展示了本文提出的网格算法的通用性。采用罚函数法将三角单元间的转角进行耦合，解决了单元间转角不连续的问题，耦合方式简单且能满足精度要求，通过计算 Scordelis-Lo's Roof 模型验证了本文壳单元算法的正确性。

本文还存在一些不足之处，如在网格划分过程中，为了保证相邻 Bézier 面片划分出的三角网格在相邻边界处具有相同的控制点分布，本文将所有 Bézier 面片（剪裁与非裁剪面片）的轮廓作为输入条件进行二维网格划分，导致二维网格划分过程中约束边界过多，从而造成一定的网格划分困难。

## 参考文献（References）：


[1] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41): 4135-4195.

[2] Xia S T, Wang X L, Qian X P. Continuity and convergence in rational triangular Bézier spline based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **297**: 292-324.

[3] Kim H J, Seo Y D, Youn S K. Isogeometric analysis for trimmed CAD surfaces[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**(37-40): 2982-2995.

[4] Farin G. Triangular Bernstein-Bézier patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1986, **3**(2): 83-127.

[5] Lasser D. Triangular subpatches of rectangular Bézier surfaces[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2008, **55**(8): 1706-1719.

[6] Kiendl J, Bletzinger K U, Linhard J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-love elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**(49-52): 3902-3914.

[7] Schuβ S, Dittmann M, Wohlmuth B, et al. Multi-patch isogeometric analysis for Kirchhoff-love shell elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **349**: 91-116.

[8] Guo Y J, Ruess M. Nitsche's method for a coupling of isogeometric thin shells and blended shell structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **284**: 881-905.

[9] Herrema A J, Johnson E L, Proserpio D, et al. Penalty coupling of non-matching isogeometric Kirchhoff-love shell patches with application to composite wind turbine blades[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **346**: 810-840.

[10] Zareh M, Qian X P. Kirchhoff-love shell formulation based on triangular isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **347**: 853-873.

[11] 韩少燕，姜人伟，高汝鑫，等. 基于等几何分析的边界元法求解二维 Laplace 方程[J]. 计算力学学报，2023，**40**(1)：105-110. (HAN Shao-yan, JIANG Ren-wei, GAO Ru-xin, et al. Isogeometric boundary element analysis for 2D Laplace equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1): 105-110.

[12] Piegl L, Tiller W. *The NURBS book*[M]. Springer Science & Business Media, 1996.

[13] Guo Y J, Ruess M. Weak Dirichlet boundary conditions for trimmed thin isogeometric shells[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2015, **70**(7): 1425-1440.

[14] Engvall L, Evans J A. Isogeometric triangular bernstein-bézier discretizations: Automatic mesh generation and geometrically exact finite element analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **304**: 378-407.

[15] Breitenberger M, Apostolatos A, Philipp B, et al. Analysis in computer aided design: Nonlinear isogeometric B-Rep analysis of shell structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **284**: 401-457.

[16] 丁 慧，罗尧治. 自由形态网壳结构网格生成的等参线分割法[J]. 浙江大学学报(工学版)，2014，**48**(10)：1795-1801，1834. (DING Hui, LUO Yao-zhi. Isoparametric line dividing grid generation method for free-form lattice shells[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2014, **48**(10): 1795-1801, 1834. (in Chinese)


（下转第 838 页）

# In ternal forces demand calculation of boundary columns of buckling-restrained steel plate shear wall with multi-concrete panels

HAN Qihao[1], LI Junru[1], WANG Dayang*[2], ZHAO Yufei[1]
(1. School of Civil and Surveying & Mapping Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China; 2. School of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract**: Small cross-sections of boundary elements easily induce the "internal tension" phenomenon of steel plate shear walls, making it difficult to fully utilize the seismic performance of buckling-restrained steel plate shear walls. The design of cross-sections of boundary elements is related to their internal force requirements, and analyzing the internal force requirements of boundary columns is meaningful. Based on the proposed buckling-restrained steel plate shear wall with multi-concrete panels (MBRSPSW), the analytical expressions for the internal force of the boundary column of the MBRSPSW were theoretically derived in this paper. Combined with the experimental research on the buckling-restrained steel plate shear wall horizontally assembled multi-concrete panels (H-MBRSPSW), its numerical model was established and verified. The internal force distributions of the boundary column obtained from numerical analysis and analytical calculation were further compared. The research results indicate that the inner steel plates in the MBRSPSW are divided into constrained regions and unconstrained regions. The axial force, shear force, and bending moment distributions of the boundary column from the analytical calculation results agree with those from the numerical analysis results, and the internal force calculation expressions of the boundary column are correct. The research results can provide a reference for the design of this category of steel plate shear walls.

**Key words**: buckling-restrained steel plate shear wall; multi-concrete panels; boundary columns; internal forces demand; analytical calculation

(上接第 830 页)

# Bézier triangular surface mesh generation and isogeometric plate and shell analysis

LUO Fei[1,2], GUO Yujie*[2], SUN Fangbin[2], ZHANG Xing[1]
(1. Key Laboratory of Strength and Structural Integrity, China Aircraft Strength Research Institute, Xi'an 710065, China; 2. National Defense Key Discipline Laboratory of Advanced Design Technology of Aircraft, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract**: This paper presents a Bezier triangle meshing method that considers both clipped and non-clipped forms for a single NURBS surface. The proposed method is applied to analyze isogeometric Kirchhoff-Love shell structures. The process begins by interpolating NURBS surfaces into Bezier surfaces. Subsequently, the topological relationship between the clipping curve and each parameter node is calculated within the parameter domain. A Bezier contour curve set is then generated in the parameter domain by selecting points along the clipping curve. Utilizing this contour curve set, a triangular mesh is generated in the parameter domain. Finally, the Bezier triangle mesh in the physical domain is created through a mapping method. The adaptability and robustness of the algorithm are verified through three models, and the mesh quality is assessed. The results demonstrate favorable overall mesh quality. Building upon this foundation, the paper illustrates the application of a rotation constraint between Kirchhoff-Love shell elements, using the penalty function method with Scordelis-Lo's Roof shell model as an example. The accuracy of Kirchhoff-Love shell elements based on Bezier triangles is subsequently validated.

**Key words**: isogeometric analysis; Bézier triangular mesh; Bézier surface mapping; Curves trim; Kirchhoff-love shell