DOI: 10.7511/jslx20240524001

求解二维 Riemann 问题的压差型自适应旋转熵稳定格式

郭依琳， 郑素佩*， 陈梦莹， 刘佳豪

(长安大学 理学院,西安 710064)

摘 要:Euler 方程是计算流体力学中描述流体运动的基本方程之一,间断解的存在是该类方程数值求解算法构造的一个难点。为得到二维 Euler 方程 Riemann 问题的高分辨率数值结果,本文构造了一种压差型自适应旋转熵稳定格式。利用方程的旋转不变性,将边界外法向量分解到两个正交方向,在每个方向上采用熵稳定格式。两分量方向的确定与旋转角有关,本文通过引入压力函数使格式的旋转角根据局部的压力变化进行自适应改变,熵稳定格式的分辨率可通过自适应旋转角的引入而改善。数值算例表明该格式的数值结果对称性好且分辨率高。

关键词:熵稳定格式;压差型旋转角;旋转不变性;压力函数;自适应改变

中图分类号:O241.82 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2025)05-0780-06

1 引 言

双曲守恒律方程是计算流体力学中反应多种物理现象的一类重要方程。当计算复杂的二维问题时,使用具有良好性能的 Roe 型近似 Riemann 求解器也会产生不同程度的数值不稳定现象。因此,Levy 等[1]给出计算多维问题的解决方法,其中基于波传播的数值方法主要有网格对齐法[2]、旋转通量法[3]、插值方法[1]和真正多维对流格式[4]等。

旋转通量法尝试将边界上的外法向量分解到两个正交方向,利用通量函数的旋转不变性将复杂的二维方程转化为类一维形式。为消除激波的不稳定现象,Ren 等[2]基于 Roe 格式提出一种旋转 Riemann 求解器,研究表明该算法具有良好的鲁棒性。若在分解后的两向量方向上使用不同的通量函数,可得到混合旋转通量。Feng 等[5]基于三维磁流体方程,将 Roe 求解器和 Rusanov 求解器耦合,研究表明该方法提高了数值格式对间断的捕捉能力; Townsend 等[3]将 HLL 格式[6]和 HLLC 格式[7]耦合得到结构简单、具有高分辨率的旋转混合格式。旋转不变性可确保旋转后方程的通量性质不发生改变,该方法能更好地捕捉激波,具有较强的鲁棒性。故本文将利用 Euler 方程的旋转不变性构造旋转通量格式。

求解双曲守恒律方程时,即使给定光滑的初始条件,数值解也可能产生间断。鉴于此,Tadmor[8]首次提出熵守恒格式和满足熵稳定格式的条件,熵稳定格式的数值解在离散单元中均满足熵不等式,在间断区域能保持熵的耗散,不会出现伪振荡;Ismail 等[9]进一步分析熵稳定格式中耗散量大小,提出熵相容格式;贾豆等[10]针对 Euler 方程将熵稳定格式和 HLL 格式结合,在保证熵稳定性质的同时提高了数值格式的分辨率;翟梦情等[11]针对一维理想磁流体方程提出了基于移动网格算法的熵稳定格式,在不增加网格节点个数的情况下对网格进行合理分布,实现多波型问题的高分辨率求解。熵稳定格式耗散项的大小会影响数值格式对激波的捕捉能力,耗散项较小,数值结果会产生伪振荡现象,合理地调整耗散项的大小是避免伪振荡产生的关键。

旋转通量格式的旋转角度与数值耗散密切相关[12],故通过控制旋转角度来调节数值耗散,进而对熵稳定格式的耗散项进行修正。针对 HLLE 格式[13],为抑制激波不稳定现象的产生,Quirk[14]采

收稿日期:2024-05-24; **修改稿收到日期**:2024-06-26.

基金项目:国家自然科学基金(11971075);陕西省自然科学基础研究计划(2024JC-ZDXM-23)资助项目.

作者简介:郑素佩*(1978-),女,博士,教授(E-mail:zsp2008@chd.edu.cn).

引用本文:郭依琳,郑素佩,陈梦莹,等.求解二维 Riemann 问题的压差型自适应旋转熵稳定格式[J].计算力学学报,2025,**42**(5):780-785.
GUO Yilin, ZHENG Supei, CHEN Mengying, et al. A pressure difference adaptive rotating entropy stable scheme for two dimensional Riemann problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(5): 780-785.

用基于压力的切换函数控制旋转角；由于上述函数不可微，Hong Kim 等[15]引入加权压力函数，提高了 AUSM(Advection Upwind Splitting Method)格式在间断处的分辨率，消除了数值振荡；Zhang 等[12]研究了常用的迎风格式，并用于压力相关的权值函数定义旋转角，以自适应的方法控制耗散量，构造出满足激波稳定求解和接触间断高分辨率的旋转通量格式。

综上，本文将利用二维 Euler 方程通量函数的旋转不变性构造旋转通量格式，将通量分解到两个正交方向，在每个方向上采用熵稳定格式。由于熵稳定格式的分辨率可通过自适应旋转角的引入而改善，故本文在确定分量方向时，引入加权压力函数作为激波探测器，旋转格式的旋转角度根据局部的压力变化进行自适应改变从而修正熵稳定格式的耗散项，实现高分辨率。

2　控制方程

考虑二维 Euler 方程组

$$\boldsymbol{U}_t+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})_x+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})_y=0$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{bmatrix},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 ρ 为密度，p 为压强，u、v 分别为 x、y 方向上速度分量，E 为单位体积的总能量，γ 为比热比，通常取 $\gamma=1.4$。

3　压差型自适应熵稳定旋转通量法

3.1　方程的离散

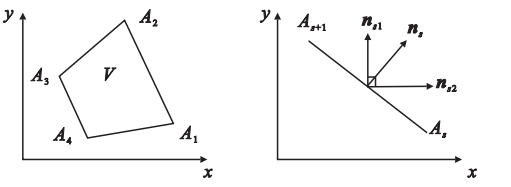
简单起见，将计算区域均匀剖分为有限个四边形单元，记任一控制体单元为 V，对方程(1)左右两边同时进行积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_V\boldsymbol{U}\mathrm{d}V+\int_A\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0 \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G})$，$A$ 是控制体 V 的边界，由 4 条线段 A_sA_{s+1} 构成($s=1,2,3,4$ 且 $A_5=A_1$)，如图 1(a)所示，$\boldsymbol{n}$ 是边界 A 的单位外法向量，边界的总通量为

$$\int_A\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A=\sum_{s=1}^{4}\int_{A_s}^{A_{s+1}}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}_s\,\mathrm{d}A \tag{3}$$

为求解积分方程(3)，需考虑边界 A_sA_{s+1} 上外法向量 $\boldsymbol{n}_s=\alpha_1\boldsymbol{n}_{s1}+\alpha_2\boldsymbol{n}_{s2}$，$\boldsymbol{n}_s$ 可分解到两分量 $\boldsymbol{n}_{s1}$ 和 $\boldsymbol{n}_{s2}$ 方向上(如图 1(b)所示)，分解方法将在本文 3.3 节作进一步讨论。



(a) 控制体　(a) Control volume　　(b) 边界上的法向量分解　(b) Normal vector decomposition on the boundary

图 1　控制体和边界上的法向量分解

Fig. 1　Control volume and normal vector decomposition on the boundary

方程(3)的右端积分项进一步写为

$$\int_{A_s}^{A_{s+1}}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}_s\,\mathrm{d}A=\int_{A_s}^{A_{s+1}}[\boldsymbol{n}_{s1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})+\boldsymbol{n}_{s2}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})]\mathrm{d}A \tag{4}$$

方程(2)的第一个积分项可理解为控制体 V 内 $\boldsymbol{U}$ 的平均值随时间的变化率，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_V\boldsymbol{U}\mathrm{d}V=|V|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{U} \tag{5}$$

将方程(4,5)代入方程(2)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\boldsymbol{U}}=-\frac{1}{|V|}\sum_{s=1}^{4}\int_{A_s}^{A_{s+1}}[\boldsymbol{n}_{s1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})+\boldsymbol{n}_{s2}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})]\mathrm{d}A \tag{6}$$

由二维 Euler 方程的旋转不变性[16]可知

$$\boldsymbol{n}_{s1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})+\boldsymbol{n}_{s2}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{U})$$

其中 $\boldsymbol{Q}_s$ 是旋转矩阵，$\boldsymbol{Q}_s^{-1}$ 是其逆矩阵，详见文献[16]。则方程(6)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\boldsymbol{U}}=-\frac{1}{|V|}\sum_{s=1}^{4}\int_{A_s}^{A_{s+1}}\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{U})\mathrm{d}A \tag{7}$$

式(7)右端求和项可近似改写为

$$\int_{A_s}^{A_{s+1}}\boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{U})\mathrm{d}A\approx L_s\boldsymbol{Q}_s^{-1}\hat{\boldsymbol{F}}_s \tag{8}$$

其中 L_s 是线段 A_sA_{s+1} 的长度，$\hat{\boldsymbol{F}}_s=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{U})$ 是对应界面的旋转通量。方程(1)的半离散旋转通量格式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{\boldsymbol{U}}=-\frac{1}{|V|}\sum_{s=1}^{4}L_s\boldsymbol{Q}_s^{-1}\hat{\boldsymbol{F}}_s \tag{9}$$

时间层上的推进采用三阶强稳定的 Runge-Kutta 方法，详见文献[17]。

3.2　熵稳定格式

3.1 节已给出旋转通量格式的半离散形式，本文选取熵稳定数值格式，取方程(1)的熵对[10]为

$$E(\boldsymbol{U})=-\frac{\rho s}{\gamma-1},P(\boldsymbol{U})=-\frac{\rho us}{\gamma-1},Q(\boldsymbol{U})=-\frac{\rho vs}{\gamma-1}$$

其中 $s=\ln p-\gamma\ln\rho$，对应的熵变量 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V}=\left[\frac{\gamma-s}{\gamma-1}-\frac{\rho(u^2+v^2)}{2p},\frac{\rho u}{p},\frac{\rho v}{p},-\frac{\rho}{p}\right]^{\mathrm{T}}$$

熵稳定格式由熵守恒通量和数值耗散项构成，

$$\boldsymbol{H}^{ES}=\boldsymbol{H}^{EC}-\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{D}}\hat{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}$$

其中 $\boldsymbol{H}^{EC}$ 为熵守恒通量，$\hat{\boldsymbol{R}}$ 为特征向量矩阵[10]，$\hat{\boldsymbol{D}}$ 为半正定的耗散矩阵[10]。且

$$\boldsymbol{H}^{EC}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{n}_x+\boldsymbol{G}\boldsymbol{n}_y$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\hat{\rho}\hat{u}\\ \hat{\rho}\hat{u}^2+\hat{p}_1\\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v}\\ \hat{\rho}\hat{u}\left(\frac{1}{2}(\hat{u}^2+\hat{v}^2)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\hat{p}_2}{\hat{\rho}}\right)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\hat{\rho}\hat{v}\\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v}\\ \hat{\rho}\hat{v}^2+\hat{p}_1\\ \hat{\rho}\hat{v}\left(\frac{1}{2}(\hat{u}^2+\hat{v}^2)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\hat{p}_2}{\hat{\rho}}\right)\end{bmatrix}$$

Roe 根据 Euler 方程的性质，提出了一种简单、高效的熵守恒通量函数，该函数需选取参变量 $\boldsymbol{Z}$，即

$$\boldsymbol{Z}=[z_1\quad z_2\quad z_3\quad z_4]^{\mathrm{T}}=\sqrt{\frac{\rho}{p}}[1\quad u\quad v\quad p]^{\mathrm{T}}$$

由此可得

$$\hat{\rho}=\bar{z}_1\cdot z_4^{ln},\hat{u}=\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1},\hat{v}=\frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_1},\hat{p}_1=\frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1}$$

$$\hat{p}_2=\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\bar{z}_4}{\bar{z}_1}$$

$$H=\frac{1}{2}(\hat{u}^2+\hat{v}^2)+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\hat{p}_2}{\hat{\rho}}$$

其中 $\bar{b}_i$ 是算术平均，b_i^{ln} 是对数平均，详见文献[10]。

3.3 格式的自适应旋转角

引入加权压力函数控制旋转角度，修正熵稳定格式中的数值耗散，实现高分辨率求解。

由 3.1 节可知，旋转通量法将边界法向量 $\boldsymbol{n}_s$ 分解成两个正交的单位向量 $\boldsymbol{n}_{s1}$ 和 $\boldsymbol{n}_{s2}$，

$$\boldsymbol{n}_s=\alpha_1\boldsymbol{n}_{s1}+\alpha_2\boldsymbol{n}_{s2}$$

其中 $\alpha_1=\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{n}_{s1}$ 和 $\alpha_2=\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{n}_{s2}$，数值通量在两个方向上的分解形式为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}_s)=\alpha_1\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}_{s1})+\alpha_2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}_{s2})$$

为利用旋转角的自适应改变修正熵稳定格式中数值耗散量的大小，采用文献[12]的处理方式来确定两分量的方向，即

$$\boldsymbol{n}_{s1}=\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{n}_s,\boldsymbol{n}_{s2}=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{n}_s$$

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_2=\begin{bmatrix}\cos(\theta-\pi/2) & \sin(\theta-\pi/2)\\ -\sin(\theta-\pi/2) & \cos(\theta-\pi/2)\end{bmatrix}$$

其中 θ 为定义的旋转角。

Zhang 等[12]通过控制激波强度控制旋转角，而压力的显著变化通常表明流场中存在激波，故引入压力函数作为激波探测器，其表达式为

$$f=1-\min\left(\frac{p_L}{p_R},\frac{p_R}{p_L}\right)^3 \tag{10}$$

其中 p_L 和 p_R 分别为单元界面左右两侧的压力值。

当计算穿过特定网格界面的数值通量时，激波检测函数应检查该界面所有相邻网格单元[18]，故定义函数(11)选择相邻单元交界面上的最大函数值，即

$$\omega=\max(f_i,f_j) \tag{11}$$

其中 $f_k(k=i,j)$ 表达式同式(10)，为第 k 个网格单元的压力函数值，i 和 j 为任意相邻的两个网格单元编号。

旋转格式的旋转角[13]定义为

$$\theta=\frac{\pi}{4}\cdot\omega \tag{12}$$

旋转角将根据局部压力的变化而变化，压力变化越剧烈，压力函数值 f 越大，由式(11,12)可知旋转角越大。

4 数值算例

以二维 Euler 方程 Riemann 问题为例验证算法性能，考虑以下初值问题[19]。图 2～图 5 中(a～d)分别为各算例的自适应旋转熵稳定格式、熵稳定格式、$\theta=\pi/4$ 时固定旋转熵稳定格式、随机选取 θ 时固定旋转熵稳定格式；图 2～图 5 中①～③分别表示接触间断、激波、稀疏波所在位置；各算例均在区域$[0,1]\times[0,1]$内求解，且网格采用均匀剖分。

4.1 二维 Euler 方程 Riemann 问题Ⅰ

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(0.5313,0.0000,0.0000,0.4000)\\ \qquad(x>0.5,y>0.5)\\ (1.0000,0.7276,0.0000,1.0000)\\ \qquad(x<0.5,y>0.5)\\ (0.8000,0.0000,0.0000,1.0000)\\ \qquad(x<0.5,y<0.5)\\ (1.0000,0.0000,0.7276,1.0000)\\ \qquad(x>0.5,y<0.5)\end{cases}$$

表 1 为该 Riemann 问题采用自适应旋转熵稳定格式的误差，参考解为网格数是 600×600 时的四阶紧致 CWENO 重构[20]，由表 1 可知，随着网格

数加密，误差越来越小。图 2 为算例 1 在 $T=0.25$，$CFL=0.6$，空间网格数为 200×200 时的数值结果对比。其中图 2(d)为 $\theta=\pi/5$ 时固定旋转熵稳定格式的数值结果。该算例包含两个激波和两个接触间断，固定旋转角度时，即使 $\theta=\pi/4$，由于旋转角不能根据流场特征进行自适应改变，虽存在对称性，但激波位置存在明显偏差；引入自适应旋转角，该格式能更准确地捕捉到激波和接触间断，过渡带更窄。

表 1　自适应旋转熵稳定格式误差

Tab. 1　Errors of adaptive entropy stable scheme

网格数	L1 误差	L2 误差
60×60	1.19717067e-2	6.84339075e-4
120×120	6.09649935e-3	2.21794438e-4
150×150	4.77259616e-3	1.45477760e-4
200×200	3.53399199e-3	9.08272449e-5

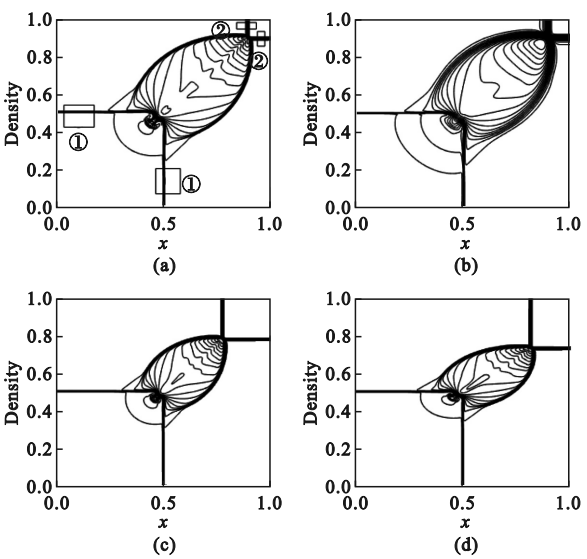


图 2　算例 1 数值结果对比

Fig. 2　Comparison of numerical results in Example 1

4.2　二维 Euler 方程 Riemann 问题Ⅱ

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(1.0000,0.1000,0.1000,1.0000) & (x>0.5,y>0.5)\\ (0.5197,-0.6259,0.1000,0.4000) & (x<0.5,y>0.5)\\ (0.8000,0.1000,0.1000,0.4000) & (x<0.5,y<0.5)\\ (0.5197,0.1000,-0.6259,0.4000) & (x>0.5,y<0.5)\end{cases}$$

图 3 为算例 2 在 $T=0.25$，$CFL=0.8$，空间网格数为 350×350 时的数值结果对比。其中图 3(d)为 $\theta=\pi/7$ 时固定旋转熵稳定格式的数值结果。该算例包含两个接触间断和两个稀疏波，引入压力加权函数后，该格式的结果相比于熵稳定格式过渡带更窄，具有更高的分辨率，且相比于固定旋转熵稳定格式，本文格式的数值结果更准确，无明显偏差。

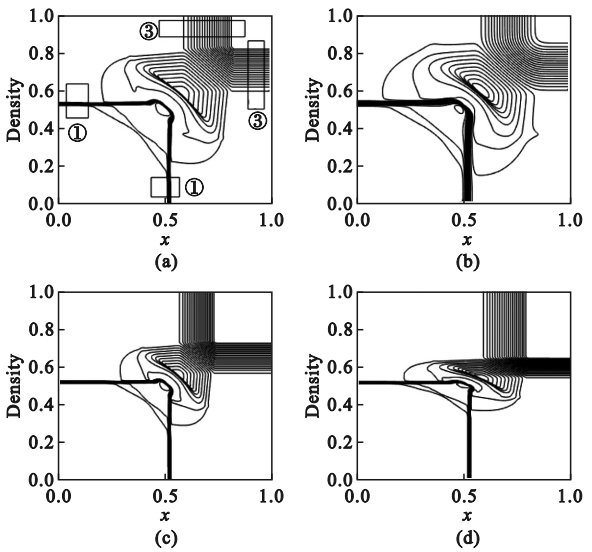


图 3　算例 2 数值结果对比

Fig. 3　Comparison of numerical results in Example 2

4.3　二维 Euler 方程 Riemann 问题Ⅲ

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(1.0000,0.0000,-0.3000,1.0000) & (x>0.5,y>0.5)\\ (2.0000,0.0000,0.3000,1.0000) & (x<0.5,y>0.5)\\ (1.0625,0.0000,0.8145,0.4000) & (x<0.5,y<0.5)\\ (0.5313,0.0000,0.4276,0.4000) & (x>0.5,y<0.5)\end{cases}$$

图 4 为算例 3 在 $T=0.3$，$CFL=0.6$，空间网格数为 250×250 时的数值结果对比。其中图 4(d)为 $\theta=\pi/6$ 时固定旋转熵稳定格式的数值结果。该算例包含两个接触间断和两个激波，由图 4(c,d)可知，当固定旋转角度时，会产生与实际物理意义不符的数值结果，激波位置偏差较大；与熵稳定格式相比，引入自适应旋转后，该格式可准确地捕捉间断位置，且在间断处过渡带更窄，无振荡产生。

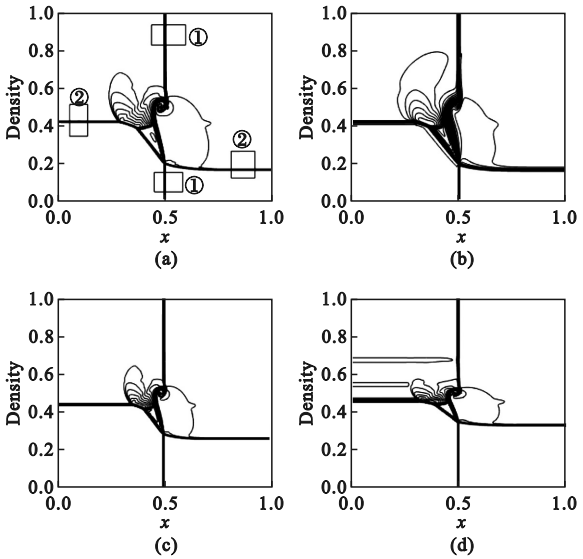


图 4 算例 3 数值结果对比

Fig. 4 Comparison of numerical results in Example 3

4.4 二维 Euler 方程 Riemann 问题Ⅳ

$$(\rho,u,v,p)=\begin{cases}(0.5313,0.1000,0.1000,0.4000)\\ \qquad(x>0.5,y>0.5)\\ (1.0222,-0.6179,0.1000,1.0000)\\ \qquad(x<0.5,y>0.5)\\ (0.8000,0.1000,0.1000,1.0000)\\ \qquad(x<0.5,y<0.5)\\ (1.0000,0.1000,0.8276,1.0000)\\ \qquad(x>0.5,y<0.5)\end{cases}$$

图 5 为算例 4 在 $T=0.2$，$CFL=0.8$，空间网格数为 250×250 时的数值结果对比。其中图 5(d)为 $\theta=\pi/7$ 时固定旋转熵稳定格式的数值结果。该算例包含两个接触间断、一个激波和一个稀疏波，由图 5(a)可知本文格式针对该 Riemann 问题能准确地捕捉到四个波型，再次验证通过自适应改变旋转角的大小能够修正熵稳定格式中的耗散项，以达到高分辨率且无振荡产生。

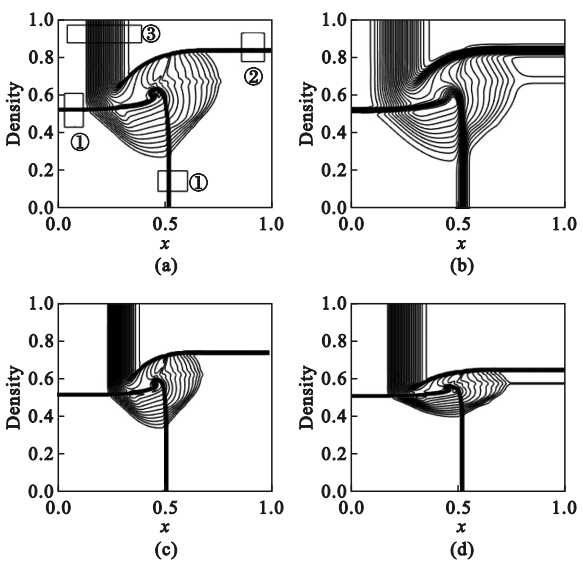


图 5 算例 4 数值结果对比

Fig. 5 Comparison of numerical results in Example 4

5 总 结

本文针对二维 Euler 方程的 Riemann 问题构造了一种压差型自适应旋转熵稳定格式，利用方程的旋转不变性，对方程进行类一维处理，通过引入压力函数作为激波探测器，旋转格式的旋转角根据局部流动的压力变化进行自适应改变，最后通过数值算例验证压差型自适应旋转熵稳定格式能够很好地捕捉间断所在位置，且过渡带更窄、分辨率高。

参考文献(References)：

[1] Levy D W, Powell K G, van Leer B. Use of a rotated Riemann solver for the two-dimensional Euler equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **106**(2): 201-214.

[2] Ren Y X. A robust shock-capturing scheme based on rotated Riemann solvers[J]. *Computers & Fluids*, 2003, **32**(10): 1379-1403.

[3] Townsend J F, Knzsy L, Jenkins K W. On the development of a rotated-hybrid HLL/HLLC approximate Riemann solver for relativistic hydrodynamics[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2020, **496**(2): 2493-2505.

[4] 胡立军，谭诗德，袁海专. 基于 WENO 重构的真正多维黎曼求解器[J]. 计算力学学报，2023，**40**(6)：1036-1043. (HU Lijun, TAN Shide, YUAN Haizhuan. A genuinely multidimensional Riemann solver based on WENO reconstruction[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(6): 1036-1043. (in Chinese))

[5] Feng X S, Liu X J, Xiang C Q, et al. A new MHD model with a rotated-hybrid scheme and solenoidality-preserving approach[J]. *The Astrophysical Journal*, 2019, **871**(2): 226.

[6] Harten A, Lax P D, van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Review*, 1983, **25**(1): 35-61.

[7] Toro E F, Spruce M, Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver[J]. *Shock Waves*, 1994, **4**(1): 25-34.

[8] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws[J]. *Mathe-*

matics of Computation，1987，**49**(179)：91-103.

[9] Ismail F，Roe P L. Affordable，entropy-consistent Euler flux functions II：Entropy production at shocks [J]. *Journal of Computational Physics*，2009，**228**(15)：5410-5436.

[10] 贾　豆，郑素佩. 求解二维 Euler 方程的旋转通量混合格式[J]. 应用数学和力学，2021，**42**(2)：170-179.(JIA Dou，ZHENG Supei. A hybrid scheme of rotational flux for solving 2D Euler equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*，2021，**42**(2)：170-179.(in Chinese))

[11] 翟梦情，李　琦，郑素佩. 求解一维理想磁流体方程的移动网格熵稳定格式[J]. 计算力学学报，2023，**40**(2)：229-236.(ZHAI Mengqing，LI Qi，ZHENG Supei. A moving-grid entropy stable scheme for the 1D ideal MHD equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2023，**40**(2)：229-236.(in Chinese))

[12] Zhang F，Liu J，Chen B S，et al. Evaluation of rotated upwind schemes for contact discontinuity and strong shock[J]. *Computers & Fluids*，2016，**134-135**：11-22.

[13] Einfeld B. On Godunov-type methods for gas dynamics[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*，1988，**25**(2)：294-318.

[14] Quirk J J. A contribution to the great Riemann solver debate[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*，1994，**18**(6)：555-574.

[15] Hong Kim K，Ho Lee J，Hyun Rho O. An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions[J]. *Computers & Fluids*，1998，**27**(3)：311-346.

[16] Toro E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*[M]. Berlin，Heidelberg：Springer，1997.

[17] Gottlieb S，Shu C W，Tadmor E. High order time discretization methods with the strong stability property [J]. *SIAM Review*，2001，**43**(1)：89-112.

[18] Kim S S，Kim C，Rho O H，et al. Cures for the shock instability：Development of a shock-stable Roe scheme [J]. *Journal of Computational Physics*，2003，**185**(2)：342-374.

[19] Kurganov A，Tadmor E. Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*，2002，**18**(5)：584-608.

[20] 徐　霞. 求解双曲守恒律方程的任意阶保号熵稳定格式研究[D]. 长安大学，2021.(XU Xia. The Research of Arbitrary High-order Sign Preserving Entropy Stable Schemes for Hyperbolic Conservation Laws[D]. Chang'an University，2021.(in Chinese))

A pressure difference adaptive rotating entropy stable scheme for two dimensional Riemann problems

GUO Yilin，　ZHENG Supei*，　CHEN Mengying，　LIU Jiahao

(School of Science，Chang'an University，Xi'an 710064，China)

Abstract：The Euler equation is one of the fundamental equations describing fluid motion in Computational Fluid Dynamics，and the existence of discontinuous solutions poses challenges in constructing numerical algorithms for solving this type of equation. To achieve high-resolution numerical results for the Riemann problem of the two-dimensional Euler equation，this paper constructs a pressure-difference adaptive rotating entropy stable scheme. Utilizing the rotating invariance of the equations，the normal vector outside the boundary is decomposed into two orthogonal components，and an entropy stable scheme is implemented in each directions. The determination of the components of the two components relies on the rotation angle. In this paper，a pressure function is introduced to adaptively adjust the rotation angle of the scheme based on local pressure variations. The resolution of the entropy stable scheme is enhanced by introducing the adaptive rotation angle. Numerical examples show that the numerical results obtained by this scheme exhibit good symmetry and high resolution.

Key words：entropy stable scheme；pressure-difference rotation angle；rotating invariance；pressure function；adaptive variation