第42卷第3期　　计 算 力 学 学 报　　Vol. 42, No. 3
2025 年 6 月　　Chinese Journal of Computational Mechanics　　June 2025

DOI：10.7511/jslx20231101001

用高阶剪切理论求双模量夹芯梁自由振动基频

吴　晓*1,2，肖　珍1

（1.常德学院 智能建筑学院，常德 415000；2.湖南文理学院 机械工程学院，常德 415000）

摘　要：基于高阶剪切理论研究了求解双模量夹芯梁的自由振动基频问题。首先假设双模量夹芯梁轴向位移为沿梁高方向变量的高阶函数，然后利用剪切应变与轴向位移、弯曲挠度微分关系确定了轴向位移表达式，推导出了双模量夹芯梁的弯曲微分方程，求出了均布载荷作用下的挠度曲线表达式。把该方法计算结果与有关试验结果进行比较可知，该方法的计算精度非常高。在此基础上把均布载荷作用下的挠度曲线表达式作为双模量夹芯梁自由振动的振型函数，利用 Galerkin 法研究了双模量夹芯梁的自由振动，求得了双模量夹芯梁自由振动的基频表达式。算例分析表明，双模量夹芯梁基频公式计算精度很高。

关键词：高阶剪切；双模量；夹芯梁；自由振动；基频

中图分类号：O341　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1007-4708(2025)03-0513-08

1　引　言

夹芯梁作为结构工程的承力构件在实际工程中得到推广应用，因此关于夹芯梁的研究文献较多。很多复合材料夹芯梁由于夹芯材料是双模量材料，因此这部分复合材料夹芯梁属于双模量夹芯梁，所以要考虑剪切变形对其弯曲变形的影响。文献[1]采用高阶剪切变形理论研究了双模量梁的弯曲，讨论分析了翘曲函数的指数对挠度、正应力的影响，发现拉压弹性模量的差异对梁的弯曲应力有较大影响。文献[2]研究了不同模量石墨简支梁的弹塑性分析及试验，建立了不同模量弯曲梁的弹塑性分析理论模型。这说明双模量材料结构的力学性能已引起科研人员的重视。文献[3]研究了泡沫和轻木夹心复合材料疲劳性能，认为聚氨酯泡沫夹芯梁的疲劳性能更优且格构的设置可显著提高整体结构的疲劳寿命。文献[4]研究了泡沫金属夹芯梁在重复冲击下的动态响应，发现泡沫金属夹芯梁的塑性变形能增量不断减小而回弹系数随着冲击次数逐渐增加。文献[5]研究了复合材料格栅增强夹芯梁弯曲性能，结合平行移轴刚度理论、一阶剪切理论对夹芯梁的弯曲刚度、最大挠度进行理论分析。文献[6]研究了多轴向增强拉挤复合材料木夹芯梁弯曲试验，发现夹芯梁面层发生褶皱破坏。文献[7]用能量法研究了夹芯梁的弯曲挠度计算，发现能量法求弯曲挠度不但计算精度高且计算过程简便。文献[8]研究了剪切效应对夹芯梁弯曲许用弯矩的影响，认为夹芯梁弯曲时剪切效应对许用弯矩有一定影响。文献[9]研究了泡桐木复合夹芯板面内轴向承载能力，文献[10]研究了泡桐木夹芯层结构材料的力学性能，发现泡桐木复合夹芯板具有显著的质轻而承载力高的特点。文献[3-10]的研究说明夹芯梁的弯曲性能已引起科研人员的关注。文献[11]研究了考虑剪切效应时双模量梁的自由振动分析，文献[12]研究了双模量泡沫铝芯夹层梁的自由振动分析，文献[13]在文献[11,12]基础上研究了不同模量铁木辛柯梁的自由振动特性分析。文献[11-13]主要研究了两端简支双模量梁的自由振动，因为两端简支双模量梁自由振动的振型函数可以精确求得，很容易计算出两端简支双模量梁自由振动的基频。而求解一端简支一端固支梁基频、两端固支梁基频、悬臂梁基频时，存在需求解超越方程、计算过程复杂繁琐、求解难度大的困难。基于上述因素，本文采用高阶剪切理论研究了双模量夹芯梁自由振动的基频计算。研究结果表明，轴向位移翘曲指数 $n=9$ 时本文方法计算值与弹性理论

收稿日期：2023-11-01；**修改稿收到日期**：2023-11-27.

作者简介：吴　晓*（1965-），男，教授（E-mail：wx2005220@163.com）.

引用本文：吴　晓，肖　珍. 用高阶剪切理论求双模量夹芯梁自由振动基频[J]. 计算力学学报，2025，**42**(3)：513-520.
WU Xiao, XIAO Zhen. Study on the fundamental frequency of free vibration of double modulus sandwich beams with higher-order shear theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(3): 513-520.

解误差最小,轴向位移翘曲指数 $n=5$ 时本文方法计算值与弹性理论解误差最小。本文双模量夹芯梁挠度方法的计算结果与文献[10]的试验值相符,说明采用高阶剪切理论的方法计算结果是可靠的。把各向同性梁在均布载荷作用下的梁函数作为权函数,利用 Galerkin 原理得到了各向同性梁基频计算公式的计算结果与经典解的误差很小基本吻合。本文方法计算夹芯梁自由振动基频时,仅是代数运算且计算过程非常简便,克服了振动理论计算一端简支一端固支梁的基频、两端固支梁的基频、悬臂梁的基频时,存在的需求解超越方程、计算过程复杂繁琐、求解难度大的不足。本文研究工作为双模量夹芯梁的计算分析和设计提供了理论依据。

2 双模量夹芯梁静力梁函数

假设夹心层为双模量材料,夹芯层高为 $h=h_1+h_2$,h_1 为夹芯层受拉区高度,h_2 为夹芯层受压区高度。令双模量夹芯梁截面轴向位移表达式为

$$u_i=z\,\Phi-z^n\varphi_i \tag{1}$$

式中 $i=1$ 为上表板,$i=2$ 为夹芯层受拉区,$i=3$ 为夹芯层受压区,$i=4$ 为下表板,n 为大于等于 3 的奇数,z 为截面任意点至中性轴的距离,Φ 为截面转角,φ_i 为翘曲函数。

由弹性理论可知剪应变与轴向位移和挠度关系为

$$\gamma_i=\frac{\tau_i}{G_i}=\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2}$$

式中 γ_i 为剪应变,τ_i 为剪应力,G_i 为剪切弹性模量,w 为弯曲挠度。

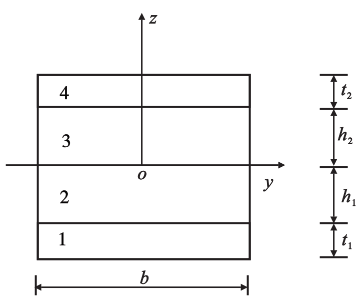

图 1 梁截面

Fig. 1 Beam section

假设双模量夹芯梁上下表板很薄,截面剪力 Q 全部由夹芯梁承担,可得

$$\begin{aligned} z&=-h_1 \quad (\gamma_1=\gamma_2=0)\\ z&=h_2 \quad (\gamma_3=\gamma_4=0)\end{aligned} \tag{3}$$

利用式(1~3)可以确定轴向位移为

$$\begin{aligned} u_1=u_2&=z\Phi-\frac{z^n}{nh_1^{n-1}}\left(\Phi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ u_3=u_4&=z\Phi-\frac{z^n}{nh_2^{n-1}}\left(\Phi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

利用式(2,4)可得夹芯层剪力

$$Q=\int_0^{h_2}\tau_3 b\,\mathrm{d}z+\int_{-h_1}^{0}\tau_2 b\,\mathrm{d}z=C\left(\Phi+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{5}$$

式中 $C=\dfrac{(n-1)}{n}Gbh$

$G=G_2=G_3=\dfrac{E_2E_3}{E_2(1+\mu_3)+E_3(1+\mu_2)}$,$\mu_2$ 为拉伸区泊松比,μ_3 为压缩区泊松比,E_2 为拉伸区弹性模量,E_3 为压缩区弹性模量。

利用式(4)可得

$$\begin{aligned}
\sigma_1&=E_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\\
&=E_1Z\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{E_1Z}{n}\left(\frac{Z}{h_1}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\
\sigma_2&=E_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\\
&=E_2Z\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{E_2Z}{n}\left(\frac{Z}{h_1}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\
\sigma_3&=E_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\\
&=E_3Z\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{E_3Z}{n}\left(\frac{Z}{h_2}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\\
\sigma_4&=E_4\frac{\partial u_4}{\partial x}\\
&=E_4Z\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{E_4Z}{n}\left(\frac{Z}{h_2}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

由材料力学可知双模量夹芯梁截面弯矩平衡方程为

$$\begin{aligned} M(x)=&\int_{-(h_1+t_1)}^{-h_1}\sigma_1 zb\,\mathrm{d}z+\int_{-h_1}^{0}\sigma_2 zb\,\mathrm{d}z+\\ &\int_0^{h_2}\sigma_3 zb\,\mathrm{d}z+\int_{h_2}^{(h_2+t_2)}\sigma_4 zb\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{7}$$

把式(6)代入式(7)可得

$$M(x)=D\frac{\partial\Phi}{\partial x}-D_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right) \tag{8}$$

式中

$$\begin{aligned} D=&\frac{1}{3}E_1b(h_1+t_1)^3-\frac{1}{3}E_1bh_1^3+\frac{1}{3}E_2bh_1^3+\\ &\frac{1}{3}E_3bh_2^3+\frac{1}{3}E_4b(h_2+t_2)^3-\frac{1}{3}E_4bh_2^3\end{aligned}$$

$$D_1=\frac{1}{n(n+2)}\left[\begin{aligned}&h_1^{1-n}E_1b(h_1+t_1)^{n+2}-E_1bh_1^3+\\ &E_2bh_1^3+E_3bh_2^3+\\ &h_2^{1-n}E_4b(h_2+t_2)^{n+2}-E_4bh_2^3\end{aligned}\right]$$

由式(8)可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{M(x)}{D}+\frac{D_1}{D}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{9}$$

利用 $q(x)=\dfrac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}$，结合式(5)可得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{q(x)}{C} \tag{10}$$

利用式(9,10)可得双模量夹芯梁弯曲微分方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{M(x)}{D}+\frac{(D-D_1)}{DC}q(x) \tag{11}$$

对式(11)积分可得双模量夹芯梁挠度曲线方程

$$w(x)=-\frac{1}{D}\iint M(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+\frac{(D-D_1)}{DC}\iint q(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+A_1x+A_2 \tag{12}$$

式中 A_1 和 A_2 为待定常数。

把式(11)代入式(6)可得梁截面弯曲正应力公式为

$$\begin{aligned}
\sigma_1&=\frac{E_1M(x)z}{D}+\frac{E_1D_1q(x)z}{DC}-\frac{E_1z^nq(x)}{nCh_1^{n-1}}\\
\sigma_2&=\frac{E_2M(x)z}{D}+\frac{E_2D_1q(x)z}{DC}-\frac{E_2z^nq(x)}{nCh_1^{n-1}}\\
\sigma_3&=\frac{E_3M(x)z}{D}+\frac{E_3D_1q(x)z}{DC}-\frac{E_3z^nq(x)}{nCh_2^{n-1}}\\
\sigma_4&=\frac{E_4M(x)z}{D}+\frac{E_4D_1q(x)z}{DC}-\frac{E_4z^nq(x)}{nCh_2^{n-1}}
\end{aligned} \tag{13}$$

下面确定双模量夹芯梁截面中性轴位置。由材料力学可得

$$\int_{h_1}^{h_1+t_1}\sigma_1b\,\mathrm{d}z+\int_0^{h_1}\sigma_2b\,\mathrm{d}z=\int_{h_2}^{h_2+t_2}\sigma_4b\,\mathrm{d}z+\int_0^{h_2}\sigma_3b\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

假设双模量夹芯梁处于纯弯曲状态，把式(13)代入式(14)可得

$$h_1^2-2a_1h_1+a_2=0 \tag{15}$$

式中 $a_1=\dfrac{E_1t_1+E_4t_2+E_3h}{E_3-E_2}$

$$a_2=\frac{E_3h^2+E_4t_2^2+2E_4ht_2-E_1t_1^2}{E_3-E_2}$$

由式(1)可求得夹芯层拉伸区高度为

$$h_1=a_1\pm\sqrt{a_1^2-a_2} \tag{16}$$

为了利用 Galerkin 原理研究双模量夹芯梁的自由振动，现计算均布载荷作用下双模量夹芯梁的挠度曲线表达式。

图 2 所示简支梁，利用式(12)梁边界条件可以求得梁挠曲函数为

$$w(x)=\frac{ql^4}{24D}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{2x^3}{l^3}+\frac{x}{l}\right)+\frac{(D-D_1)ql^2}{2DC}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{17}$$

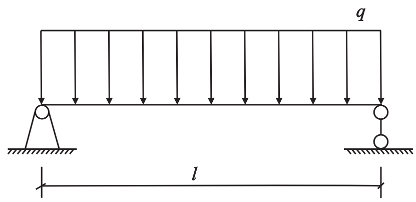

图 2　两端简支

Fig. 2　Simple beam

图 3 所示一端简支一端固支梁，利用式(12)及梁边界条件可以求得梁挠曲函数为

$$w(x)=\frac{ql^4}{48D}\left(\frac{2x^4}{l^4}-\frac{3x^3}{l^3}+\frac{x}{l}\right)+\frac{(D-D_1)ql^2}{2DC}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{18}$$

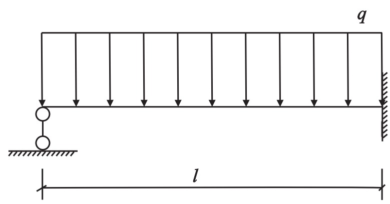

图 3　一端简支，一端固支

Fig. 3　Propped cantilever beam

图 4 所示两端固支梁，利用式(12)及梁边界条件可以求得梁挠曲函数为

$$w(x)=\frac{ql^4}{24D}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{2x^3}{l^3}+\frac{x^2}{l^2}\right)+\frac{(D-D_1)ql^2}{2DC}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{19}$$

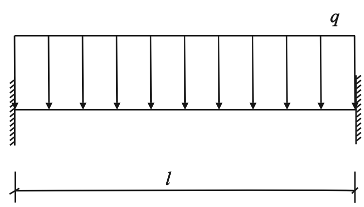

图 4　两端固支

Fig. 4　Fixed-end beam

对图 5 所示悬臂梁，利用式(12)及梁边界条件可以求得梁挠曲函数为

$$w(x)=\frac{ql^4}{24D}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{4x^3}{l^3}+\frac{6x^2}{l^2}\right)+\frac{(D-D_1)ql^2}{2DC}\left(\frac{2x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{20}$$

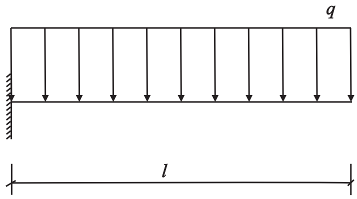

图 5 悬臂梁
Fig. 5 Cantilever beam

3 双模量梁的自由振动

由弹性振动理论可知，梁微段平衡方程为

$$Q=\frac{\partial M}{\partial x}-\rho I\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}+q(x,t)=\rho A\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{21}$$

式中

$$I=bt_1(h_1^2+h_1t_1)+\frac{bt_1^3}{3}+ bt_2(h_2^2+h_2t_2)+\frac{bt_2^3}{3}+\frac{bh_1^3}{3}+\frac{bh_2^3}{3}$$

$A=b(t_1+t_2+h)$，ρ 为梁材料密度。

由式(5,8,21)可得双模量夹芯梁振动微分方程为

$$D\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\rho I\left(1+\frac{(D-D_1)A}{CI}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}+ \rho I\ \frac{\rho A}{C}\ \frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=q(x,t)+\frac{\rho I}{C}\ \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}- \frac{(D-D_1)}{C}\ \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \tag{22}$$

假设双模量夹芯梁自由振动时的位移函数为

$$w(x,t)=Y(x)\ \sin\ (\omega t+\theta) \tag{23}$$

式中 ω 为自由振动基频，θ 为初始相位，$Y(x)$ 为振型函数。

在工程实际中，由于工程设计人员一般对结构的自由振动基频最为关注，因此对式(22)可令 $q(x,t)=0$，且把式(23)代入式(22)可得

$$D\ \frac{\mathrm{d}^4 Y}{\mathrm{d}x^4}+\rho I\omega^2\left(1+\frac{(D-D_1)A}{CI}\right)\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2}+ \rho A\omega^2\left(\frac{\rho I\omega^2}{C}-1\right)Y=0 \tag{24}$$

把振型函数 $Y(x)$ 作为权函数代入式(24)，利用 Galerkin 原理可把式(24)化为

$$\omega^4-\left[B_1\left(\frac{C}{\rho A}+\frac{(D-D_1)}{\rho I}\right)+\frac{C}{\rho I}\right]\omega^2+ \frac{B_2 DC}{\rho^2 AI}=0 \tag{25}$$

式中 $B_1=-\dfrac{\int_0^l \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2}Y\mathrm{d}x}{\int_0^l Y^2\mathrm{d}x}$，$B_2=\dfrac{\int_0^l \frac{\mathrm{d}^4 Y}{\mathrm{d}x^4}Y\mathrm{d}x}{\int_0^l Y^2\mathrm{d}x}$

利用式(25)可以求得双模量夹芯梁自由振动基频为

$$\omega=\left\{\frac{1}{2}\left[B_1\left(\frac{C}{\rho A}+\frac{(D-D_1)}{\rho I}\right)+\frac{C}{\rho I}\right]- \frac{1}{2}\sqrt{\left[B_1\left(\frac{C}{\rho A}+\frac{(D-D_1)}{\rho I}\right)+\frac{C}{\rho I}\right]^2-\frac{4B_2DC}{\rho^2 AI}}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

对图 2 所示简支双模量夹芯梁可取式(17)为振型函数，由 B_1，B_2 表达式可求得

$$B_1=\frac{306C^2l^4+6048C(D-D_1)l^2+30240(D-D_1)^2}{31C^2l^6+612C(D-D_1)l^4+3024(D-D_1)^2l^2} \tag{27}$$

$$B_2=\frac{3024C^2l^2+30240C(D-D_1)}{31C^2l^6+612C(D-D_1)l^4+3024(D-D_1)^2l^2} \tag{28}$$

对图 3 所示一端简支一端固支双模量夹芯梁可取式(18)为振型函数，由 B_1，B_2 表达式可求得

$$B_1=\frac{216C^2l^4+9072C(D-D_1)l^2+120960(D-D_1)^2}{19C^2l^6+936C(D-D_1)l^4+12096(D-D_1)^2l^2} \tag{29}$$

$$B_2=\frac{4536C^2l^2+120960C(D-D_1)}{19C^2l^6+936C(D-D_1)l^4+12096(D-D_1)^2l^2} \tag{30}$$

对图 4 所示两端固支双模量夹芯梁可取式(19)为振型函数，由 B_1，B_2 表达式可求得

$$B_1=\frac{12C^2l^4+1008C(D-D_1)l^2+30240(D-D_1)^2}{C^2l^6+108C(D-D_1)l^4+3024(D-D_1)^2l^2} \tag{31}$$

$$B_2=\frac{504C^2l^2+30240C(D-D_1)}{C^2l^6+108C(D-D_1)l^4+3024(D-D_1)^2l^2} \tag{32}$$

对图 5 所示悬臂双模量夹芯梁可取式(20)为振型函数，由 B_1，B_2 表达式可求得

$$B_1=\frac{-135C^2l^4+756C(D-D_1)l^2+15120(D-D_1)^2}{182C^2l^6+1998C(D-D_1)l^4+6048(D-D_1)^2l^2} \tag{33}$$

$$B_2=\frac{2268C^2l^2+15120C(D-D_1)}{182C^2l^6+1998C(D-D_1)l^4+6048(D-D_1)^2l^2} \tag{34}$$

在式(22)中令 $C\rightarrow\infty$ 可求得忽略剪切变形影

响时双模量夹芯梁的自由振动基频

$$\omega=\sqrt{\frac{B_2 D}{\rho(A+B_1 I)}} \tag{35}$$

在式(35)中令 $B_1=0$ 得忽略剪切变形、转动惯量影响时双模量夹芯梁的自由振动基频

$$\omega=\sqrt{\frac{B_2 D}{\rho A}} \tag{36}$$

4 算例分析

以图6所示各向同性简支梁为例，讨论分析翘曲函数的指数 n 对弯曲挠度、正应力的影响。

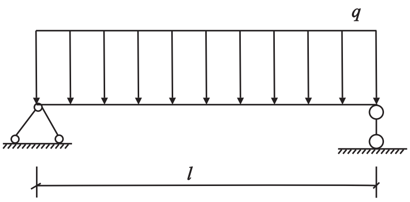

图6 简支梁

Fig. 6 Simply supported beam

令 $t_1=t_2=0$，$E_2=E_3$，由式(12)给出图6所示梁中点挠度为

$$w\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5ql^4}{384D}\left[1+\frac{8(1+\mu)(n+3)h^2}{5(n+2)l^2}\right] \tag{37}$$

当 $\mu=0.25$ 时，由弹性理论求得图6梁中点挠度为

$$w\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{5ql^4}{384D}\left(1+\frac{2.2h^2}{l^2}\right) \tag{38}$$

利用式(13)可得图6所示梁中点最大正应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}\left[1+\frac{4(1+\mu)h^2}{3(n+2)l^2}\right] \tag{39}$$

式中 $M_{\max}=\frac{ql^2}{8}$，$W=\frac{bh^2}{6}$。

当 $\mu=0.25$ 时，由弹性理论求得图6所示梁中点最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}\left(1+\frac{4h^2}{15l^2}\right) \tag{40}$$

把式(37～40)的计算结果列入表1和表2。对表1进行分析，随着指数 n 逐渐增大，本文方法求得的挠度计算值逐渐变小，当 $n=9$ 时，本文方法计算值与弹性理论解误差最小。对表2进行分析，随着指数 n 逐渐增加，本文方法求得的正应力计算值逐渐变小，当 $n=5$ 时，本文方法计算值与弹性理论解误差最小。

表1 梁中点挠度（$\times\frac{5ql^4}{384D}$）（$\mu=0.25$）

Tab. 1 Midpoint deflection of beam

l/h	2	3	4	6	8	10	12
$n=3$	1.600	1.267	1.150	1.067	1.037	1.024	1.017
$n=5$	1.571	1.254	1.143	1.063	1.036	1.023	1.016
$n=7$	1.556	1.247	1.139	1.062	1.035	1.022	1.015
$n=9$	1.545	1.242	1.136	1.061	1.034	1.022	1.015
$n=11$	1.538	1.239	1.135	1.060	1.034	1.022	1.015
$n=13$	1.533	1.237	1.133	1.059	1.033	1.021	1.015
弹性解	1.550	1.244	1.138	1.061	1.034	1.022	1.015

表2 最大正应力（$\times\frac{M_{\max}}{W}$）（$\mu=0.25$）

Tab. 2 Maximum normal stress

l/h	2	3	4	6	8	10	12
$n=3$	1.083	1.037	1.021	1.009	1.005	1.003	1.002
$n=5$	1.060	1.026	1.015	1.007	1.004	1.002	1.002
$n=7$	1.046	1.021	1.012	1.005	1.003	1.002	1.001
$n=9$	1.038	1.017	1.009	1.004	1.002	1.002	1.001
$n=11$	1.032	1.014	1.008	1.004	1.002	1.001	1.001
$n=13$	1.028	1.012	1.007	1.003	1.005	1.001	1.001
弹性解	1.067	1.030	1.017	1.007	1.004	1.003	1.002

为了进一步检验本文方法计算梁挠度的精度，下面采用本文方法计算文献[10]三点弯曲试验的泡桐木夹芯梁的中点挠度。图7为文献[10]三点弯曲试验的泡桐木夹芯梁，夹芯梁计算参数为，上下面板厚度 $t_1=t_2=2.4$ mm，梁高 $h=38$ mm，梁宽 $b=80$ mm，弹性模量 $E_1=E_4=8730$ MPa，$E_2=E_3=1469$ MPa，剪切模量 $G=209$ MPa，计算结果列入表3～表5。

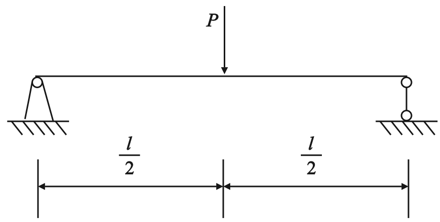

图7 夹芯梁

Fig. 7 Sandwich beam

由表3可知，随着指数的增大，本文方法计算结果与试验值的误差越来越小。由表4可知，当 $n=9$ 时本文方法计算结果与试验值的误差最小。由表5可知，随着指数 n 的增大，本文方法计算结果与试验值的误差越来越小，但最小误差也有

16.40%,超过一般工程允许误差5%。造成误差较大原因有可能是以下因素,一是夹芯梁在制作过程存在缺陷;二是加载时压偏产生了扭转;三是夹芯梁的支承不够理想。从表3~表5可以看出,本文方法计算结果总体上与试验值相符,说明式(12)计算精度是可靠的。

表3 梁中点挠度(单位:mm)
(l=150 mm,P=19.92 kN)
Tab.3 Midpoint deflection of beam (Unit:mm)

n	3	5	7	9	11	13
本文解	1.919	1.895	1.878	1.865	1.852	1.840
文献[10]试验值	1.81					
误差/%	6.02	4.49	3.76	3.04	2.32	1.66

表4 梁中点挠度(单位:mm)
(l=300 mm,P=19.76 kN)
Tab.4 Midpoint deflection of beam (Unit:mm)

n	3	5	7	9	11	13
本文解	8.178	8.130	8.098	8.071	8.046	8.022
文献[10]试验值	8.06					
误差/%	1.46	0.87	0.47	0.14	−0.17	−0.47

表5 梁中点挠度(单位:mm)
(l=450 mm,P=17.022 kN)
Tab.5 Midpoint deflection of beam (Unit:mm)

n	3	5	7	9	11	13
本文解	19.982	19.920	19.878	19.844	19.812	19.781
文献[10]试验值	16.99					
误差/%	17.61	17.25	17.00	16.80	16.61	16.43

为了说明本方法计算梁自由振动基频的精度,取各向同性梁计算参数为,$b=0.3\text{m}$,$h=0.4\text{m}$,$E=3.6\times10^{10}$ N/m,$G=1.5\times10^{10}$ N/m,$\rho=7.757\times10^3$ kg/m^3。

把式(36)计算的各向同性梁的基频分别列入表6~表9,以便讨论分析。

由基频表6~表9可以看出,本文把各向同性梁在均布载荷作用下的梁函数作为权函数,利用Galerkin原理得到了忽略剪切变形、转动惯量影响时各向同性梁基频计算公式(36)的计算结果,与振动理论不考虑剪切变形、转动惯量影响时经典解的误差很小且基本相吻合,这说明本文方法的计算精度非常高。

表6 简支梁基频(单位:Hz)
Tab.6 Fundamental frequency of simple deep beam(Unit:Hz)

l/m	4	3	2	1
式(36)	153.555	272.987	614.220	2456.879
经典解	153.290	272.515	613.159	2452.636

表7 一端简支一端固支梁基频(单位:Hz)
Tab.7 Fundamental frequency of propped cantilever deep beam(Unit:Hz)

l/m	4	3	2	1
式(36)	240.222	427.062	960.890	3843.558
经典解	239.759	426.238	959.036	3836.142

表8 两端固支梁基频(单位:Hz)
Tab.8 Fundamental frequency of fixed-end deep beam(Unit:Hz)

l/m	4	3	2	1
式(36)	349.035	620.507	1396.140	5584.560
经典解	347.837	618.377	1391.349	5565.395

表9 悬臂梁基频(单位:Hz)
Tab.9 Fundamental frequency of cantilever deep beam(Unit:Hz)

l/m	4	3	2	1
式(36)	54.900	97.624	219.805	882.506
经典解	54.658	97.170	218.632	874.527

注:表6~表9中经典解是指不考虑剪切变形、转动惯量影响时,振动理论给出的梁基频。

为了进一步阐述本方法在双模量夹芯梁自由振动的基频计算中的应用,取双模量夹芯梁计算参数为$l=230$ mm,$b=25$ mm,$h=20$ mm,面板厚度$t_1=t_2=1.5$ mm,$E_1=E_4=70$ GPa,$E_2=315$ MPa,$E_3=28$ MPa,G=25.71 MPa,ρ=786.957 kg/m^3。把计算结果列入表10进行讨论分析。

表10 双模量夹芯梁基频(单位:Hz)
Tab.10 Fundamental frequency of double modulus sandwich beam(Unit:Hz)

约束形式	两端简支	一端简支一端固支	两端固支	悬臂
式(26)	830.252	860.647	871.750	763.282
式(35)	7319.809	11443.026	16621.356	2629.509
式(36)	7354.352	11505.198	16716.665	2628.574
经典解	7341.650	11483.000	16659.297	2617.784

表10中本文把双模量夹芯梁在均布载荷作用下

的梁函数作为权函数,利用 Galerkin 原理得到了忽略剪切变形影响时基频计算公式(35)的计算结果,以及忽略剪切变形、转动惯量影响时基频计算公式(36)的计算结果,与振动理论不考虑剪切变形、转动惯量影响时经典解的误差不大,这说明转动惯量对双模量夹芯梁自由振动的基频影响不大。但是,由考虑剪切变形、转动惯量影响时基频计算公式(26)的计算结果可以看出,剪切变形对双模量夹芯梁自由振动的基频影响相当大。因此计算双模量夹芯梁自由振动的基频时,即使是细长的双模量夹芯梁也必须要考虑剪切变形的影响。式(26,35,36)计算夹芯梁自由振动的基频时,仅是代数运算且计算过程非常简便,而经典振动理论计算一端简支一端固支梁基频、两端固支梁基频、悬臂梁基频时,存在需求解超越方程、计算过程复杂繁琐、求解难度大等不足。

5 结 论

(1)本文利用弹性力学平面问题几何方程,建立了双模量夹芯梁剪切应变分量与高阶轴向位移分量和弯曲挠度分量的关系式,推导了双模量夹芯梁上下表板及拉伸区、压缩区正应力表达式。根据材料力学平衡原理,推导了双模量夹芯梁弯曲挠度曲线方程,并给出了双模量夹芯梁拉伸区高度计算公式。

(2)通过算例分析,发现随着指数 n 逐渐增大,本文方法求得的挠度计算值逐渐变小,当 $n=9$ 时,本文方法计算值与弹性理论解误差最小。随着指数 n 逐渐增加,本文方法求得的正应力计算值逐渐变小,当 $n=5$时,本文方法计算值与弹性理论解误差最小。

(3)本文双模量夹芯梁挠度方法的计算结果与文献[10]的试验值相符,这说明本文的方法计算结果是可靠的。本文把各向同性梁在均布载荷作用下的梁函数作为权函数,利用 Galerkin 原理得到了忽略剪切变形、转动惯量影响时各向同性梁基频计算公式的计算结果,与振动理论不考虑剪切变形、转动惯量影响时经典解的误差很小,基本相吻合,这说明本文方法的计算精度非常高。

(4)由考虑剪切变形、转动惯量影响时基频计算公式的计算结果可以看出,剪切变形对双模量夹芯梁自由振动的基频影响相当大。因此计算双模量夹芯梁自由振动的基频时,即使是细长的双模量夹芯梁也必须要考虑剪切变形的影响。本文方法计算夹芯梁自由振动基频时,仅是代数运算且计算过程非常简便,克服了振动理论计算一端简支一端固支梁的基频、两端固支梁的基频、悬臂梁的基频时,存在的需求解超越方程、计算过程复杂繁琐、求解难度大的不足。

参考文献(References):

[1] 吴 晓.用高阶剪切变形理论研究双模量梁的弯曲[J].力学季刊,2023,**44**(1):210-217.(WU Xiao. Research on the bending of double modulus beam by higher-order shear deformation theory[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*,2023,**44**(1):210-217.(in Chinese))

[2] 赵建华,顾文胤,姚文娟.不同模量石墨简支梁的弹塑性分析及试验研究[J].科学技术与工程,2021,**21**(3):1116-1122.(ZHAO Jian-hua,GU Wen-yin,YAO Wen-juan. Elastoplastic analysis and experimental study of simply supported graphite beams with different moduli[J]. *Science Technology and Engineering*,2021,**21**(3):1116-1122.(in Chinese))

[3] 杨翔宇,霍瑞丽,李季乐,等.泡沫和轻木夹芯复合材料梁疲劳性能的对比[J].材料科学与工程学报,2022,**40**(4):635-639,686.(YANG Xiang-yu,HUO Rui-li,LI Ji-le,et al. Fatigue behavior comparison between sandwich composite beams with foam or balsa wood core[J]. *Journal of Materials Science and Engineering*,2022,**40**(4):635-639,686.(in Chinese))

[4] 朱 凌,郭开岭,余同希,等.泡沫金属夹芯梁在重复冲击下的动态响应[J].爆炸与冲击,2021,**41**(7):60-70.(ZHU Ling,GUO Kai-ling,YU Tong-xi,et al. Dynamic responses of metal foam sandwich beams to repeated impacts[J]. *Explosion and Shock Waves*,2021,**41**(7):60-70.(in Chinese))

[5] 胡浩中,李华东,梅志远,等.复合材料格栅增强夹芯梁弯曲性能研究[J].华中科技大学学报(自然科学版),2021,**49**(10):36-41.(HU Hao-zhong,LI Hua-dong,MEI Zhi-yuan,et al. Study on bending property of composite grid reinforced sandwich beam[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*(Natural Science Edition),2021,**49**(10):36-41.(in Chinese))

[6] 张玲峰,王 璐,刘伟庆.多轴向增强拉挤复合材料木夹芯梁弯曲试验[J].华中科技大学学报(自然科学版),2020,**48**(4):18-23.(ZHANG Ling-feng,WANG Lu,LIU Wei-qing. Bending test of multi-axial reinforced pultruded composite wood-cored beam[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*(*Natural Science Edition*),2020,**48**(4):18-23.(in Chinese))

[7] 吴 晓.用能量法研究夹芯梁的弯曲挠度计算[J].复合材料科学与工程,2020,**323**(12):21-25.(WU Xiao. Research on bending deflection of sandwich beam by energy method[J]. *Composites Science and Engineering*,2020,**323**(12):21-25.(in Chinese))

[8] 吴 晓.由夹芯梁弯曲谈剪切效应对许用弯矩的影响[J].力学与实践,2020,**42**(6):797-801.(WU Xiao. Discussion of shear effect on allowable bending moment nased on the bending of sandwich beam[J]. *Mechanics in Engineering*, 2020, **42** (6): 797-801. (in Chinese))

[9] 洪俊青,刘伟庆,方 海,等.泡桐木复合夹芯板面内轴向承载能力分析[J].建筑结构,2017,**47**(2):84-89,95.(HONG Jun-qing, LIU Wei-qing, FANG Hai, et al. Load carrying capacity analysis of paulownia core sandwich board under in-plane axial load[J]. *Building Structure*, 2017, **47**(2):84-89,95.(in Chinese))

[10] 方 海,刘伟庆,陆伟东,等.泡桐木夹层结构材料的力学性能[J].南京工业大学学报(自然科学版),2011,**33**(5):7-12.(FANG Hai, LIU Wei-qing, LU Wei-dong, et al. Mechanics properties of paulownia core sandwich composites[J]. *Journal of Nanjing University of Technology*(Natural Science Edition), 2011,**33**(5):7-12.(in Chinese))

[11] 吴 晓,黄志刚,杨立军.考虑剪切效应时双模量梁的自由振动[J].振动与冲击,2015,**34**(24):160-163,176.(WU Xiao, HUANG Zhi-gang, YANG Li-jun. Natural vibration of bimodulous beam considering shear effect[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015,**34**(24):160-163,176.(in Chinese))

[12] 吴 晓.双模量泡沫铝芯夹层梁的自由振动分析[J].应用力学学报,2018,**35**(5):1077-1082,1188.(WU Xiao. Free vibration analysis of bimodulous aluminum foam core laminated beam[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, **35**(5): 1077-1082, 1188.(in Chinese))

[13] 杨 洋,姚文娟.不同模量铁木辛柯梁的自由振动特性分析[J].上海大学学报(自然科学版),2019,**25**(6):978-989.(YANG Yang, YAO Wen-juan. Analytical solution for free vibration of Timoshenko beam with different modulus[J]. *Journal of Shanghai University*(Natural Science Edition), 2019, **25**(6): 978-989.(in Chinese))

Study on the fundamental frequency of free vibration of double modulus sandwich beams with higher-order shear theory

WU Xiao*[1,2], XIAO Zhen[1]

(1. School of Intelligent Building, Changde College, Changde 415000, China;

2. College of Mechanical Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract: Based on a high-order shear theory, the fundamental frequency problems of free-vibration of double-modulus sandwich beams were studied. Firstly, it was assumed that the axial displacement of a double-modulus sandwich beam was a high-order function with the variable along the beam height direction. Then, according to the differential relationship between shear strain and axial displacement and bending deflection, the expression of axial displacement was determined, the bending differential equation was derived, and the deflection expression of the double-mode sandwich beam under a uniform load was obtained. When the calculation results of this method are compared with relevant test results, it could be found that the method had a high computational accuracy. On the basis of the study mentioned above, the expression of the deflection curve under a uniform load was considered the mode function of free vibration for the double-modulus sandwich beam, the free vibration of the double-modulus sandwich beam was studied with Galerkin method, and the fundamental frequency expression of the free vibration was obtained. Example analysis showed that it had a high accuracy in calculating the fundamental frequency of the double-modulus sandwich beam.

Key words: higher-order shear; double modulus; sandwich beam; free vibration; fundamental frequency