DOI:10.7511/jslx20231025001

超收敛等几何无网格配点法

齐栋梁*， 刘建秀

(河北水利电力学院 土木工程系，沧州 061001)

摘 要：无网格法和等几何分析采用的形函数或基函数均具有高阶光滑特性，但应用于配点法分析时表现出奇数次基函数精度掉阶问题。本文以等几何基函数的一致性条件和无网格再生梯度理论为基础，提出了一种超收敛等几何无网格配点法。首先基于等几何基函数的无网格表示理论，构建了由等几何基函数再生点定义的混合梯度基向量，发展了一种等几何基函数梯度的无网格衍化形式，数值实现非常简捷。然后，将无网格法中形函数变换技术和递推梯度算法引入到配点法分析中，构建了变换等几何无网格形函数的二阶递推梯度。该梯度构造形式与传统等几何基函数梯度相比，满足额外高一阶再生条件，进而为实现超收敛配点法分析提供了保障。最后，文中通过一系列数值算例系统验证了超收敛等几何无网格配点法的精度和收敛性。数值结果表明，所提方法比传统等几何配点法具有更高计算精度，且在奇数次基函数下误差收敛阶次比传统方法高两阶，呈现超收敛特性。

关键词：无网格法；等几何配点法；再生梯度；递推梯度；超收敛

中图分类号：O242.21 **文献标志码**：A **文章编号**：1007-4708(2025)03-0485-08

1 引 言

无网格法[1-4]不依赖于有序的单元拓扑连接关系，只需离散节点的空间信息便可构建高阶光滑连续的形函数，有效缓解了网格畸变引起的精度下降问题。因此，近年来该类方法广泛应用于处理各种实际复杂工程问题，如薄板壳高阶问题[5]、冲击破坏分析[6]、裂纹扩展模拟[7]等。然而，无网格形函数在离散节点上通常不具有插值特性。采用伽辽金型无网格法进行数值计算时，施加边界条件通常需要经过特殊处理[8,9]，且还需要引入背景网格进行数值积分，降低了计算效率。另一方面，基于强形式离散的配点型无网格法不需要数值积分，可直接施加边界条件，其计算效率一般要高于伽辽金型无网格法。

传统配点型方法中的刚度矩阵通常不具有对称性，可能会因求解不稳定产生精度下降等问题。为了提高该类方法的计算精度，诸多学者做了大量的研究工作，如最小二乘无网格配点法[10]、局部径向基无网格配点法[11]、自由单元配点法[12]、有限元配点法[13]、稳定配点法[14]等。需要指出，配点法通常需要形函数的高阶梯度，而传统无网格形函数的高阶梯度计算复杂且耗时。因此，Breitkopf 等[15]利用计算辅助点处的一阶导数构造近似所需要的二阶导数。Chi 等[16]基于无网格法再生条件构造了无网格形函数的再生梯度，提高了该类方法实际应用中高阶梯度的计算效率。此外，传统无网格配点法存在采用奇数次基函数计算精度掉阶的问题，王东东等[17,18]基于局部截断误差理论和无网格形函数的一致性条件提出了一套较为系统的配点法精度度量理论，并通过引入梯度光滑方法建立了二阶和四阶问题的超收敛无网格配点法。Qian 等[19]利用积分约束条件建立形函数梯度并应用于配点法分析，该方法同样避免了高阶形函数导数的计算。

与无网格法类似，等几何分析中基函数的高阶光滑性也使其适用于配点法分析[20]。传统等几何配点法的精度收敛特性也依赖于基函数阶次的奇偶性，即采用奇数次 B 样条基函数进行求解时，场变量误差收敛率较其基函数阶次下降一阶。为了

收稿日期：2023-10-25；**修改稿收到日期**：2024-03-12.

基金项目：河北省自然科学基金(A2022412001)；河北水利电力学院基本科研业务费研究项目(SYKY2201)；河北水利电力学院博士启动资金(SYBJ2201)资助项目.

作者简介：齐栋梁*(1987-)，男，博士，讲师(E-mail：qidongliang@hbwe.edu.cn).

引用本文：齐栋梁，刘建秀. 超收敛等几何无网格配点法[J]. 计算力学学报，2025，**42**(3)：485-492.
QI Dong-liang，LIU Jian-xiu. A superconvergent isogeometric meshfree collocation method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2025，**42**(3)：485-492.

提升该类方法的精度收敛阶次,国内外诸多学者对等几何配点法中配点位置进行了优化研究[21-24]。然而,这些不同类型的超收敛点需要通过误差分析计算得到。最近,王东东等[25]通过重构等几何分析的一致性条件,提出了一种基于 Greville 点的超收敛等几何配点法,该方法将奇数次 B 样条基函数下场变量 L_2 和 H_1 误差提升了两阶。值得注意的是,等几何配点法与无网格配点法具有相同的收敛规律,但无网格形函数并不具有等几何 NURBS 基函数几何精确的特性。虽然现有等几何基函数的无网格表示理论[26-28]搭建起了无网格法和等几何分析方法的连接桥梁,但未解决高阶梯度构造复杂且计算效率低下的问题。

鉴于此,本文构建了由等几何基函数再生点定义的混合梯度基向量,通过结合无网格法中再生梯度的理论思想,提出了等几何基函数梯度的无网格衍化形式,避免了复杂耗时的等几何无网格形函数直接梯度计算。以二维二次形函数梯度为例,数值验证了特定影响域条件下构造的无网格再生梯度与标准等几何基函数梯度之间等价性;并对比分析了两者再生条件的稳定性。结果表明,直接梯度的再生条件并不稳定,而构造的无网格再生梯度在不同节点序列精确满足不同阶次的再生条件,可直接用于配点法分析。此外,文中利用无网格形函数变换理论发展了一种具有插值特性且保持几何精确特性的变换等几何无网格形函数。在此基础上,引入无网格法中高效递推梯度构造方法,提出了一种超收敛等几何无网格配点法。最后,通过一系列典型算例系统验证了所提方法的精度和收敛性。

2 等几何配点法离散方程

不失一般性,本文考虑如下场变量为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 的控制方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{L}}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x}\in\Omega) \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{u}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x}\in\Gamma^{u}) \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{t}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x}\in\Gamma^{t}) \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 为二阶变分算子,如在势问题和弹性力学问题中,$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 分别为拉普拉斯算子和弹性变分算子;$b(x)$ 为体力项或源项;$\boldsymbol{\mathcal{B}}^u$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{B}}^t$ 分别代表本质边界 Γ^u 和自由边界 Γ^t 算子,$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ 为相应预先给定的 Γ^u 和 Γ^t 边界值。

在等几何分析中,通常采用具有几何精确性的 NURBS 基函数 $R_A(\boldsymbol{\xi})$ 来离散场变量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$,相应近似解 $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ 表示为

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})=\sum_{A=1}^{NC}R_A(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}_A \tag{2}$$

相应计算模型的几何形状描述为

$$x(\xi)=\sum_{A=1}^{NC}R_A(\xi)P_A \tag{3}$$

式中 $\{\boldsymbol{P}_A\}_A^{NC}$ 为几何描述的控制点,$\boldsymbol{d}_A$ 为控制点 $\boldsymbol{P}_A$ 对应的场变量系数。

在等几何配点法框架下,将场变量近似式(2)和几何精度描述式(3)代入控制方程(1),可得到离散配点方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}=\boldsymbol{f} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为刚度矩阵、位移系数列向量和力列向量。

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}=[\boldsymbol{K}^i \quad \boldsymbol{K}^u \quad \boldsymbol{K}^t]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{f}=[\boldsymbol{f}^i \quad \boldsymbol{f}^u \quad \boldsymbol{f}^t]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}^i_{AB}=\boldsymbol{\mathcal{L}}[R_B(\boldsymbol{x}_A)],\ \boldsymbol{f}^i_A=-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_A) & \boldsymbol{x}_A\in\Omega \\ \boldsymbol{K}^u_{AB}=\boldsymbol{\mathcal{B}}^u[R_B(\boldsymbol{x}_A)],\ \boldsymbol{f}^u_A=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_A) & \boldsymbol{x}_A\in\Gamma^u \\ \boldsymbol{K}^t_{AB}=\boldsymbol{\mathcal{B}}^t[R_B(\boldsymbol{x}_A)],\ \boldsymbol{f}^t_A=\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_A) & \boldsymbol{x}_A\in\Gamma^t \end{cases} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{x}_A=\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)$ 为参数空间点 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_A$ 在物理空间中的投影点,$\bar{\boldsymbol{\xi}}_A$ 代表等几何参数空间上配点的位置。在等几何配点法中,配点位置选择是一个关键问题[20-24]。其中,Greville 点计算简单且应用广泛,如二维情况下的 Greville 点 $\bar{\xi}_A$ 可定义为[26]

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_A=(\xi_a^{[1]},\eta_b^{[1]})=\Big(\sum_{i=1}^{p}\xi_{a+i},\sum_{i=1}^{p}\eta_{b+i}\Big)/p \tag{7}$$

其中 p 为配点分析时采用基函数的阶次。

3 等几何分析的无网格表示理论

3.1 等几何基函数的再生核无网格表示形式

根据等几何基函数的无网格表示理论[27],等几何基函数可采用无网格形式表示为

$$\Psi_A(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})\varphi_s(\boldsymbol{\xi}_A^{[1]}-\boldsymbol{\xi}) \tag{8}$$

其中 $\xi_A^{[\cdot]}$ 为 B 样条基函数再生点,$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})$ 为混合基向量,如二维情况下 $\boldsymbol{p}$ 次混合基向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})=\{&1,\xi_a^{[1]},\eta_b^{[1]},\xi_a^{[1]}\eta_b^{[1]},(\xi_a^{[2]})^2,(\eta_b^{[2]})^2,\\ &\xi_a^{[1]}(\eta_b^{[2]})^2,(\xi_a^{[2]})^2\eta_b^{[1]},(\xi_a^{[2]})^2(\eta_b^{[2]})^2,\\ &\cdots,(\xi_a^{[p]})^p,(\eta_b^{[p]})^p,\cdots,(\xi_a^{[p]})^p(\eta_b^{[p]})^p\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{9}$$

矩量矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$ 为

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{A}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})\varphi_s(\boldsymbol{\xi}_A^{[1]}-\boldsymbol{\xi}) \tag{10}$$

式(8)和式(10)中的核函数 $\varphi_s(\boldsymbol{\xi}_A^{[1]}-\boldsymbol{\xi})$ 是以一阶

再生点 $\boldsymbol{\xi}_I^{[1]}$ 作为无网格离散节点，进而确定影响域范围内任意计算点的权重值。基于等几何基函数的无网格表示形式(8)，进一步引入控制几何形状的权重因子，便建立了用于等几何分析的 NURBS 基函数 $\bar{R}_A(\boldsymbol{\xi})$，有

$$\bar{R}_A(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Psi_A(\boldsymbol{\xi})w_A}{\sum_{B=1}^{\mathrm{NP}} \Psi_B(\boldsymbol{\xi})w_B} \tag{11}$$

其中 w_A 和 w_B 为权重因子。

在配点法分析中，往往需要形函数或基函数的高阶梯度。由于存在矩量矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\xi})$，等几何无网格形函数若采用直接求导构造高阶梯度计算，其结构形式则会变得更加复杂[29]。与此同时，图 1 给出了二次混合基函数下等几何无网格形函数直接梯度的再生条件数值验证结果，其中黑色圆点为一阶再生点，黑色菱形点为二阶再生点。从图 1 可以看出，等几何无网格形函数直接梯度的多项式再生条件在分析域内出现了不同程度的振荡现象，无法保证数值计算结果收敛，从而不便直接应用于配点法分析。

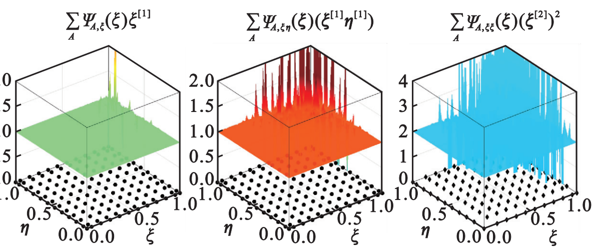


图 1　二次混合基函数下等几何无网格形函数梯度的再生条件数值验证

Fig. 1　Numerical verification of the reproducing conditions for 2D isogeometric meshfree shape functions using quadratic mixed basis function

3.2　等几何基函数梯度的再生核无网格表示形式

为了消除因矩量矩阵的逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})$ 导数运算导致的形函数梯度再生条件不稳定问题，本文基于无网格形函数再生梯度理论[2,16]对等几何基函数梯度的无网格表述形式进行了重构，具体表示为

$$\Psi_{A,\boldsymbol{\alpha}}^{[p]}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{p}_{,\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]})\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}_A^{[\cdot]})\varphi_s(\boldsymbol{\xi}_A^{[1]}-\boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

其中多重指标符号 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_{sd}})^{\mathrm{T}}$，$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n_{sd}}\alpha_i \leqslant p$，$n_{sd}$ 为空间维数。$\Psi_{A,\alpha}^{[p]}(\boldsymbol{\xi})$ 为无网格形函数的 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 阶再生梯度。$\boldsymbol{p}_{,\alpha}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]})$ 为梯度基向量，如二维情况下的一阶和二阶梯度基向量为

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{,\xi}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]}) = \{0,1,0,\eta,2\xi,0,\eta^2,2\xi\eta,2\xi\eta^2,\cdots, \\ \qquad p\xi^{p-1},0,\cdots,p\xi^{p-1}\eta^p\}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{,\eta}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]}) = \{0,0,1,\xi,0,2\eta,2\xi\eta,\xi^2,2\xi^2\eta,\cdots, \\ \qquad 0,p\eta^{p-1},\cdots,p\xi^p\eta^{p-1}\}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_{,\xi\xi}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]}) = \{0,0,0,0,2,0,0,2\eta,2\eta^2,\cdots, \\ \qquad p(p-1)\xi^{p-2},0,\cdots,p(p-1)\xi^{p-2}\eta^p\}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{,\eta\eta}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]}) = \{0,0,0,0,0,2,2\xi,0,2\xi^2,\cdots,0, \\ \qquad p(p-1)\eta^{p-2},\cdots,p(p-1)\xi^p\eta^{p-2}\}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{p}_{,\xi\eta}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]}) = \{0,0,0,1,0,0,2\eta,2\xi,4\xi\eta,\cdots,0, \\ \qquad 0,\cdots,p^2\xi^{p-1}\eta^{p-1}\}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{13}$$

由式(12)可见，等几何基函数梯度的无网格再生梯度构造形式与式(8)十分类似，从构造上仅是将式(8)中的基向量 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]})$ 换成了梯度基向量 $\boldsymbol{p}_{,\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}^{[\cdot]})$。在二维情况下，将一阶和二阶梯度基向量式(13)代入式(12)可直接获得相应阶次再生核无网格表述的等几何基函数梯度，其计算量与形函数本身相当，显著提高了梯度计算效率。

当无网格核函数的影响域取为等几何 B 样条基函数覆盖域的大小时，图 2 给出了二维情况下二次 B 样条基函数梯度的再生核无网格表述结果，可以看出，采用所提梯度基向量构造的无网格再生梯度等价于相应 B 样条基函数梯度。图 3 给出了二次基混合函数下无网格再生梯度的再生条件，与图 1 等几何无网格形函数直接梯度的再生条件相比，所提再生梯度在不同节点序列精确满足不同阶次的多项式再生条件，因此可以直接应用于配点法分析。

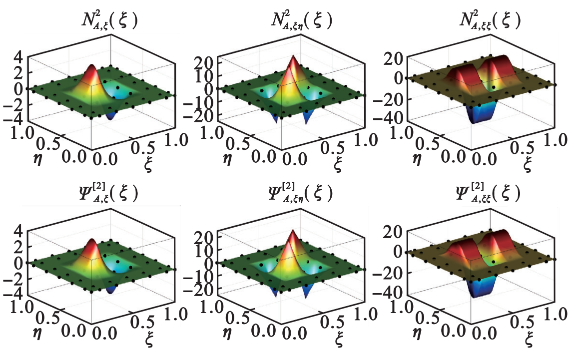


图 2　二维二次 B 样条基函数梯度的再生核无网格表述

Fig. 2　Reproducing kernel meshfree representation of the gradients for 2D quadratic B-spline basis functions

3.4　递推变换等几何无网格形函数再生梯度

通过将基函数变换技术[25]与等几何基函数的无网格表示理论[27]相结合，本文构建了一种具有插值特性并保持几何精确特性的保形变换等几何无网格形函数，具体形式为

$$\hat{R}_B(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{NC} T_{BA}^{-1}\bar{R}_A(\boldsymbol{\xi}),\ T_{AB} = \bar{R}_A(\boldsymbol{x}_B) \tag{14}$$

其中 $\hat{R}_B(\boldsymbol{\xi})$ 表示物理空间相应 Greville 点 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_B)$ 的变换形函数。$\bar{R}_A(\boldsymbol{\xi})$ 为采用等几何无网格形函数表示的 NURBS 基函数。为了便于分析，将 NURBS 基函数和形函数均建立在同一个空间坐标中，即 $(\xi,\eta)=(x,y)$。在权重相同的情况下，NURBS 基函数等价于 B 样条基函数，进而等价于等几何无网格形函数。

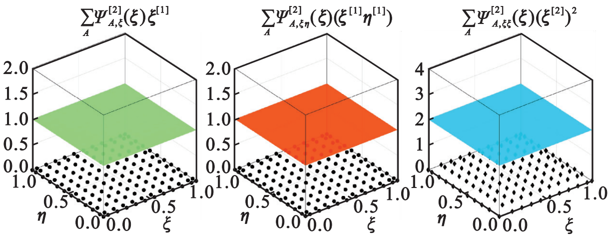


图 3　二维二次混合基函数下无网格再生梯度的再生条件数值验证

Fig. 3　Numerical verification of the reproducing conditions for 2D meshfree reproduced gradients using quadratic mixed basis function

对式(14)进行微分，可得 p 次基函数下一阶和二阶变换梯度

$$\begin{cases}\hat{R}_{B,\alpha_1}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{A=1}^{NC}T^{-1}_{BA}\bar{R}^{[p]}_{A,\alpha_1}(\boldsymbol{\xi})\\ \hat{R}_{B,\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{A=1}^{NC}T^{-1}_{BA}\bar{R}^{[p]}_{A,\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{\xi})\end{cases}\tag{15}$$

其中 $\bar{R}^{[p]}_{A,\alpha_1}(\boldsymbol{\xi})$ 和 $\bar{R}^{[p]}_{A,\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{\xi})$ 可通过式(11)求导获得，但需将其中涉及的相应形函数梯度替换为式(12)再生梯度形式。

为了提高二阶梯度的计算效率，进一步引入递推梯度方法[25]，可得二阶递推变换梯度为

$$\tilde{R}_{B,\alpha_1\alpha_2}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{A=1}^{NC}\hat{R}_{A,\alpha_2}(\boldsymbol{\xi})\hat{R}_{B,\alpha_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\tag{16}$$

其中 $\hat{R}_{B,\alpha_1}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)$ 为变换等几何无网格形函数 $\hat{R}_B(\boldsymbol{\xi})$ 在配点 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_A$ 处的一阶变换梯度。在物理空间中，p 阶变换等几何无网格形函数的二阶递推梯度的再生条件，有

$$\begin{cases}\sum_{B=1}^{NC}\tilde{R}_{B,xx}(\boldsymbol{x})\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x})=2\delta_{i2}\delta_{j0}\\ \sum_{B=1}^{NC}\tilde{R}_{B,yy}(\boldsymbol{x})\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x})=2\delta_{i0}\delta_{j2}\\ \sum_{B=1}^{NC}\tilde{R}_{B,xy}(\boldsymbol{x})\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x})=\delta_{i1}\delta_{j1}\end{cases}\tag{17}$$

式中 $0\leqslant i+j\leqslant p+1$，所提二阶递推梯度除了满足传统 p 阶再生条件外，还满足 $(p+1)$ 阶额外高阶的再生条件。从图 4 可以看出，二阶递推变换梯度不仅在固定离散点(Greville 点)满足标准二阶再生条件，除边界区域外还满足额外高一阶的再生条件，而二阶变换梯度无法精确满足额外高阶的再生条件。

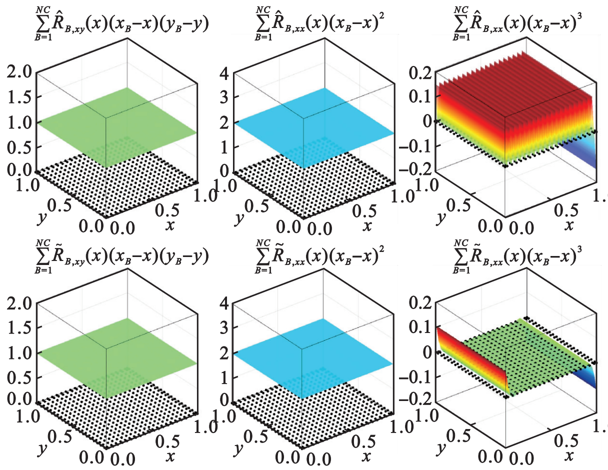


图 4　二维二次混合基函数下二阶梯度再生条件对比

Fig. 4　Comparison of the reproducing conditions for the 2D second order gradients using quadratic mixed basis function

4　超收敛等几何无网格配点法

根据配点法的精度度量理论[18,19,27]可知，形函数或基函数梯度的额外高阶再生条件是配点法实现超收敛计算的本质原因。因此，将二阶递推变换梯度用于配点法分析，便形成了超收敛等几何无网格配点法，由式(16)计算得二阶递推变换梯度为

$$\tilde{R}_{B,x_ix_j}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_C)=\sum_{A=1}^{NC}\hat{R}_{A,x_j}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_C)\hat{R}_{B,x_i}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\tag{18}$$

方便起见，将 Greville 点处的一阶梯度写为矩阵形式

$$\boldsymbol{G}^{[x]}=[G^{[x]}_{AB}],\ \boldsymbol{G}^{[y]}=[G^{[y]}_{AB}]\tag{19}$$

其中

$$G^{[x]}_{AB}=\hat{R}_{B,x}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A),\ G^{[y]}_{AB}=\hat{R}_{B,y}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\tag{20}$$

注意到式(18)描述的二阶递推梯度实质上是由两个式(20)所示一阶梯度矩阵相乘得到，具体可写为

$$\boldsymbol{G}^{[xx]}=\boldsymbol{G}^{[x]}\boldsymbol{G}^{[x]},\boldsymbol{G}^{[yy]}=\boldsymbol{G}^{[y]}\boldsymbol{G}^{[y]},\boldsymbol{G}^{[xy]}=\boldsymbol{G}^{[y]}\boldsymbol{G}^{[x]}\tag{21}$$

相应矩阵元素为

$$\begin{aligned}&G^{[xx]}_{AB}=\tilde{R}_{B,xx}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A),G^{[yy]}_{AB}=\tilde{R}_{B,yy}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\\&G^{[xy]}_{AB}=\tilde{R}_{B,xy}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_A)\end{aligned}\tag{22}$$

对于势问题而言，其刚度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{K}}^i$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^i=\boldsymbol{G}^{[xx]}+\boldsymbol{G}^{[yy]}\tag{23}$$

针对弹性力学问题，刚度矩阵 $\tilde{\boldsymbol{K}}^i$ 可写为

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^i=\tilde{\boldsymbol{K}}^{[xx]}+\tilde{\boldsymbol{K}}^{[yy]}+\tilde{\boldsymbol{K}}^{[xy]}\tag{24}$$

其中

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{K}}^{[xx]} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\boldsymbol{G}^{[xx]} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{[xx]} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{K}}^{[yy]} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{[yy]} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\boldsymbol{G}^{[yy]} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{K}}^{[xy]} = \dfrac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{[xy]} \\ \boldsymbol{G}^{[xy]} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{25}$$

式中 E 和 ν 分别为弹性模量和泊松比。

5 数值算例

通过典型数值算例验证所提方法的收敛性和精度，其中 IGC 表示传统等几何配点法，RKIGC 表示基于等几何无网格再生梯度的等几何无网格配点法，SRKIGC 表示基于递推变换梯度的超收敛等几何无网格配点法。为便于对比分析，算例中的精度度量采用误差范数形式为

$$L_2\ \text{Error} = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^{NC}(\boldsymbol{u}_I - \boldsymbol{u}_I^h)\cdot(\boldsymbol{u}_I - \boldsymbol{u}_I^h)}{\sum_{I=1}^{NC}\boldsymbol{u}_I\cdot\boldsymbol{u}_I}} \tag{26}$$

$$\text{Energy Error} = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^{NC}(\boldsymbol{\varepsilon}_I - \boldsymbol{\varepsilon}_I^h):(\boldsymbol{\sigma}_I - \boldsymbol{\sigma}_I^h)}{\sum_{I=1}^{NC}\boldsymbol{\varepsilon}_I:\boldsymbol{\sigma}_I}} \tag{27}$$

$$H_1\ \text{Error} = \sqrt{\{\sum_{I=1}^{NC}[(\boldsymbol{u}_I - \boldsymbol{u}_I^h)\cdot(\boldsymbol{u}_I - \boldsymbol{u}_I^h) + \sum_{r=1}^{n_{sd}}(\boldsymbol{u}_{I,x_r} - \boldsymbol{u}_{I,x_r}^h)\cdot(u_{I,x_r} - u_{I,x_r}^h)]\}/\sum_{I=1}^{NC}(\boldsymbol{u}_I\cdot\boldsymbol{u}_I + \sum_{r=1}^{n_{sd}}\boldsymbol{u}_{I,x_r}\cdot\boldsymbol{u}_{I,x_r})} \tag{28}$$

式中 $\boldsymbol{u}_I$ 和 $\boldsymbol{u}_I^h$ 为场变量 u 的精确解和数值解，$\boldsymbol{\varepsilon}_I$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_I$ 为应变和应力精确解列向量，$\boldsymbol{\varepsilon}_I^h$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_I^h$ 为应变和应力数值解列向量。

5.1 二维厚壁圆筒弹性力学问题

考虑图 5 所示的厚壁圆筒弹性力学问题，该问题采用的几何尺寸及材料参数分别为，圆筒内径 $r_i=2$，外径 $r_o=6$，弹性模量 $E=10^8$，泊松比 $\nu=0.3$。在平面应变条件下，假定该问题的精确解为

$$\begin{cases} u_x(\boldsymbol{x}) = \sin(\pi\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-r_i}{r_i})\sin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ u_y(\boldsymbol{x}) = \sin(\pi\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-r_i}{r_i})\cos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{29}$$

基于图 5 所示厚壁圆筒问题模型的对称性，取其四分之一模型进行配点法分析，图中求解域的橘黄色边界线代表位移边界，蓝色边界线代表施加位移边界或自由边界。方便起见，本文通过式(29)施加相应的对称边界及内外径位移边界条件。图 6 和图 7 分别给出了二次和三次基函数下该问题的 Greville 配点非均布离散情况。其中，为了表明提出的方法具有几何精确的特性，在配点离散图中分别绘制出了相应的等几何网格线。图 8 给出了三种配点法在不同基函数下的 L_2 和能量误差收敛结果，可以看出，在二次基函数下三种配点法的误差收敛率均为2阶，与采用基函数阶次相同；在三次基函数下 IGC 和 RKIGC 方法的误差精度只能达到 2 阶收敛，与采用基函数阶次相比降了一阶，而所提 SRKIGC 方法实现了$(p+1)$阶收敛，即三次基函数下的误差收敛精度从 2 阶提升到了 4 阶，所提方法可获得额外高两阶的计算精度。

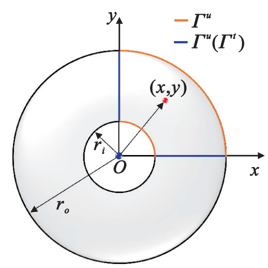
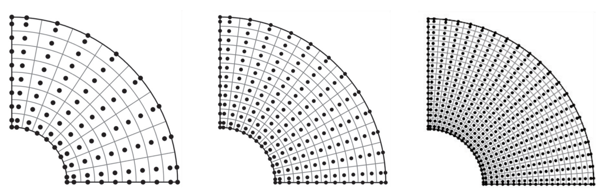


图 5 二维厚壁圆筒弹性力学问题描述

Fig. 5 Description of the 2D hollow cylinder elasticity problem

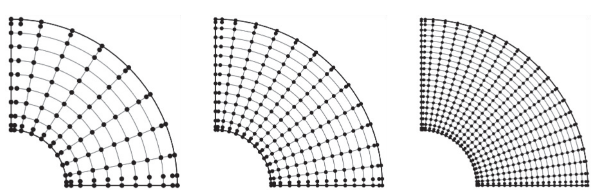


(a) 100点 (b) 196点 (c) 484点

(a) 100 points (b) 196 points (c) 484 points

图 6 二次基函数下二维厚壁圆筒问题的 Greville 配点

Fig. 6 Greville collocation points for the 2D hollow cylinder elasticity problem using quadratic basis function



(a) 121点 (b) 225点 (c) 529点

(a) 121 points (b) 225 points (c) 529 points

图 7 三次基函数下二维厚壁圆筒问题的 Greville 配点

Fig. 7 Greville collocation points for the 2D hollow cylinder elasticity problem using cubic basis function

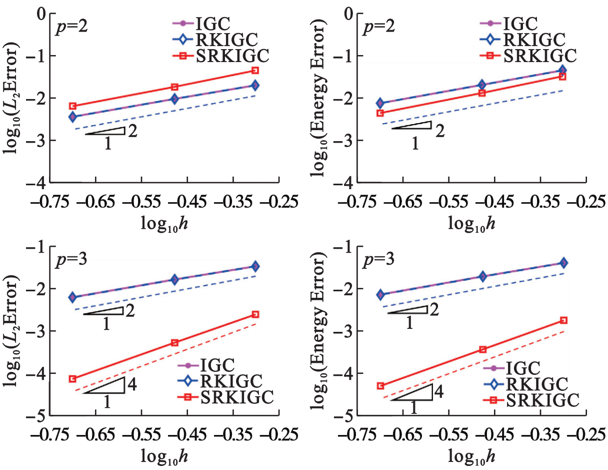


图 8　二次和三次基函数下二维厚壁圆筒问题的收敛结果对比
Fig. 8　Convergence comparison for the 2D hollow cylinder elasticity problem using quadratic and cubic basis functions

5.2　三维空心圆筒势问题

考虑图 9 所示的三维圆筒域势问题，圆筒的内径 $r_i=1$，外径 $r_o=2$，高度 $H=1$。假定该问题的精确解具有如下形式

$$u(\boldsymbol{x})=\sin(2\pi x)+\sin(2\pi y)+\sin(2\pi z) \quad (30)$$

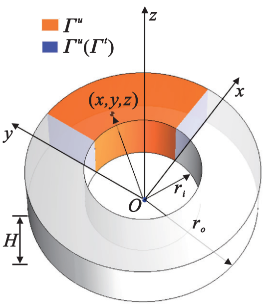
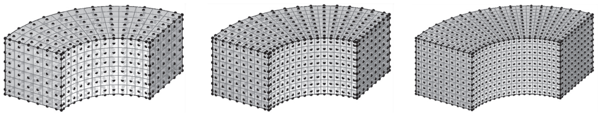


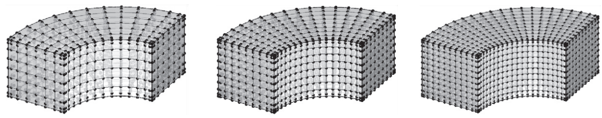
图 9　三维空心圆筒势问题描述
Fig. 9　Description of the 3D hollow cylinder potential problem

由于该问题模型相对于 xz 平面和 yz 平面对称，本文利用其四分之一模型进行配点法分析，并根据精确解式(30)施加内外径表面和相应对称面的位移边界条件。同时，二次和三次基函数下 Greville 配点离散的分布形式分别绘于图 10 和图 11 中，图 12 给出了相应的 L_2 和 H_1 误差收敛率对比结果。注意到该问题模型离散是非均布的，而 SRKIGC 方法相较于 IGC 和 RKIGC 方法来说，依然可以在奇数次基函数下呈现超收敛特性。



(a) 896点　(b) 1800点　(c) 3168点
(a) 896 points　(b) 1800 points　(c) 3168 points

图 10　二次基函数下三维空心圆筒势问题的 Greville 配点
Fig. 10　Greville collocation points for the 3D hollow cylinder potential problem using quadratic basis function



(a) 1215点　(b) 2299点　(c) 3887点
(a) 1215 points　(b) 2299 points　(c) 3887 points

图 11　三次基函数下三维空心圆筒势问题的 Greville 配点
Fig. 11 Greville collocation points for the 3D hollow cylinder potential problem using cubic basis function

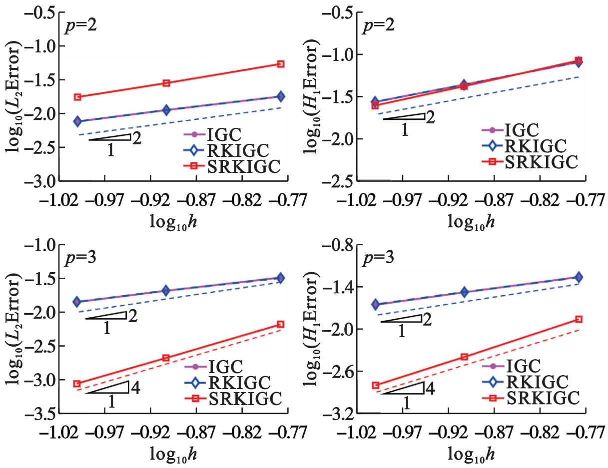


图 12　二次和三次基函数下三维空心圆筒势问题的收敛结果对比
Fig. 12　Convergence comparison for the 3D hollow cylinder potential problem using quadratic and cubic basis functions

6　结　论

本文在无网格法中再生梯度理论思想基础上，构建了由等几何基函数再生点定义的混合梯度基向量，建立了等几何基函数梯度的无网格等价表述形式。不同于等几何基函数梯度的递推算法，采用无网格再生梯度表述形式更为方便直接。二维情况下的数值验证结果表明，当选取等几何基函数的覆盖域作为无网格形函数影响域时，所提无网格再生梯度等价于相应等几何基函数的梯度。此外，与等几何无网格形函数的直接梯度相比，采用无网格再生等几何基函数梯度精确满足完备的再生条件，可直接用于配点法分析。同时，基于无网格法中形函数变换技术和递推梯度方法，建立了等几何无网格形函数的递推变换梯度，提出了一种超收敛等几何无网格配点法。该方法采用位置明确的节点离散，数值实现简捷，有效解决了传统等几何配点法采用奇数次基函数求解时的精度掉阶问题。数值算例结果表明，相较于传统等几何配点法，提出的方法具有超收敛的特性和显著的计算精度。本文超收敛等几何无网格配点法融合了等几何分析几何精确的特性和无网格法自适应离散建模的优点，未来该方法将在工程结构的大变形分析和损伤破坏问题等研究领域具有广泛的应用前景。

参考文献(References):

[1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**(2): 229-256.

[2] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, **20**(8-9): 1081-1106.

[3] 张 雄,刘 岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.(ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Methods*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))

[4] Chen J S, Hillman M, Chi S W. Meshfree methods: Progress made after 20 years[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2017, **143**(4): 04017001

[5] Deng L K, Wang D D, Xu X L, et al. A superconvergent meshfree collocation formulation for laminated composite plates with particular focus on convergence analysis[J]. *Composite Structures*, 2023, **321**: 117248.

[6] Matos N, Gomes M, Infante V. Numerical modelling of soft body impacts: A review[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2023, **153**: 107595.

[7] 裘沙沙,段庆林,邵玉龙,等. 弹塑性体脆断相场模型的一致性无单元伽辽金法[J]. 计算力学学报,2023, **40**(1): 60-65.(QIU Sha-sha, DUAN Qing-lin, SHAO Yu-long, et al. Consistent element-free Galerkin method for phase-field model of brittle fracture in elasto-plastic solids[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1): 60-65. (in Chinese))

[8] 陈嵩涛,段庆林,马今伟. 几何非线性分析的高效高阶无网格法[J]. 计算力学学报,2020, **37**(6): 694-699.(CHEN Song-tao, DUAN Qing-lin, MA Jin-wei. Efficient high order meshfree method for geometrically non-linear analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6): 694-699. (in Chinese))

[9] Wu J C, Wu X Y, Zhao Y B, et al. A rotation-free Hellinger-Reissner meshfree thin plate formulation naturally accommodating essential boundary conditions[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2023, **154**: 122-140.

[10] Zhang X, Liu X H, Song K Z, et al. Least-squares collocation meshless method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **51**(9): 1089-1100.

[11] Shi C Z, Zheng H, Wen P H, et al. The local radial basis function collocation method for elastic wave propagation analysis in 2D composite plate[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2023, **150**: 571-582.

[12] Gao X W, Gao L F, Zhang Y, et al. Free element collocation method: A new method combining advantages of finite element and mesh free methods[J]. *Computers & Structures*, 2019, **215**: 10-26.

[13] 樊礼恒,王东东,刘宇翔,等. 节点梯度光滑有限元配点法[J]. 力学学报, 2021, **53**(2): 467-481.(FAN Li-heng, WANG Dong-dong, LIU Yu-xiang, et al. A finite element collocation method with smoothed nodal gradients[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(2): 467-481. (in Chinese))

[14] 王莉华,刘义嘉,钟 伟,等. 无网格稳定配点法及其在弹性力学中的应用[J]. 计算力学学报,2021, **38**(3): 305-312.(WANG Li-hua, LIU Yi-jia, ZHONG Wei, et al. Meshfree stabilized collocation method in elasticity[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(3): 305-312. (in Chinese))

[15] Breitkopf P, Touzot G, Villon P. Double grid diffuse collocation method[J]. *Computational Mechanics*, 2000, **25**(2): 199-206.

[16] Chi S W, Chen J S, Hu H Y, et al. A gradient reproducing kernel collocation method for boundary value problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, **93**(13): 1381-1402.

[17] Wang D D, Wang J R, Wu J C. Superconvergent gradient smoothing meshfree collocation method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **340**: 728-766.

[18] Wang D D, Wang J R, Wu J C. Arbitrary order recursive formulation of meshfree gradients with application to superconvergent collocation analysis of Kirchhoff plates[J]. *Computational Mechanics*, 2020, **65**(3): 877-903.

[19] Qian Z H, Wang L H, Gu Y, et al. An efficient meshfree gradient smoothing collocation method (GSCM) using reproducing kernel approximation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **374**: 113573.

[20] Auricchio F, Da Veiga L B, Hughes T J R, et al. Isogeometric collocation methods[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2010, **20**(11): 2075-2107.

[21] Anitescu C, Jia Y, Zhang Y J, et al. An isogeometric collocation method using superconvergent points[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **284**: 1073-1097.

[22] Gomez H, De Lorenzis L. The variational collocation method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics*

and Engineering, 2016, **309**: 152-181.

[23] Fahrendorf F, De Lorenzis L, Gomez H. Reduced integration at superconvergent points in isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **328**: 390-410.

[24] Montardini M, Sangalli G, Tamellini L. Optimal-order isogeometric collocation at Galerkin superconvergent points[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **316**: 741-757.

[25] Wang D D, Qi D L, Li X W. Superconvergent isogeometric collocation method with Greville points[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **377**: 113689.

[26] Wang D D, Zhang H J. A consistently coupled isogeometric-meshfree method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **268**: 843-870.

[27] Zhang H J, Wang D D. Reproducing kernel formulation of B-spline and NURBS basis functions: A meshfree local refinement strategy for isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **320**: 474-508.

[28] 王东东，张汉杰，梁庆文. 等几何修正准凸无网格法[J]. 计算力学学报，2016，**33**(4)：605-612.（WANG Dong-dong, ZHANG Han-jie, LIANG Qing-wen. Isogeometric refined quasi-convex meshfree method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(4): 605-612. (in Chinese)）

[29] Qi D L, Wang D D, Deng L K, et al. Reproducing kernel mesh-free collocation analysis of structural vibrations[J]. *Engineering Computations*, 2019, **36**(3): 734-764.

A superconvergent isogeometric meshfree collocation method

QI Dong-liang*, LIU Jian-xiu

(Department of Civil Engineering, Hebei University of Water Resources and Electric Engineering, Cangzhou 061001, China)

Abstract: Both meshfree methods and isogeometric analysis enjoy the highly smooth shape functions or basis functions. However the basis degree discrepancy issue is observed for the meshfree and isogeometric collocation analysis. This study presents a superconvergent isogeometric meshfree collocation method, which is based upon the consistent conditions of isogeometric basis functions and meshfree gradient reproducing theory. In the proposed method, a mixed gradient reproducing basis vector is defined in accordance with the reproducing kernel meshfree formulation of isogeometric basis functions. Subsequently, a meshfree framework is developed to construct the gradients of isogeometric basis functions in a meshfree fashion, which avoids the costly gradient computation of isogeometric basis functions, which is trivial for numerical implementation. Meanwhile, the second order recursive gradients of the transformed isogeometric meshfree shape functions are established by introducing the basis transformation technique and the recursive gradient formulation. It is noted that the proposed recursive transformed gradients meet extra one-order higher reproducing conditions, which provides an important safeguard for superconvergent collocation analysis. Finally, a series of typical numerical examples are used to systematically verify the convergence and accuracy of the proposed method. Numerical results well demonstrate that the proposed methodology exhibits superior computational accuracy in contrast to the conventional isogeometric collocation, and a superconvergence with two additional orders of accuracy is realized by the proposed approach.

Key words: meshfree method; isogeometric collocation analysis; reproduced gradient; recursive gradient; superconvergence