计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

DOI:10.7511/jslx20231220001

具有 Drilling 自由度的八节点四边形混合壳单元

马 旭*, 杨炫峥, 李 坦

(燕山大学 理学院,秦皇岛 066004)

摘 要:构造了一个八节点四边形混合壳单元 QFUQA8,其中精化非协调膜部分具有 Drilling 自由度,采用两种位移场改进了组合质量矩阵,通过选取不同的精化元参数,来提高单元的计算精度,根据 Airy 应力函数的解析解得到的单元应力场构造插值函数,将 Drilling 旋转添加到八节点等参元的位移场确定测试函数;板部分以任意阶的 Timoshenko 梁函数构造单元的边界位移插值,Airy 应力函数作为假定应力函数,通过向平均面投影的方式修正了存在翘曲结构的单元。数值算例表明,构造的平板壳单元能通过非零常剪力分片检验,并且在壳体结构分析中具有良好的精度和收敛性。

关键词:非对称有限元法;杂交应力元;Airy 应力函数;平板壳单元

中图分类号:O242.21;TU311.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2025)03-0462-09

1 引 言

壳体结构在实际生活中是一种常见的结构,广泛应用于各行各业。目前对壳体结构的分析一般采用四种壳单元,即将板单元和膜单元组合而成的平板壳单元;由三维实体理论引入壳单元假设导出的退化壳单元;基于三维实体理论并适当简化的实体壳单元;基于不同的壳单元理论的曲线壳单元。实际上,很难确定哪种类型的构造方式是最优的,由于壳体结构的形式和荷载条件的复杂性,得到的控制方程十分复杂,因此有限元分析是一个适当的解决方法,已广泛应用于壳体结构分析当中。如有限元用于薄壁加筋结构分析[1]、模拟加劲肋[2]和超大型冷却塔风致倒塌机制与失效准则研究[3]。

由于平板壳单元的公式简单,计算效率高,因此在壳体结构中,平板壳单元比其他有限元分析单元更受欢迎。在平板壳单元中,弯曲和拉伸变形在小变形时可以独立考虑,因此可以通过膜和板弯曲单元的叠加生成平板壳单元。同时,平板壳单元的性能主要取决于构成它的板单元和膜单元的性能。目前构造膜单元的方法一般有改进的非协调元法[4]、四边形面积坐标法[5]、样条有限元分析法[6]及重叠有限元分析法[7]等。

为了引入一种性能良好、精度合适的平板壳单元,学者们做了大量的研究。针对壳体的线性和非线性分析,Wu 等[8]提出了一种高性能无形状任意多边形混合应力/位移-函数平板壳有限元方法,该单元在线性和几何非线性分析中均具有优异的性能,在处理复杂荷载分布和网格形状方面具有出色的灵活性。Sangtarash 等[9]提出了一种基于非对称有限元法构建的四节点四边形平板壳单元,适用于复杂几何形状、荷载和边界条件的壳结构分析。类似的,使用 ACM 板弯曲单元和非对称膜单元,Sangtarash 等[10]提出了一个新的四边形平板壳单元,尽管所提单元的表述简单,但与其他的壳单元相比,具有合理的精度和收敛性。

在平板壳单元的分析中,缺乏 Drilling 自由度的膜单元与板弯曲单元结合时会导致单元刚度矩阵的奇异性,所以采用具有 Drilling 自由度的膜单元构造平板壳单元是更优的选择。在过去的几十年中,大量的三角形和四边形平板壳单元得到了发展,并成功地应用于工程分析和设计中。然而现有的大部分中厚板单元都不能通过增强型分片检验,不能保证严格收敛,相应的中厚壳体单元也不能满

收稿日期:2023-12-20; **修改稿收到日期**:2024-01-31.
基金项目:国家自然科学基金(11702242);河北省自然科学基金(A2019203403)资助项目.
作者简介:马 旭*(1984-),男,博士,副教授(E-mail:maxu824@ysu.edu.cn).

引用本文:马 旭,杨炫峥,李 坦.具有 Drilling 自由度的八节点四边形混合壳单元[J].计算力学学报,2025,**42**(3):462-470.
MA Xu,YANG Xuan-zheng,LI Tan. Eight-node quadrilateral hybrid shell element with Drilling degrees of freedom[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2025,**42**(3):462-470.

足严格收敛的要求,因此对中厚壳体单元的进一步研究是十分有必要的。

本文提出了一个八节点四边形平板壳单元,单元的每个节点具有6个自由度,包含三个平移自由度和三个转动自由度。单元由一个精化的非协调膜单元和一个高阶四边形板单元组合而成。膜单元中两种不同类型的位移场分别用于测试和试验功能。膜单元的测试函数基于八节点四边形单元的Serendipity插值函数,并通过顶点旋转来增强测试函数,采用Huang等[11]提出的方法,沿着单元的边缘插值,将Drilling自由度添加到位移场中。假定的试验函数是由混合应力函数单元中的Airy应力函数的解析解得到的,并采用拟协调方法[12,13]定义试验函数与节点自由度之间的关系。接着采用精化元法引入可调常数,得到精化的质量矩阵,构造出一个计算分析精度更高的膜单元。板单元基于Li等[14]提出高阶假定应力四边形单元,并改进了单元的假定应力函数,使用Airy应力函数构造假定应力。为了评价提出的壳单元的性能,计算了几个经典的数值问题,并将所得结果与现有的一些壳单元进行了比较。

2 八节点四边形平板壳单元

2.1 改进的非协调精化膜单元

QFUQA8单元的膜组件是一个具有Drilling自由度的精化非协调八节点四边形膜单元,参考Shang等[15]提出的改进的非对称有限元方法,使用精化元法引入了一个具有可调常数的简单显示表达式,得到了单元的精化质量矩阵。对于单元的每个节点,有沿着$x(u_i)$轴和$y(v_i)$轴的两个平移自由度和沿着$z(\theta_{zi})$轴的一个Drilling旋转自由度,单元的节点的位移为

$$\boldsymbol{q}_m^{\mathrm{T}}=[u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2} \cdots u_8 \quad v_8 \quad \theta_{z8}] \tag{1}$$

膜单元的构造考虑了两种不同的位移场作为测试函数和试验函数,首先采用一种基于八节点等参元变换的Drilling旋转位移场,定义了膜单元的测试函数。构造的位移场为

$$\bar{\boldsymbol{u}}_m=\bar{\boldsymbol{N}}q_m=[\bar{\boldsymbol{N}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_2 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_3 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_4 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_5 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_6 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_7 \quad \bar{\boldsymbol{N}}_8]\boldsymbol{q}_m \tag{2}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{N}}_i=\begin{bmatrix} N_i & 0 & -\frac{1}{2}N_i(y-y_i) \\ 0 & N_i & \frac{1}{2}N_i(x-x_i) \end{bmatrix} \quad (i=1\sim 8) \tag{3}$$

式中(x_i,y_i)是膜单元中第i个节点的节点坐标,$x=\sum_{i=1}^{8}N_i x_i$,$y=\sum_{i=1}^{8}N_i y_i$,N_i是八节点等参元的插值形函数,

$$N_i=\begin{cases} -\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\xi_i\xi-\eta_i\eta) & (i=1\sim 4) \\ \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta) & (i=5,7) \\ \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi) & (i=6,8) \end{cases} \tag{4}$$

其中 对于$i=1\sim 4,6,8$,$\xi_i=[-1,1,1,-1,1,-1]$;对于$i=1\sim 5,7$,$\eta_i=[-1,-1,1,1,-1,1]$,(ξ,η)是自然坐标系中单元的节点坐标。

为了增加膜单元的自由度,沿单元边缘位移插值计算Drilling旋转,得到八节点四边形膜单元的Drilling旋转自由度。显然,考虑的位移场满足单元内的相容性,因此单元的应变场为

$$\bar{\epsilon}=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{q}_m=[\bar{\boldsymbol{B}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_2 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_3 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_4 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_5 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_6 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_7 \quad \bar{\boldsymbol{B}}_8]\boldsymbol{q}_{\mathrm{m}} \tag{5}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{B}}_i=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial N_i}{\partial x}(y-y_i) \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial N_i}{\partial y}(x-x_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}(x-x_i)-\frac{\partial N_i}{\partial y}(y-y_i)\right) \end{bmatrix} \quad (i=1\sim 8) \tag{6}$$

在不涉及位移场的前提下,单元的试验函数可以在非对称有限元分析中独立假设。对于提出的膜单元,试验函数是一个应力场,定义为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{\beta}_m \tag{7}$$

其中$\boldsymbol{\beta}_m$是未知系数向量,$\boldsymbol{S}_m$是从笛卡尔坐标系中的Airy应力函数导出的应力矩阵[16]。

在应力插值矩阵中,每一列都是平面问题的一组应力解,这些解应遵从由低阶到高阶的规则,并且在笛卡尔坐标系下具有完备性。对于膜单元,取前21个基本解析解在与考虑的板弯曲单元结合时具有更好的性能。非对称有限元分析的主要难点在于求解节点位移与假定应力场的关系,定义这种关系的最佳解决方案之一是基于加权残值法的准一致性技术[12,13],该方法的基本思想是弱化应变-位移方程和平衡方程。得到结点位移与应力关系,根据上述测试函数与试验函数,由虚功原理[9]求得膜单元的单元刚度矩阵$\boldsymbol{K}_m$。

为了提高膜单元计算分析的精度,采用精化元

法来精化质量矩阵以用于有限元方法的特征值问题,通过组合单元位移插值得到新的质量矩阵。薄膜的自由振动方程为

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}_m)\Phi=0 \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是膜单元的整体刚度矩阵,$\boldsymbol{M}_m$ 是整体质量矩阵,Φ 是模态形状,ω 是固有频率。振动问题本质上是一个广义特征值问题,特征值为固有频率的平方,特征向量为振型。本文采用的八节点单元位移插值函数表示的膜单元横向位移具体形式为

$$u=\sum_{i=1}^{8}\bar{N}_i u_i \tag{9}$$

$$v=\sum_{i=1}^{8}\bar{N}_i v_i \tag{10}$$

另外一种采用四节点位移插值函数下的膜单元横向位移形式为

$$u'=\sum_{i=1}^{4}\bar{N}'_i u_i\ ,\ v'=\sum_{i=1}^{4}\bar{N}'_i v_i \tag{11,12}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{N}}'_i=\begin{bmatrix} N'_i & 0 & -\dfrac{1}{2}N'_i(y-y_i) \\ 0 & N'_i & \dfrac{1}{2}N'_i(x-x_i)\end{bmatrix}$$

$$(i=1\sim 4) \tag{13}$$

$$N_i{}'=\frac{1}{4}(1-\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\quad (i=1\sim 4) \tag{14}$$

所以,新的横向位移函数为

$$u^*=u+\alpha(u-u') \tag{15}$$

$$v^*=v+\alpha(v-v') \tag{16}$$

其中 α 是一个可调参数,用于提高单元的计算精度,最终的精化质量矩阵的形函数形式为

$$[u^*\ \ v^*]^{\mathrm{T}}=[u+\alpha(u-u')\quad v+\alpha(v-v')]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Nq} \tag{17}$$

单元质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}_e=\iint\rho\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{18}$$

其中 ρ 是材料的质量密度。

2.2 高阶杂交应力板单元

QFUQA8 单元的板组件是一个高阶八节点四边形 Mindlin-Reissner 板单元,单元基于 Li 等[14]提出高阶假定应力四边形单元,改进了单元的假定应力函数,采用 Airy 应力函数可以在保持计算精度的前提下选取更少的应力项数,降低了计算复杂度。单元的每个节点具有一个平移自由度和两个旋转自由度,节点位移为

$$\boldsymbol{q}_p^{\mathrm{T}}=[\omega_1\quad \theta_{x1}\quad \theta_{y1}\quad \omega_2\quad \theta_{x2}\quad \theta_{y2}\cdots\omega_8\quad \theta_{x8}\quad \theta_{y8}] \tag{19}$$

对于板单元,采用两个位移函数 F 和 f 求出挠度 ω、转角 θ_x 和 θ_y 的解析解。在一般情况下,单元不存在边缘效应,边缘效应函数 f 可以忽略,因此单元位移可以只用整体位移函 F 表示。将单元位移代入 Mindlin 板单元的几何方程和本构方程,得到单元内部应力向量 $\boldsymbol{R}_P$ 为

$$\boldsymbol{R}_p=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -D\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ -D\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \\ -D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ -D\dfrac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 F) \\ -D\dfrac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 F)\end{Bmatrix}=\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{\beta}_p \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{S}_p$ 是前 N 项 Airy 应力插值矩阵,具体形式列入表 1。

如图 1 所示,如果将四边形的任意一条边看作是梁单元,以 1-2 边为例,运用任意阶的 Timoshenko 梁函数,得到单元边界上的位移插值

$$\begin{aligned}\tilde{w}=&I_1w_1+I_2w_2+I_5w_5-I_0L(-\theta_{n,1}+2\theta_{n,5}-\theta_{n,2})=\\ &I_1w_1+I_2w_2+I_5w_5-I_0[(-\theta_{x,1}+2\theta_{x,5}-\\ &\theta_{x,2})b+(-\theta_{y,1}+2\theta_{y,5}-\theta_{y,2})a]\\ \tilde{\theta}_x=&I_1\theta_{x,1}+I_2\theta_{x,2}+I_5\theta_{x,5},\tilde{\theta}_y=I_1\theta_{y,1}+\\ &I_2\theta_{y,2}+I_5\theta_{y,5}\end{aligned} \tag{21}$$

式中 $I_1=L_1(2L_1-1)$,$I_2=L_2(2L_2-1)$,$I_5=4L_1L_2$,$I_0=\dfrac{1}{3}L_1L_2(L_2-L_1)$,$L_1=1-\dfrac{s}{L}$,$L_2=\dfrac{s}{L}$,$L$ 是 1-2 边的长度,s 是边界 1-2 的参数坐标。

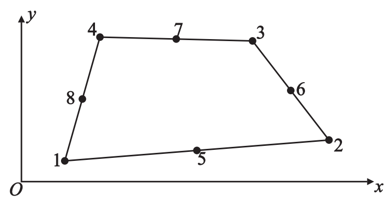

图 1 八节点四边形单元

Fig. 1 Eight-node quadrilateral plate element

建立杂交应力单元的余能泛函为

$$\boldsymbol{\Pi}_e=\int_{V_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_p^{-1}\boldsymbol{M}\mathrm{d}v-\int_{S_e}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\tilde{u}\mathrm{d}s \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{T}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 分别为内力、边界力和边界位移,$\boldsymbol{D}_p$ 是弹性矩阵。建立杂交应力单元需要假定如下变量,即

表 1　板单元假定应力函数

Tab. 1　Assumed stress function of the plate element

i	1	2	3	4	5	6	7	8
M_{xi}	2	0	2μ	$6x$	$2y$	$2\mu x$	$6\mu y$	$6xy$
M_{yi}	2μ	0	2	$6\mu x$	$2\mu y$	$2x$	$6y$	$6\mu xy$
M_{xyi}	0	$1-\mu$	0	0	$2(1-\mu)x$	$2(1-\mu)y$	0	$3(1-\mu)x^2$
T_{xi}	0	0	0	6	0	2	0	$6y$
T_{yi}	0	0	0	0	2	0	6	$6x$

i	9	10	11	12
M_{xi}	$6\mu xy$	$12(x^2-\mu y^2)$	$12(1-\mu)\cdot(y^2-x^2)$	$6xy^2+\mu(2x^3-12xy^2)$
M_{yi}	$6xy$	$-12(y^2-\mu x^2)$	$12(1-\mu)\cdot(x^2-y^2)$	$6\mu xy^2+2x^3-12xy^2$
M_{xyi}	$3(1-\mu)y^2$	0	$24xy(1-\mu)$	$(1-\mu)(6x^2y-4y^3)$
T_{xi}	$6y$	$24x$	0	$6(x^2-y^2)$
T_{yi}	$6x$	$-24y$	0	$-12xy$

i	13	14	15
M_{xi}	$10\mu x^3-20x^3+30xy^2$	$6\mu x^2y+2y^3-12x^2y$	$10y^3+\mu(-20y^3+30x^2y)$
M_{yi}	$10x^3+\mu(-20x^3+30xy^2)$	$6x^2y+\mu(2y^3-12x^2y)$	$10\mu y^3-20y^3+30x^2y$
M_{xyi}	$30(1-\mu)x^2y$	$(1-\mu)(6xy^2-4x^3)$	$30(1-\mu)xy^2$
T_{xi}	$-30x^2+30y^2$	$-12xy$	$60xy$
T_{yi}	$60xy$	$6(y^2-x^2)$	$30(x^2-y^2)$

i	16	17
M_{xi}	$-20\mu xy^3+20x^3y$	$60(1-\mu)(xy^3-x^3y)$
M_{yi}	$-20xy^3+20\mu x^3y$	$60(1-\mu)(x^3y-xy^3)$
M_{xyi}	$5(1-\mu)(x^4-y^4)$	$-15(1-\mu)(x^4-6x^2y^2+y^4)$
T_{xi}	$60x^2y-20y^3$	0
T_{yi}	$20x^3-60xy^2$	0

i	18	19
M_{xi}	$30x^4-120x^2y^2+10y^4+\mu(-20x^4+60x^2y^2)$	$-20y^4+60x^2y^2+\mu(30y^4-120x^2y^2+10x^4)$
M_{yi}	$-20x^4+60x^2y^2+\mu(30x^4-120x^2y^2+10y^4)$	$30y^4-120x^2y^2+10x^4+\mu(-20y^4+60x^2y^2)$
M_{xyi}	$40(1-\mu)(-2x^3y+xy^3)$	$40(1-\mu)(-2xy^3+x^3y)$
T_{xi}	$40x^3-120xy^2$	$40x^3-120xy^2$
T_{yi}	$40y^3-120x^2y$	$40y^3-120x^2y$

i	20	21
M_{xi}	$42(-2x^5+10x^3y^2)+42\mu(x^5-5xy^4)$	$420(-x^4y+x^2y^3)+42\mu(5x^4y-y^5)$
M_{yi}	$42(x^5-5xy^4)+42\mu(-2x^5+10x^3y^2)$	$42(5x^4y-y^5)+420\mu(-4x^4y+x^2y^3)$
M_{xyi}	$42(1-\mu)(5x^4y-y^5)$	$84(1-\mu)(5x^3y^2-x^5)$
T_{xi}	$-210(x^4-6x^2y^2+y^4)$	$-840(x^3y-xy^3)$
T_{yi}	$840(x^3y-xy^3)$	$-210(x^4-6x^2y^2+y^4)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{\beta}_p \\ \tilde{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{q}_p \\ \boldsymbol{T} &= \boldsymbol{L}_p\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{\beta}_p \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{N}_p$ 和 $\boldsymbol{q}_p$ 是相应的位移插值矩阵和节点载荷矩阵，$\boldsymbol{L}_p$ 是边界法线的方向余弦矩阵。

将式(23)代入泛函(22)，得

$$\boldsymbol{\Pi}_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_p\boldsymbol{\beta}_p - \boldsymbol{\beta}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_p\boldsymbol{q}_p \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_p = \int_{\mathrm{V}_e}\boldsymbol{S}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_p^{-1}\boldsymbol{S}_p d\,\mathrm{v} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{H}_p = \int_{\mathrm{S}_e}(\boldsymbol{L}_p\boldsymbol{S}_p)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_p\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

由变分 $\dfrac{\partial\boldsymbol{\Pi}_e}{\partial\boldsymbol{\beta}_p}=0$，得

$$\boldsymbol{\beta}_p = \boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{H}_p\boldsymbol{q}_p \tag{27}$$

将式(27)代入式(24)，可得板单元的单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}_p = \boldsymbol{H}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_p^{-1}\boldsymbol{H}_p \tag{28}$$

2.3　平板壳单元的组合

平板壳单元的一般方程为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_m & 0 \\ 0 & \boldsymbol{K}_p \end{bmatrix}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f} \tag{29}$$

其中壳单元的单元刚度矩阵是将膜单元和板单元的单元刚度矩阵组合[17]而成，$\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别为结点位移和单元载荷矢量，单元的单个节点自由度如图 2 所示。

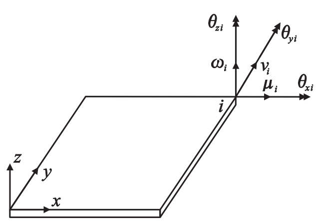

图 2　平板壳单元的节点自由度

Fig. 2　Nodal degrees of freedom of flat shell units

2.4　翘曲单元的修正

对于存在翘曲几何形状的平板壳单元，单元的节点不共面，需要在单元刚度矩阵变换为整体刚度矩阵前进行修正。单元刚度矩阵通过角节点在平均平面上的投影计算，通过连接每个边缘中心的点形成平均面，然后确定每个单元节点与其在平均面上的投影距离，具体形式如图 3 所示。

翘曲单元在局部坐标系下的刚度矩阵定义为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{local}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{K}_{\text{Mean plane}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{W}$ 是平板壳单元的修正矩阵，对于单元的第 i 个节点，修正矩阵的子矩阵为

$$\boldsymbol{W}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -z_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

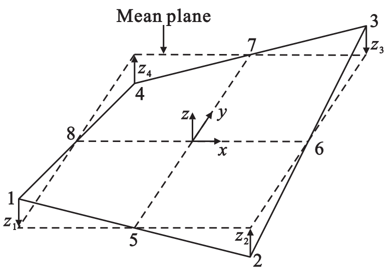

图 3 翘曲壳单元的平均面

Fig. 3 Mean surface of the warped shell unit

3 数值实验

为了评价 QFUQA8 单元的性能，选取几个数值问题，包括分片检验、具有固支和简支边界条件的方板、具有简支和固支边界条件的圆板、悬臂梁、夹紧圆柱等。此外，将单元的计算结果和一些比较著名的平板壳单元进行了比较。

3.1 分片检验

分片检验是检验单元收敛性最为实用且高效的方法，并且还能用于构造具有收敛性的单元。如图 4 所示，为了验证单元的收敛性，考虑了五个单元的常应力分片检验。

膜单元分片检验的检验函数为

$$u = 10^{-3}(x + y/2), v = 10^{-3}(y + x/2) \tag{32}$$

将给定的检验函数作为边界条件施加在边界节点，再通过有限元法求解内部节点的位移。若运用有限元法求得的内部结点位移与使用检验函数计算得到的位移精确解一致，则称单元可以通过分片检验。

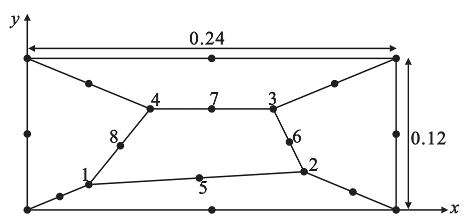

图 4 分片检验

Fig. 4 Patch test

在给定的边界条件下，膜单元的材料参数取 $E = 1 \times 10^6$，$\mu = 0.025$，$t = 0.001$，分片检验结果列入表 2。结果表明，QFUQA8 单元精确地收敛于解析解，通过常应力分片检验。

表 2 膜单元分片检验节点 1 数值结果

Tab. 2 Numerical results of node 1 of Membrane element patch test

Model	u	v	σ_x	σ_y	τ_{xy}
QFUQA8	0.000050	0.000040	1333.3330	1333.3330	400.0
Analytical	0.000050	0.000040	1333.3330	1333.3330	400.0

对于板单元，非零常剪力分片检验的检验函数具体形式为

$$\begin{cases} \omega = -t^2(14x + 18y)/(5(1-\mu)) + \\ \qquad x^3 + 3x^2 y + 4xy^2 + 2y^3 \\ \theta_x = 3x^2 + 8xy + 6y^2 \\ \theta_y = -(3x^2 + 6xy + 4y^2) \end{cases} \tag{33}$$

板单元的材料参数取 $E = 1 \times 10^3$，$\mu = 0.25$，$t = 0.01$，从表 3 的计算结果可知，QFUQA8 单元精确地收敛到解析解，通过条件更严格的非零常剪力分片检验。

表 3 板单元分片检验节点 1 数值结果

Tab. 3 Numerical results of node 1 of plate element patch test

Model	ω	θ_x	θ_y	T_x	T_y
QFUQA8	0.00021550	0.01360	−0.01120	−0.01020	−0.00160
Analytical	0.00021550	0.01360	−0.01120	−0.01020	−0.00160

3.2 矩形薄膜问题

针对精化的质量矩阵，计算了在不同参数条件下固定边界条件的矩形薄膜的固有频率，其中矩形薄膜参数为长 $A = 2$，宽 $B = 1$，材料的质量密度 $\rho = 7.805$，单元划分网格数为 16×16。从表 4 的计算结果可知，精化元方法中的参数 $\alpha = -0.113$ 时，膜单元的计算精度最高，最接近问题的理论解。

表 4 矩形薄膜的振动分析结果

Tab. 4 Vibration analysis results for rectangular membranes

模态序列号	膜单元 α					
	膜单元 (−1)	膜单元 (−0.5)	膜单元 (−0.25)	膜单元 (−0.113)	膜单元 (0)	解析解
1	23.5133	23.5092	23.5073	23.5062	23.5051	23.5060
2	29.7425	29.7379	29.7345	29.7329	29.7313	29.7330
3	37.9113	37.9059	37.9034	37.9022	37.9011	37.9020
4	43.3541	43.3475	43.3447	43.3430	43.3416	43.3429
5	47.0211	47.0161	47.0136	47.0119	47.0102	47.0119
6	52.5701	52.5644	52.5621	52.5610	52.5603	52.5609
7	56.6201	56.6145	56.6116	56.6101	56.6088	56.6099

3.3 方板问题

由于选取的对比单元包含一些四节点四边形

单元,采用相同的节点数量来计算不同的数值算例,以保证每个单元具有相同的总自由度,进而保证相同的计算代价。

方板问题[9]用于评估壳单元在弯曲支配问题中的性能,分析了受均布载荷 q 作用的固支和简支方板,采用 $N=25,81,289$ 的节点数量计算方板的中心位移,并和其他研究者的计算结果进行对比,所得的计算结果都按照相应的参考值归一化(ω_A/ω_{ref}),分别列于表 5 和表 6。根据 Kirchhoff 板理论,固支和简支方板的参考值分别为 -0.22137 和 -0.70971。

图 5 显示了固支方板中心点位移的收敛性。结果表明,QFUQA8 单元在方板问题上有较好的性能,并能够快速收敛到相应的解析解。

表 5　固支方板中心点的归一化位移

Tab. 5　Normalized displacement at the center of the clamped square plate

Model	Number of nodes		
	25	81	289
MITC4[18]	0.994	0.998	0.999
MITC4+[19]	0.994	0.998	0.999
S8R	0.995	0.998	0.999
MITC-S8[20]	0.956	0.987	0.995
QFUQA8	0.995	0.999	1.000

表 6　简支方板中心点的归一化位移

Tab. 6　Normalized displacement at the center of the simply supported square plate

Model	Number of nodes		
	25	81	289
MITC4	0.994	0.998	0.999
MITC4+	0.994	0.998	0.999
S8R	0.995	0.998	0.999
SHB8PS[21]	1.019	1.004	1.002
QFUQA8	0.998	0.999	1.000

3.4　圆板问题

圆板问题用于评估壳单元在具有剪切闭锁现象的弯曲占优问题中的计算精度,图 6(a)显示了受均布载荷作用的固支和简支圆板。由于圆板的对称性,可以只考虑板的 ABC 区域(圆板的四分之一),图 6(b)为计算的圆板对称部分的单元网格划分。

表 7 和表 8 分别给出了所有考虑的壳单元在固支和简支圆板中心的归一化位移(ω_A/ω_{ref}),计算结果分别采用 $N=19,80,279$ 的节点数量,然后根据相应的参考值做归一化处理。根据 Kirchhoff 板理论,固支和简支圆板参考值分别为 -0.21328 和 -0.86953。

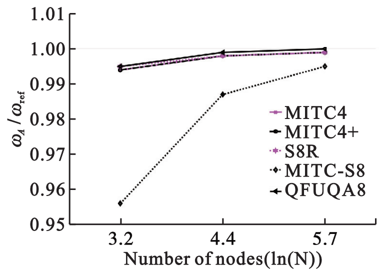

图 5　固支方板中心点归一化位移的收敛性

Fig. 5　Convergence of normalized displacement at the center of the clamped square plate

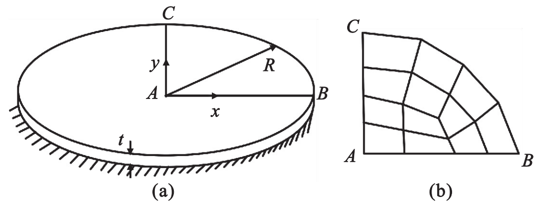

图 6　圆板问题

Fig. 6　Circular plate problem

表 7　固支圆板中心点的归一化位移

Tab. 7　Normalized displacement at the center of the clamped circular plate

Model	Number of nodes		
	19	80	279
MITC4	0.993	0.998	0.999
MITC4+	0.993	0.998	0.999
S8R	0.994	0.998	0.999
QFUQA8	0.975	0.989	0.998

表 8　简支圆板中心点的归一化位移

Tab. 8　Normalized displacement at the center of the simply supported circular plate

Model	Number of nodes		
	19	80	279
MITC4	0.980	0.995	0.998
MITC4+	0.980	0.995	0.998
S8R	0.985	0.996	0.999
SHB8PS	0.944	0.986	0.993
QFUQA8	0.995	0.999	1.000

对于考虑的壳单元,简支圆板中心位移的收敛性如图 7 所示。结果表明,对于这两类边界条件,QFUQA8 单元在不同的节点数量下表现出较好的性能,并且在节点数量较少的情况下能够收敛到解

析解。

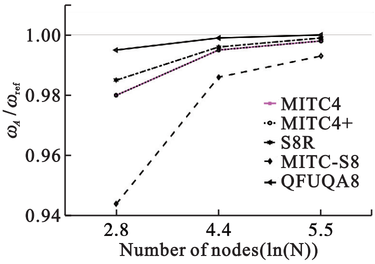

图 7 简支圆板中心点归一化位移的收敛性

Fig. 7 Convergence of normalized displacement at the center of the simply supported circular plate

3.5 悬臂梁问题

在自由端受到尖端剪力的悬臂梁是评估薄膜主导问题中壳单元性能的数值实例，结构的具体形式如图 8 所示。分别计算了在 $N=10,27,85$ 的节点数量下悬臂梁施加载荷端的位移，并按照 Timoshenko 和 Goodier 建议的参考值 0.3558 作了归一化 ($\omega_A/\omega_{\mathrm{ref}}$) 处理，详细的位移结果列入表 9。

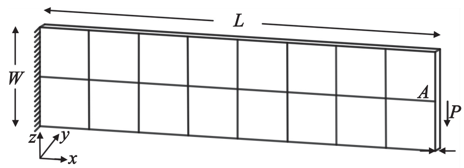

图 8 悬臂梁问题

Fig. 8 Cantilever beam problem

对于 QFUQA8 单元和对比的其他单元，图 9 给出了悬臂梁自由端位移的收敛趋势。计算结果表明，QFUQA8 单元具有较好的计算精度。

表 9 悬臂梁问题点 A 的归一化位移

Tab. 9 Normalized displacement at point A for the cantilever beam problem

Model	Number of nodes		
	10	27	85
IBRA4[22]	0.941	0.991	0.997
Pimpinelli[23]	0.983	0.992	0.999
Q4DRL[24]	0.924	0.974	0.993
S8R	0.985	0.996	0.999
QFUQA8	0.980	0.993	1.000

3.6 夹紧圆柱问题

夹紧圆柱问题[22]是一个评估平板壳单元在复杂膜和不可伸长弯曲状态下计算精度的经典问题。图 10(a)显示了一个由固定边界条件支撑的圆柱体，圆柱体的中部施加了一对集中力，末端由刚性膜片支撑。由于单元的对称性，可以只对 $ABCD$ 区域(圆柱的八分之一)进行建模分析。

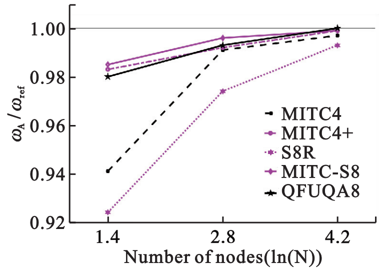

图 9 悬臂梁问题点 A 归一化位移的收敛性

Fig. 9 Convergence of normalized displacement at point A for the cantilever beam problem

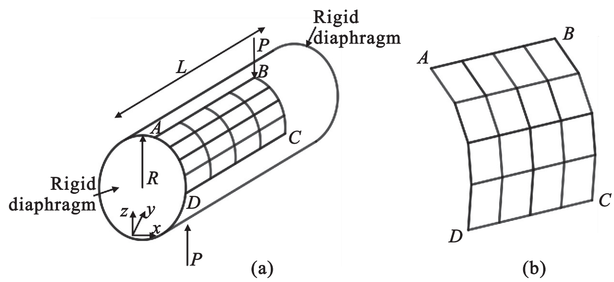

图 10 夹紧圆柱问题

Fig. 10 Pinched cylinder problem

计算在不同节点数量($N=25,81,289$)下 QFUQA8 单元在施加载荷点(点 B)的竖向位移结果。得到的位移结果按照 Flügge 提出的参考值 1.8248×10^{-5} 做了归一化处理 ($\omega_B/\omega_{\mathrm{ref}}$)，具体的结果如表 10 和图 11 所示。算例表明，QFUQA8 单元精度较高，在节点的数量增加时能够快速收敛到解析解。

表 10 夹紧圆柱问题点 B 的归一化位移

Tab. 10 Normalized displacement at point B for the pinched cylinder problem

Model	Number of nodes		
	25	81	289
IBRA4	0.370	0.736	0.934
Pimpinelli	0.626	0.938	1.094
Q4DRL	0.348	0.732	0.926
SHB8PS	0.387	0.754	0.940
S8R	0.615	0.961	0.993
MITC4＋	0.390	0.754	0.931
QFUQA8	0.631	0.941	0.996

3.7 Hook 问题

Hook 问题[25]是评估壳单元在面对复杂变形模式(扭曲、伸展和弯曲)时稳定性的一类问题。如图 12 所示，结构包含两个不同的曲线段，在交点处相切。两曲线段具有相同的厚度和宽度，结构的一端固支，另一端受到单位剪切载荷。

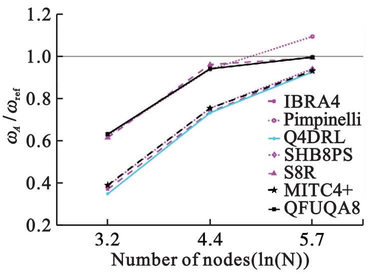

图 11　夹紧圆柱问题点 B 归一化位移的收敛性

Fig. 11　Convergence of normalized displacement at point B for the pinched cylinder problem

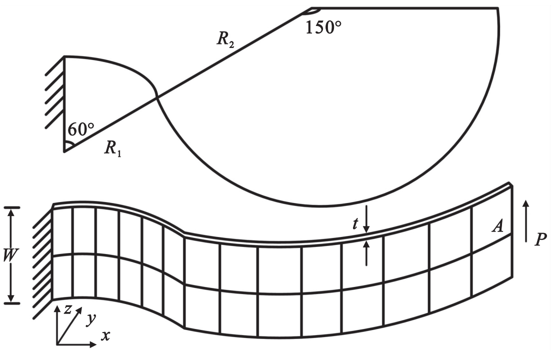

图 12　Hook 问题

Fig. 12　Hook problem

计算在不同节点数量(N =39,125,441)下 QFUQA8 单元在点 A 沿载荷方向的位移结果。得到的位移结果按照 Knight 提出的参考值 4.82482 做了归一化处理(ω_A/ω_{ref}),具体的结果如表 11 和图 13 所示。数值算例表明,QFUQA8 单元具有较好的性能,有较快的收敛速度。

表 11　Hook 问题点 A 的归一化位移

Tab. 11　Normalized displacement of point A of the Hook problem

Model	Number of nodes		
	39	125	441
MITC4	0.953	0.963	0.978
MITC4＋	0.953	0.963	0.978
S8R	0.960	0.972	0.997
QFUQA8	0.912	0.969	1.002

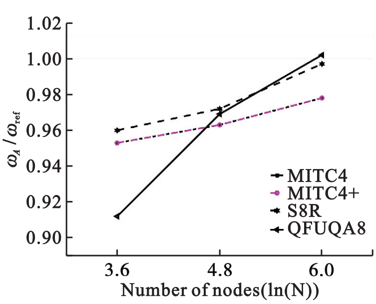

图 13　Hook 问题点 A 归一化位移的收敛性

Fig. 13　Convergence of normalized displacements at point A of the Hook problem

4　结　论

基于精化元方法和杂交应力元法构造了一个八节点四边形混合壳单元,膜单元部分的精化元参数 $\alpha=-0.113$ 时,单元计算精度更高,可以通过常应力分片检验;板单元部分采用Airy应力函数可以在不降低计算精度的条件下减少计算复杂度,且能通过要求更加严格的非零常剪力分片检验,这就保证了组合后壳单元的收敛性。壳单元具有显示表达的刚度矩阵,不存在剪切闭锁,并且由于 Drilling 自由度的存在自然避免了刚度矩阵的奇异性。数值实验表明,平板壳单元在不同的几何和边界条件下都比较稳定,具有较高的精度,在膜占优和板占优问题中都表现出良好的性能。

参考文献(References):

[1]　王　谦,丁晓红,张　横.厚薄通用四边形平板壳元在薄壁结构加筋布局优化中的应用[J].空天防御,2023,**6**(2):55-61.(WANG Qian,DING Xiao-hong,ZHANG Heng. Stiffener layout optimization of thin-walled structures through thick/thin generic quadrilateral shell elements[J]. *Air & Space Defense*,2023,**6**(2):55-61.(in Chinese))

[2]　侯彦果,李占杰,龚景海.平面单元和壳单元在复合有限条法中模拟加劲肋的应用[J].上海交通大学学报,2022,**56**(6):710-721.(HOU Yan-guo,LI Zhan-jie,GONG Jing-hai. Application of plane elements and shell elements in imitating ribs of members in compound strip method[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*,2022,**56**(6):710-721.(in Chinese))

[3]　李文杰,柯世堂,杨　杰,等.基于分层壳单元模型超大型冷却塔风致倒塌机制与失效准则[J].建筑结构学报,2022,**43**(10):141-150.(LI Wen-jie,KE Shi-tang,YANG Jie,et al. Collapse mechanism and failure criteria based on layered shell element model for super-large cooling tower under wind action[J]. *Journal of Building Structures*,2022,**43**(10):141-150.(in Chinese))

[4]　Cheung Y K,Zhang Y X,Chen W J. A refined nonconforming plane quadrilateral element[J]. *Computers & Structures*,2000,**78**(5):699-709.

[5]　Cen S,Chen X M,Fu X R. Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2007,**196**(41-44):4337-4353.

[6]　Chen J,Li C J,Chen W J. A family of spline finite elements[J]. *Computers&Structures*,2010,**88**(11-12):718-727.

[7]　Zhang L B,Bathe K J. Overlapping finite elements for a new paradigm of solution[J]. *Computers & Structures*,2017,**187**:64-76.

[8]　Wu C J,Cen S,Ma R X,et al. Shape-free arbitrary polygonal hybrid stress/displacement-function flat shell element for linear and geometrically nonlinear analy-

ses[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,2021,**122**(16):4172-4218.

[9] Sangtarash H,Arab H G,Sohrabi M R,et al. A high-performance four-node flat shell element with drilling degrees of freedom[J]. *Engineering with Computers*, 2021,**37**(4):2837-2852.

[10] Sangtarash H,Arab H G,Sohrabi M R,et al. Formulation and evaluation of a new four-node quadrilateral element for analysis of the shell structures[J]. *Engineering with Computers*,2020,**36**(4):1289-1303.

[11] Huang M,Zhao Z F,Shen C Y. An effective planar triangular element with drilling rotation[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2010, **46**(11): 1031-1036.

[12] Tang L M,Liu Y X. Quasi-conforming element techniques for penalty finite element methods[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*,1985,**1**(1):25-33.

[13] Wang C S,Zhang X K,Hu P. A 4-node quasi-conforming quadrilateral element for couple stress theory immune to distorted mesh[J]. *Computers & Structures*,2016,**175**:52-64.

[14] LI T,QI Z H,MA X,et al. Higher-order assumed stress quadrilateral element for the Mindlin plate bending problem[J]. *Structural Engineering and Mechanics*,2015,**54**(3):393-417.

[15] Shang Y,Ouyang W G. 4-node unsymmetric quadrilateral membrane element with drilling DOFs insensitive to severe mesh-distortion[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, **113**(10):1589-1606.

[16] Cen S,Zhou M J,Fu X R. A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions [J]. *Computers & Structures*, 2011, **89**(5-6): 517-528.

[17] Sangtarash H,Ghohani Arab H,Sohrabi M R,et al. An efficient three-node triangular Mindlin-Reissner flat shell element[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*,2020,**42**(6):328.

[18] Dvorkin E N,Bathe K J. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis[J]. *Engineering Computations*,1984,**1**(1): 77-88.

[19] Ko Y,Lee P S,Bathe K J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element [J]. *Computers & Structures*,2017,**192**:34-49.

[20] Klinkel S,Gruttmann F,Wagner W. A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2006,**195**(1-3):179-201.

[21] Abed-Meraim F,Combescure A. A physically stabilized and locking-free formulation of the (SHB8PS) solid-shell element[J]. *European Journal of Computational Mechanics*,2007,**16**(8):1037-1072.

[22] Ibrahimbegovi A,Frey F. Stress resultant geometrically non-linear shell theory with drilling rotations. Part III: Linearized kinematics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994,**37**(21):3659-3683.

[23] Pimpinelli G. An assumed strain quadrilateral element with drilling degrees of freedom[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*,2004,**41**(3):267-283.

[24] Moreira R A S,Dias Rodrigues J. A non-conforming plate facet-shell finite element with drilling stiffness [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*,2011, **47**(9):973-981.

[25] Shang Y,Cen S,Li C F. A 4-node quadrilateral flat shell element formulated by the shape-free HDF plate and HSF membrane elements[J]. *Engineering Computations*,2016,**33**(3):713-741.

Eight-node quadrilateral hybrid shell element with Drilling degrees of freedom

MA Xu*, YANG Xuan-zheng, LI Tan

(School of Science,Yanshan University,Qinhuangdao 066004,China)

Abstract: In this paper, an eight-node quadrilateral hybrid shell element QFUQA8 is constructed, in which the refined uncoordinated membrane part has drilling degrees of freedom. The combined mass matrix is improved by using two kinds of displacement fields, and the computational accuracy of the element is improved by selecting different parameters of the refined elements. The interpolation function is constructed based on the stress field of the element obtained from the analytical solution of the Airy stress function, and the drilling rotation is added to the displacement field of the eight-node isotropic element to determine the test function; the boundary displacement interpolation of the element is constructed in the plate part with the Timoshenko beam function of arbitrary order, and the Airy stress function is used as the assumed stress function, which is corrected for the presence of a warped structure of the element by means of the projection to the mean surface. Numerical examples show that the constructed flat plate-shell elements pass the non-zero constant shear patch test and have good accuracy and convergence in structural analysis of shells.

Key words: unsymmetric finite element method; hybrid stress element; airy stress function; flat shell element