DOI:10.7511/jslx20240114001

三维弹塑性固体大变形分析的无额外自由度广义有限元法

马今伟*[1,2,3], 白 铭[3], 段庆林[3,4]

(1.中国工程物理研究院高性能数值模拟软件中心,北京 100088;2.北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088;
3.大连理工大学 工业装备结构分析优化与CAE软件全国重点实验室,大连 116024;
4.大连理工大学 大连理工大学白俄罗斯国立大学联合学院,大连 116024)

摘 要:无额外自由度广义有限元法在保留标准广义有限元法高阶插值特性的同时,还消除了额外自由度引发的求解规模扩大及线性依赖问题。使其在弹性分析中,相比于传统有限元表现出了计算精度高、收敛性好的优势,同时在平面问题的非线性分析中也展现出了良好潜力。将该方法推广和应用至三维弹塑性固体的大变形分析,一方面可以进一步探究其在非线性分析中的表现,另一方面则拓展了广义有限元法在非线性问题领域的应用。在非线性弹性和弹塑性两种材料的大变形分析中,将该方法同传统有限元和商软进行了对比,计算结果表明了该方法在精度方面的优势。

关键词:广义有限元;额外自由度;非线性分析;弹塑性;大变形

中图分类号:O302 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2025)03-0456-06

1 引 言

广义有限元法[1]起源于21世纪90年代Babuška等[2]提出的单位分解法,以及石根华先生[3]提出的数值流形方法。其在传统有限元框架中引入强化函数从而极大地丰富了插值空间。灵活而强大的强化函数使得广义有限元法得以长久地保持旺盛的活力,广泛应用于水力压裂[4]、焊接[5]、并行计算[6]等问题中。然而,广义有限元法也存在一些局限性,最突出的问题之一就是线性依赖性。强化函数的构造往往需要引入标准自由度之外的未知量,也就是额外自由度,而其与标准自由度之间的线性相关性会使得刚度矩阵的性态变差,严重时甚至会导致奇异,因此,在广义有限元法的大部分应用中都需要采取抑制线性依赖的措施,如特征值分解法、稳定广义有限元法[7]和正交型广义有限元法[8]等。

近年来,田荣[9]提出了一种无额外自由度的广义有限元,强化函数的构造仅依赖于标准自由度,以消除额外自由度的方式来解决线性依赖问题。同时,由于未引入额外自由度,该方法的未知量数目同传统有限元法保持一致,一定程度上缩减了标准广义有限元方法的计算量。随后,这种构造强化函数的思想也用于扩展有限元[10]中,并应用于裂纹扩展模拟和并行计算中。本文前期的工作将这种方法推广到非线性分析[11]中,在超弹性及弹塑性固体的大变形分析中,相比于传统有限元表现出良好的计算精度。然而,前期的工作仅限于二维,本文将其进一步推广到三维非线性分析中。

事实上,广义有限元在非线性尤其是三维弹塑性固体大变形分析中的应用是比较少见的,一些典型的工作包括Proença等[12]采用广义有限元法对三维固体的塑性和损伤问题进行了分析;Novelli等[13]建立了稳定广义有限元的物理非线性分析。然而,这两项工作仅考虑了材料和结构的小变形。Gomes等[14]建立了广义有限元方法的几何非线性分析。然而,其研究仅限于二维平面问题。因此,本文的工作除了进一步扩展无额外自由度广义有限元的非线性分析外,也扩展了广义有限元在三维弹塑性大变形问题中的应用。

收稿日期:2024-01-14;**修改稿收到日期**:2024-02-29.
基金项目:国家自然科学基金面上项目(12372194);中央高校基本科研业务费(DUT21GF304)资助项目.
作者简介:马今伟*(1992-),男,博士,助理研究员(E-mail:majinwei_1234@163.com).
引用本文:马今伟,白 铭,段庆林.三维弹塑性固体大变形分析的无额外自由度广义有限元法[J].计算力学学报,2025,**42**(3):456-461.
MA Jin-wei, BAI Ming, DUAN Qing-lin. A generalized finite element method without extra degrees of freedom for large deformation analysis of three-dimensional elastoplastic solids[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(3):456-461.

2　无额外自由度广义有限元近似

标准广义有限元对标量场的近似可不失一般性地写为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \in E} N_I(\boldsymbol{x}) u_I + \sum_{I \in E} N_I(\boldsymbol{x}) \sum_k \varphi_k^{P_I} a_{I(k)} \tag{1}$$

其中 $x=(x,y,z)$ 为点的空间坐标，E 为 x 所在的单元，N_I 为有限元形函数，$\varphi_k^{P_I}$ 为局部强化函数，$a_{I(k)}$ 为额外自由度。一方面，额外自由度是待求未知量，其引入会扩大问题的求解规模，另一方面，其跟标准自由度 u_I 存在一定程度的线性相关性，从而导致刚度阵性态变差。无额外自由度的广义有限元近似可写为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \in E} N_I(\boldsymbol{x}) \sum_{K \in P_I^r} L_K^{P_I^r}(\boldsymbol{x}) u_K \tag{2}$$

其中 $L_K^{P_I^r}(\boldsymbol{x})$ 为构造在以节点 I 为中心的片 P_I^r 上，节点 K 在 $\boldsymbol{x}$ 处的局部函数，图 1 和图 2 分别展示了三维四面体和六面体网格中不同层数的节点片，上标 r 表示片中围绕中心节点处的单元层数。

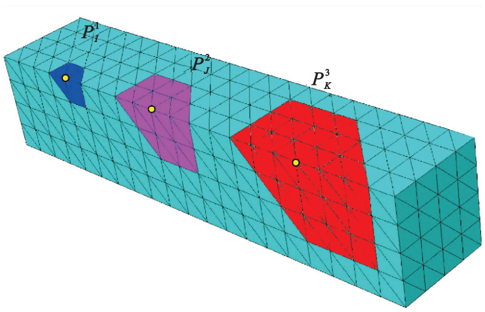

图 1　四面体网格中节点片
Fig. 1　Nodal patch in 3D tetrahedral mesh

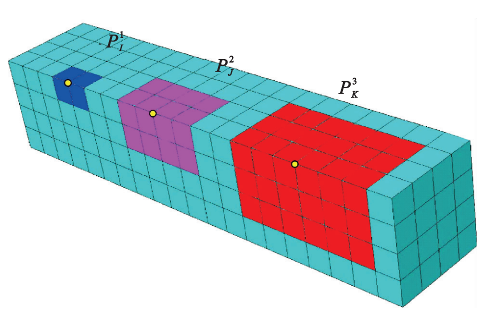

图 2　六面体网格中节点片
Fig. 2　Nodal patch in 3D hexahedral mesh

式(2)可以进一步写为

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{K \in P_E^r} \widetilde{N}_K(\boldsymbol{x}) u_K \tag{3}$$

其中 $\widetilde{N}_K(\boldsymbol{x})$ 为节点形函数，表示为

$$\widetilde{N}_K(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \in E} N_I(\boldsymbol{x}) L_K^{P_I^r}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

式(3)中 P_E^r 为单元上所有节点片的集合，表示为 $P_E^r = \bigcup_{I \in E} P_I^r$。本文采用文献[12]中选择插值的最小二乘法构造的局部近似函数，其表示为

$$L_K^{P_I^r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \left(\begin{array}{l} \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{p}_K + \dfrac{1}{A_{11}^{-1}} \boldsymbol{A}_{(1)}^{-1} \boldsymbol{\delta}_{IK} \\ - \dfrac{1}{A_{11}^{-1}} \boldsymbol{A}_{(1)}^{-1} \boldsymbol{A}_{(1)}^{-\mathrm{T}} \omega_K(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{p}_K \end{array} \right) \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \sum_{K=1}^{n_I} \boldsymbol{p}_K \boldsymbol{p}_K^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{p}_K = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_K)$$
$$p(\boldsymbol{x}) = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \overline{xy}, \overline{yz}, \overline{xz}, \bar{x}^2, \bar{y}^2, \bar{z}^2]^{\mathrm{T}}$$
$$\bar{x} = x - x_I \quad \bar{y} = y - y_I \quad \bar{z} = z - z_I \tag{6}$$

式(5)中，$\boldsymbol{A}_{(1)}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第一列，$\boldsymbol{A}_{11}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}_{(1)}^{-1}$ 的第一个元素，式(6)中 $p(\boldsymbol{x})$ 为偏移型基向量。

3　非线性广义有限元列式

3.1　控制方程弱形式及离散节点力

考虑静力并参考当前构型的控制方程为

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + f_i = 0 \tag{7}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} & u_i(\boldsymbol{x}) = \bar{u}_i^t(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_u^t) \\ & \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j^t(\boldsymbol{x}) = t_i^t(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \Gamma_t^t) \end{aligned} \tag{8}$$

其中 σ_{ij} 是柯西应力张量的分量，f_i 是体力向量分量，$\bar{u}_i^t(\boldsymbol{x})$ 和 $t_i^t(\boldsymbol{x})$ 分别是施加在位移边界 Γ_u^t 和力边界 Γ_t^t 上的固定位移和力载荷，n_j^0 为边界单位外法线。式(7)的弱形式写为

$$\int_{\Omega^t} (\partial \sigma_{ij} / \partial x_j + f_i) \delta u_i \mathrm{d}v = 0 \tag{9}$$

其中 δu_i 为虚位移，考虑边界条件和分部积分，式(9)进一步写为

$$W^{\mathrm{int}} - W^{\mathrm{ext}} = 0 \tag{10}$$

其中 δW^{ext} 和 δW^{int} 分别为外力和内力虚功，分别表示为

$$\begin{aligned} & \delta W^{\mathrm{int}} = \int_{\Omega^t} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \mathrm{d}v \\ & \delta W^{\mathrm{ext}} = \int_{\Gamma_t^t} \bar{t}_i \delta u_i \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega^t} f_i \delta u_i \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{11}$$

式(11)的虚位移采用式(3)的近似可离散为

$$\delta u_i = \sum_{I \in P_E^r} \widetilde{N}_I(\boldsymbol{x}) u_I \tag{12}$$

将式(12)代入式(11)得到节点内力和外力，表示为

$$f_{Ii}^{\mathrm{int}} = \int_{\Omega^t} \sigma_{ij} \widetilde{N}_{I,j} \mathrm{d}v \tag{13}$$

$$f_{Ii}^{\mathrm{ext}}=\int_{\Gamma_t^t}\bar{t}_i\tilde{N}_I\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega^t}f_i\tilde{N}_I\mathrm{d}v \tag{14}$$

如此，弱形式(10)可写为

$$f_{Ii}^{\mathrm{int}}-f_{Ii}^{\mathrm{ext}}=0 \tag{15}$$

3.2　牛顿迭代法及切线刚度

式(15)是关于 $\boldsymbol{x}$ 的非线性方程，牛顿法(也常称牛顿-拉普森迭代法)是最常用的求解方法。前面提到的 $\boldsymbol{x}$ 为当前构型下点的坐标，其可以表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{d} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 为同一点在初始构型中的坐标，$\boldsymbol{d}$ 则表示该点从初始构型到当前构型的位移。由于初始构型已知，因此式(15)成为关于位移的非线性方程，写为

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{d})-\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{d}) \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}$ 和 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}$ 分别为节点内外力的向量形式，$\boldsymbol{r}$ 为节点力残差，其在迭代求解过程中的解可以表示为

$$\{\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\cdots\} \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{d}_0$ 为初始值，通常为 $\boldsymbol{d}_0=0$，通过 $\boldsymbol{d}_n$ 获取 $\boldsymbol{d}_{n+1}$ 的迭代公式为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}_n+\frac{\partial\boldsymbol{r}_n}{\partial\boldsymbol{d}_n}\cdot\Delta\boldsymbol{d}=0\\&d_{n+1}=\boldsymbol{d}_n+\Delta\boldsymbol{d}\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}_n}{\partial\boldsymbol{d}_n}=\frac{\partial\boldsymbol{f}_n^{\mathrm{int}}}{\partial\boldsymbol{d}_n}-\frac{\partial\boldsymbol{f}_n^{\mathrm{ext}}}{\partial\boldsymbol{d}_n}=\boldsymbol{K}_n^{\mathrm{int}}-\boldsymbol{K}_n^{\mathrm{ext}} \tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{K}_n^{\mathrm{int}}$ 和 $\boldsymbol{K}_n^{\mathrm{ext}}$ 分别为内外力刚度，由于本文仅考虑不随构型变化的保守载荷，因此 $\boldsymbol{K}_n^{\mathrm{ext}}\equiv 0$，内力刚度分为材料和几何刚度，并写为

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{int}}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{mat}}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{geo}} \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{IJ}^{\mathrm{mat}}=\int_{\Omega^t}\tilde{\boldsymbol{B}}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{B}_J\mathrm{d}v\quad \boldsymbol{K}_{IJ}^{\mathrm{geo}}=\int_{\Omega^t}\tilde{\boldsymbol{G}}_I^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\tilde{\boldsymbol{G}}_J\boldsymbol{I}\mathrm{d}v \tag{22}$$

式(22)的下标 I 和 J 表示节点编号，另有

$$\tilde{B}_I=\begin{bmatrix}\tilde{N}_{I,x}&0&0&\tilde{N}_{I,y}&0&\tilde{N}_{I,z}\\0&\tilde{N}_{I,y}&0&\tilde{N}_{I,x}&\tilde{N}_{I,x}&0\\0&0&\tilde{N}_{I,z}&0&\tilde{N}_{I,z}&\tilde{N}_{I,x}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\quad \tilde{G}_I=\begin{bmatrix}\tilde{N}_{I,x}\\\tilde{N}_{I,y}\\\tilde{N}_{I,z}\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\\sigma_{22}\\\sigma_{33}\\\sigma_{12}\\\sigma_{23}\\\sigma_{13}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}C_{1111}&C_{1122}&C_{1133}&C_{1112}&C_{1123}&C_{1113}\\C_{2211}&C_{2222}&C_{2233}&C_{2212}&C_{2223}&C_{2213}\\C_{3311}&C_{3322}&C_{3333}&C_{3312}&C_{3323}&C_{3313}\\C_{1211}&C_{1222}&C_{1233}&C_{1212}&C_{1223}&C_{1213}\\C_{2311}&C_{2322}&C_{2333}&C_{2312}&C_{2323}&C_{2313}\\C_{1311}&C_{1322}&C_{1333}&C_{1312}&C_{1323}&C_{1313}\end{bmatrix} \tag{24}$$

其中 $\tilde{N}_{I,i}$ 为节点 I 处的形函数导数，C_{ijkl} 为本构模量，并将在本文的后续章节中进行阐述。

4　弹塑性本构方程

基于和式分解的弹塑性本构方程写为

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\sigma J}:(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \tag{25}$$

其中 $\sigma^{\nabla J}$ 为柯西应力 Jaumann 率张量，$\dot{\varepsilon}^p$ 为塑性应变率，$C^{\sigma J}$ 为本构模量，其分量形式表示为

$$C_{ijkl}^{\sigma J}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{26}$$

其中，λ 和 μ 为拉梅常数，两者同弹性模量 E 和泊松比 υ 之间的关系分别为

$$\mu=\frac{E}{2(1+\upsilon)},\quad \lambda=\frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \tag{27}$$

对式(25)直接积分进行应力更新难以保持应力增量形式的客观性，本文采用 Hughes-Winget 算法[15]更新应力，写为

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}_n\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}^{\sigma J}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为 Hughes-Winget 算法中的旋转张量，另有

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p=\Delta\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}=\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{I}\\&f(\boldsymbol{\sigma},\bar{\varepsilon}^p)=\sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}:\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}}-\sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p)\end{aligned} \tag{29}$$

其中 λ 为塑性乘子，等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 更新公式为

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p=\bar{\varepsilon}_n^p+\Delta\lambda \tag{30}$$

屈服半径 σ_Y 是关于 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数，而常数、线性及指数形式的函数则分别对应理想塑性、线性强化塑性、指数强化塑性等材料模型。

考虑式(28～30)，塑性一致性条件

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1},\bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\leqslant 0\quad(\dot{f}\equiv 0) \tag{31}$$

成为 $\Delta\lambda$ 的单变量非线性方程，可通过牛顿法进行迭代求解。构建切线刚度需要建立应力增量同总应变增量之间的联系，即

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}_n\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}:\Delta\varepsilon \tag{32}$$

本文不加推导地给出应用于式(24)的一致切线模量

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{al}-\boldsymbol{C}'+\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{I} \tag{33}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{C}^{al}=C^{\sigma J}-2\mu\frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}\varepsilon_{n+1}}\otimes\boldsymbol{r}-2\mu\Delta\gamma\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varepsilon_{n+1}}\\&C'_{ijkl}=\frac{1}{2}(\delta_{ik}\sigma_{jl}+\delta_{il}\sigma_{jk}+\delta_{jk}\sigma_{il}+\delta_{il}\sigma_{jk})\\&\boldsymbol{r}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}\end{aligned} \tag{34}$$

上述推导的细节参见文献[16]。

5　数值算例

本节采用两个算例考察无额外自由度广义有限元法在弹塑性材料大变形分析中的表现。为方便阐述,后文采用该方法指代本文无额外自由度广义有限元,并在结果中标记为 GFEM。这些算例中还同常规有限元以及商业软件 ABAQUS 的结果进行了对比,来表明该方法在弹塑性大变形分析中的合理性和优越性,其在结果中分别标记为 FEM 和 ABAQUS 中的单元类型。在这些算例中无额外自由度广义有限元均采用二阶强化函数,其基底向量可参见式(6)。

5.1　浅　拱

如图 3 所示,两端固支弧形浅拱在顶部中心点 A 处受向下大小为 40 N 的集中力作用。浅拱中性轴半径为 R =100 mm,拱宽为 2 mm,拱厚2 mm,浅拱对应圆心角为 28.06°,材料为次弹性,即 $\sigma_Y = \infty$,杨氏模量 $E = 4.8 \times 10^3$ N/mm²,泊松比 $\upsilon = 0.0$。集中力载荷均分为 20 步依次施加。

该算例采用如图 4 所示的六面体网格,并分别采用无额外自由度广义有限元和 ABAQUS 中的线性 C3D8 单元和二阶 C3D20 单元进行计算。图 4 还展示了该方法计算得到的拱的变形结果。图 5 则展示了该方法和 C3D8 及 C3D20 单元计算得到施力点处的位移-载荷曲线,并采用 ABAQUS 的收敛解(在 C3D8 单元极密网格中得到的结果)作为参考。

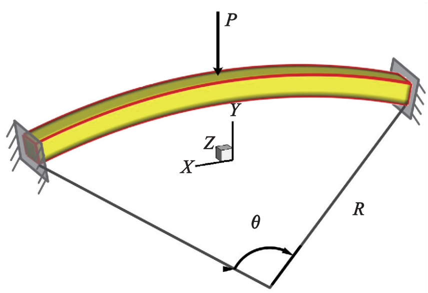

图 3　浅拱算例
Fig. 3　Shallow arch example

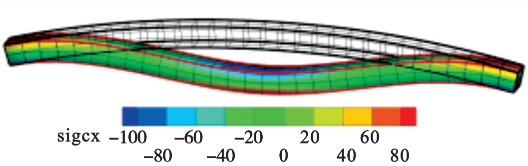

图 4　浅拱算例网格图及 C3D8 单元计算变形图
Fig. 4　Mesh and result obtained by C3D8 element in the shallow arch example

由图 5 可以看出,该方法的计算精度明显高于 ABAQUS 的 C3D8 单元,并同 ABAQUS 的 C3D20 单元精度基本一致。然而,需要说明的是,三条曲线都是 120 个单元的计算结果,而 C3D8 单元和该方法的节点数为 289,C3D20 单元中的节点数目则达到了 2475。

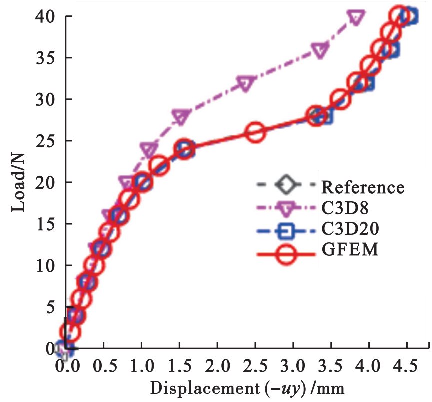

图 5　浅拱算例中的位移-载荷曲线对比
Fig. 5　Comparison of displacement-load curves in the shallow arch example

5.2　铝杆颈缩

本算例考察了铝杆拉伸中的颈缩变形。如图 6 所示,一直径 D =12.826 mm,长度为 L = 53.334 mm的圆柱形铝杆,两端拉伸 7 mm。由于结构的三重对称性,仅取其 8 分之一进行分析,计算模型如图 6 所示。铝杆的材料参数为 υ =0.29,E =206.9 GPa。塑性模型采用了指数强化模型,写为

$$\sigma_Y(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_{Y0} + \vartheta \bar{\varepsilon}^p + (\tilde{\sigma}_Y - \sigma_{Y0})(1 - e^{-\beta \bar{\varepsilon}^p}) \tag{35}$$

其中 σ_{Y0}=450 MPa,$\tilde{\sigma}_Y$ =715 MPa,β=16.93,ϑ = 129.24 MPa。

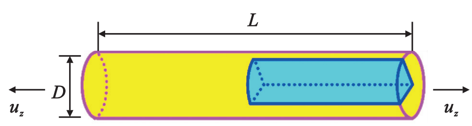

图 6　铝杆颈缩算例
Fig. 6　Necking of the necking aluminium bar

为了引发颈缩变形,将几何缺陷引入到模型中。计算模型中,圆柱的直径沿着轴向线性衰减,z =0处的直径是 z =L/2 处直径的 98.2%。图 7 展示了计算中采用的网格,包含 7754 个四面体单元,同时还展示了该方法计算得到的 Mises 等效应力在变形后构型中的分布。图 8 则对比了该方法和传统有限元(线性单元)结果的对比,并采用实验数据[16]进行了对比,其中横轴表示加载的位移载荷,纵轴则表示颈缩处的半径同初始半径的比例。可以看出,该方法对铝杆颈缩现象的描述相比于传统有限元更加接近实验数据。

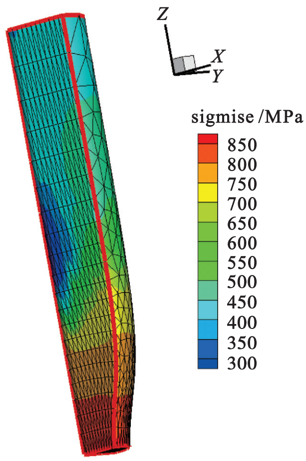

图7 铝杆颈缩算例 Mises 等效应力在变形后构型中的分布

Fig. 7 Distribution of Mises stress in the deformed configuration of the necking aluminium bar example

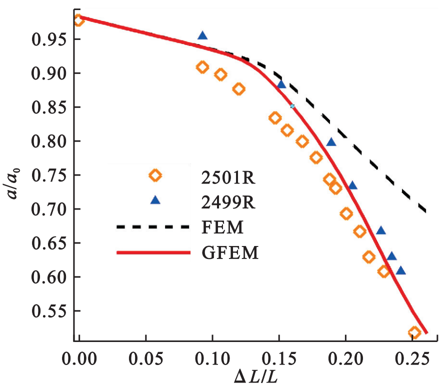

图8 铝杆颈缩算例载荷-颈缩比例曲线对比

Fig. 8 Comparison of displacement load-necking behavior in the necking aluminium bar example

5 结 论

本文将无额外自由度广义有限元推广到了三维弹塑性固体的大变形分析中,并通过两个典型的数值算例验证了算法的有效性和优越性。在浅拱算例中,与采用了同样数目单元和节点商软单元相比,其具有明显的精度优势,同时与商软高阶单元的计算精度接近,但节点数仅是其八分之一。铝杆颈缩的算例则验证了该方法在较复杂材料模型分析中的适用性。这些结果同时也证明,本文发展的算法具有良好的工程应用前景。

参考文献(References):

[1] Strouboulis T, Copps K, Babuška I. The generalized finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(32-33):4081-4193.

[2] Babuška I, Melenk J M. Partition of unity method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**:727-758.

[3] Shi G H. Numerical manifold method[A]. Proceedings of the First International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation(ICADD-1)[C]. 1995.

[4] Mukhtar F M, Duarte C A. Coupled multiphysics 3-D generalized finite element method simulations of hydraulic fracture propagation experiments[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, **276**:108874.

[5] Canales D, Leygue A, Chinesta F, et al. Vademecum-based GFEM (V-GFEM): Optimal enrichment for transient problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, **108**(9):971-989.

[6] Li H, Duarte C A. A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **337**:28-65.

[7] Babuška I, Banerjee U. Stable generalized finite element method(SGFEM)[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, **201**:91-111.

[8] Sillem A, Simone A, Sluys L J. The Orthonormalized Generalized Finite Element Method—OGFEM: Efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **287**:112-149.

[9] Tian R. Extra-dof-free and linearly independent enrichments in GFEM[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **266**:1-22.

[10] Tian R, Wen L F. Improved XFEM: An extra-dof free, well-conditioning, and interpolating XFEM[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **285**:639-658.

[11] 马今伟,段庆林,陈嵩涛. 无额外自由度广义有限元非线性分析[J]. 计算力学学报, 2021, **38**(1):60-65. (MA Jin-wei, DUAN Qing-lin, CHEN Song-tao. Extra-dof-free generalized finite element method for non-linear analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(1):60-65. (in Chinese))

[12] Proença S P B, Torres I F R. Generalized finite element method for nonlinear three-dimensional analysis of solids[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2008, **5**(1):37-62.

[13] Novelli L, de Oliveira T S, da Silveira Monteiro H A, et al. Stable generalized/extended finite element method with global-local enrichment for material nonlinear analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**:113429.

[14] Gomes L L, Barros F B, Penna S S, et al. Geometrically nonlinear analysis by the generalized finite element method[J]. *Engineering Computations*, 2021, **38**(1):266-288.

[15] Hughes T J R, Winget J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, **15**(12):1862-1867.

[16] Simo J C, Hughes T J R. *Computational Inelasticity* [M]. Cham: Springer New York, 1998.

A generalized finite element method without extra degrees of freedom for large deformation analysis of three-dimensional elastoplastic solids

MA Jin-wei*[1,2,3], BAI Ming[3], DUAN Qing-lin[3,4]

(1. CAEP Software Center for High Performance Numerical Simulation, Beijing 100088, China; 2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China; 3. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 4. DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The generalized finite element method (GFEM) without extra degrees of freedom eliminates the issues of the increased scale of a linear system and linear dependence, while preserving the standard high-order interpolation characteristics. This results in advantages such as high computational accuracy and good convergence compared with traditional finite element methods in elastic analysis of elasticity problems. Simultaneously, it demonstrates promising potential in the nonlinear analysis of planar problems. The extension and application of this method to large deformation analysis of three-dimensional elastoplastic solids allow for further exploration of its performance in nonlinear analysis and broaden the application of GFEM in the field of nonlinear problems. In the large deformation analysis of nonlinear elastic and elastoplastic materials, this method is compared with traditional finite element methods and commercial software. The computational results demonstrate superiority of this method in terms of accuracy.

Key words: generalized finite element method; extra degrees of freedom; nonlinear analysis; elastoplasticity; large deformation

(上接第 455 页)

Deflection analysis of an improved composite box girder with corrugated steel webs

LUO Kui[1,2], JI Wei[2], WANG Xiu-yan*[3,4], KONG Xuan[2], HAN Zhen-yong[3,5]

(1. Department of Civil and Airport Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 3. China Construction Sixth Engineering Bureau Co., Ltd., Tianjin 300171, China; 4. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China; 5. Tianjin Urban Construction Design Institute Co., Ltd., Tianjin 300122, China)

Abstract: In order to accurately analyze the deflection of an improved composite box girder with a corrugated steel web (ICBGCSW), the deflection of the ICBGCSW is investigated using the finite beam segment method. First, the element stiffness matrix of ICBGCSW is derived using the principle of stationary potential energy by considering the shear deformation of the corrugated steel web (CSW) and the shear lag effect of the box girder. Furthermore, the deflection analysis program of ICBGCSW is developed based on the element stiffness matrix, and the accuracy and applicability of the proposed method is verified against the measured and finite element values of the deflection of the model test beam. Finally, the factors affecting the deflection of ICBGCSW are investigated. The results show that the deflection values obtained using the deflection analysis program are well matched with the measured and finite element values, and the error is within 2%. When the height-span ratio is less than 0.069, the thickness of the CSW and steel bottom plate has a greater effect on the deflection. When the height-span ratio is greater than 0.069, the effect of the thickness of CSW and steel bottom plate on deflection can be ignored. The deflection analysis program developed in this paper is simple to use, and the deflection values can be obtained by simply substituting the cross-section information and material properties of ICBGCSW into the program. The research results can provide a simplified analysis method for the deflection analysis of ICBGCSW.

Key words: composite box girder; corrugated steel web; element stiffness matrix; deflection calculation; parametric analysis