DOI:10.7511/jslx20240103001

金属塑性变形数值流形模拟的场量更新方法

黎梓雯[1], 章争荣*[1,2]

(1.广东工业大学 材料与能源学院,广州 510000; 2.广东省金属成形加工与锻压装备技术重点实验室,广州 510000)

摘 要:数值流形方法采用数学覆盖和物理覆盖两套分开且独立的覆盖网格进行数值计算,采用数值流形方法模拟塑性成形过程时,自由界面在固定数学网格上会产生运动变化,因此需要基于数学覆盖网格去更新物理网格以及进行物理覆盖的信息转换。本文针对轴对称问题采用四节点流形单元,提出了基于映射插值方法,计算当前时刻更新后的物理网格节点在上一时刻的坐标,使用上一时刻的覆盖函数及覆盖权函数求得更新后的物理覆盖网格节点的场量信息,并对计算结果进行迭代修正以降低误差。以二维轴对称变形中镦粗变形的场量更新为例展开数值计算,误差分析结果表明,以节点映射插值计算得到的节点信息作为初始值,在修正过程中迭代次数较少,更新速度快,说明使用该方法进行新旧物理覆盖网格的场量更新效果理想。

关键词:塑性成形;数值流形;场量更新

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2025)03-0435-05

1 引 言

金属塑性成形是一种基本的金属加工工艺,广泛地应用于制造业的各个领域。目前塑性有限元是金属塑性成形计算机模拟采用的主要数值方法,但面对金属大变形模拟过程,塑性有限元则会存在网格畸变,则必须经过网格重新划分和各场变量转换[1],进而降低计算效率及影响计算精度。此外,塑性有限元的计算精度只与时间步长、单元网格形状大小相关,对于进一步提高计算精度只能通过细化网格,使得模拟过程中网格划分的工作量较大。这些是塑性有限元本身的局限性,使其在金属塑性成形科学研究和工程实验中受到限制。

数值流形方法是由石根华[2]于 20 世纪 90 年代初提出,采用有限单元覆盖系统进行数值计算,在网格划分、覆盖形式、近似函数等方面有其自身的特点和优势[3]。该方法自提出以来,已在岩土工程[4,5]、裂纹扩展[6,7]等诸多领域得到成功应用。此外,将数值流形方法应用于大变形、大位移等问题[8,9],发现使用数值流形模拟分析具有良好的适应性,且采用改进的流形方法能消除大变形和刚性位移导致的误差[10],在处理复杂几何构型的结构时具有一定的优越性[11],能有效克服塑性有限元网格重新划分的问题。但由于数值流形法是基于数学覆盖和物理覆盖的双重覆盖方法,塑性变形的过程必然会伴随着物理覆盖网格的变化,又由于物理结构与数学覆盖的交集形成了求解域上的物理覆盖[12],因此物理网格是基于固定的数学网格进行划分的。所以,使用数值流形方法进行金属塑性成形模拟计算必须解决物理网格的更新和场量信息的传递问题。

本文提出使用数值流形方法进行金属塑性变形数值模拟计算过程中场量信息传递的新方法。通过映射插值[13]计算网格更新后的新物理网格节点在物理网格变形前的初始坐标,并计算在当前时间步内的场量信息。对插值计算带来的误差,采用迭代修正的方法将误差降低到目标范围。

2 场量更新的基本原理和计算方法

数值流形方法最大的特点在于其包含两个覆盖系统,其中以固定的数学网格为参照,使物理覆盖网格的更新过程更为便捷,网格更新过程如图 1

收稿日期:2024-01-03; **修改稿收到日期**:2024-02-29.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(52175294)资助.

作者简介:章争荣*(1969-),男,博士,教授(E-mail:zzr@gdut.edu.com).

引用本文:黎梓雯,章争荣.金属塑性变形数值流形模拟的场量更新方法[J].计算力学学报,2025,**42**(3):435-439.

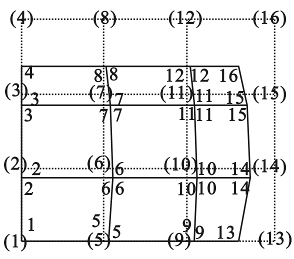
LI Zi-wen, ZHANG Zheng-rong. Methods for field quantity updating during plastic forming of metals using numerical manifold methods[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(3): 435-439.

所示。新的物理网格节点上的场量信息则需要根据物理网格在变形前的场量数据插值求得,计算步骤如下。

(1)读取当前时刻更新后的物理网格的节点坐标,如图1(b)中的点1,2,3,4等;当前时刻更新前的流形单元的网格信息,如图1(a)中1,5,6,2和2,6,7,3等单元的编号及节点信息;上一时刻变形前的流形单元的网格信息,如图2(a)中1,5,6,2和2,6,7,3等单元的编号及节点信息。

(2)以更新后的物理网格中的一个节点为目标对象,搜索上一时刻在物理网格节点坐标位置上相邻的若干个流形单元;利用得到的若干个流形单元在变形后的坐标,使用向量积计算法判断在网格更新前物理网格节点所处的单元。利用物理网格节点所在单元的四个节点插值表示出物理网格节点的坐标,得到坐标插值函数;使用映射插值方法,将单元在上一时刻的节点坐标代入到插值函数中,即可得到物理网格节点在上一时刻的初始坐标,并计算物理网格节点在该时间步的运动速度。

(3)计算上述过程中求得的初始坐标及场量信息的误差,通过迭代修正降低误差。



(a) 更新前
(a) Before updated

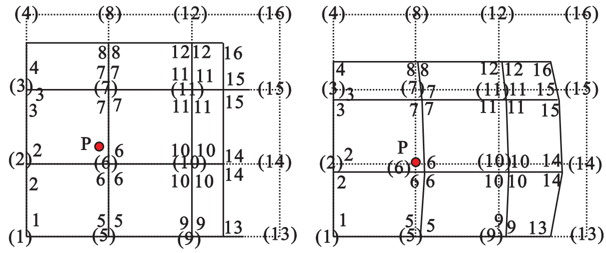
(b) 更新后
(b) After updated

图1 物理覆盖网格更新
Fig.1 Update of physical cover mesh

3 场量更新的具体计算方法

3.1 单元判断

物理覆盖的交集形成了流形单元,而物理覆盖网格节点的场量信息由其所在流形单元内的近似场函数求得,因此计算场量信息需要判断物理网格节点所在单元即判断该点是否在单元四个节点所围成的四边形内部。图2为金属塑性变形过程中某一时间步内物理网格的变形过程,可知点P在t_{n+1}时刻到达数学网格节点(6)的坐标位置,由图1(b)可知,在网格更新后点P成为新的物理覆盖网格的节点,判断其在t_n时刻所在单元。



(a) t_n时刻
(a) t_n moment

(b) t_{n-1}时刻
(b) t_{n-1} moment

图2 物理覆盖网格变形
Fig.2 Deformation of physical cover mesh

由于每一时间步节点位移较小,要确定在t_{n+1}时刻运动到数学网格节点(6)位置上的点P在t_n时刻所处的单元,可以直接从在t_n时刻与数学网格节点(6)相邻的流形单元中判断,由图2(a)可知,分别是流形单元1,5,6,3、单元5,9,10,6、单元6,10,11,7、单元2,6,7,3。将与节点(6)相邻的流形单元在t_{n+1}时刻即变形后的流形单元的节点序号按逆时针分别设为k,l,m,n,如图2(b)所示,需要计算的物理网格节点记为点P,若向量$\boldsymbol{kl}\times\boldsymbol{kP}$,$\boldsymbol{ln}\times\boldsymbol{lP}$,$\boldsymbol{mn}\times\boldsymbol{mP}$,$\boldsymbol{nk}\times\boldsymbol{nP}$的值皆为正值或皆为负值,证明点$P$在$t_{n+1}$时刻处于该单元节点构成的四边形内,同时认为点$P$在$t_n$时刻即流形单元变形前也属于该单元。

3.2 初始坐标及场量计算

通过上述过程得到点P在t_n时刻所在的单元,并且点P在t_{n+1}时刻的坐标已知,利用点P所在单元变形前后的映射关系可以求出其在t_n时刻的具体坐标。计算过程如下,图3为一流形单元在t_n时刻到t_{n+1}时刻节点的位移变化,四边形$klmn$为流形单元在t_{n+1}时刻的状态,四边形$k'l'm'n'$为流形单元在t_n时刻的状态,点P为在四边形$k'l'm'n'$内的点,且在t_{n+1}时刻移动到数学网格节点位置处即图中l'的位置,成为更新后的物理网格节点。

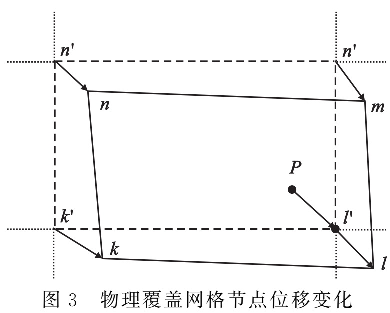


图3 物理覆盖网格节点位移变化
Fig.3 Displacement of the physical cover mesh's node.

由于四边形$klmn$为任意四边形单元,为了便于构造单元的坐标插值函数,在单元内建立一个局

部坐标系 $O\xi\eta$，进行坐标变换，变换后的局部坐标为一个边长为 2 的正方形，正方形内任意一点 (ξ,η) 与实际流形单元内的点 (x,y) 一一对应，通过坐标变化，将实际单元映射为一个正方形单元，实际流形单元与正方形单元上的点可以相互映射。则点 P 在 t_{n+1} 时刻所处的位置坐标 (x,y) 可以通过流形单元在 t_{n+1} 时刻的节点坐标即图 3 中的点 $klmn$ 的坐标插值表示，插值函数为

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=4}^{4} N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (i \in k,l,m,n) \tag{1}$$

式中 (x_i, y_i) 为实际流形单元的四个物理覆盖网格节点坐标值，N_i 为正方形单元的形状函数，则点 $P(x,y)$ 与四边形单元的四个节点的坐标关系为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_k + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_l + \\ &\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_m + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_n = x \\ &\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_k + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_l + \\ &\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_m + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_n = y \end{aligned} \tag{2}$$

通过求解二元一次方程(2)，可以得到与点 $P(x,y)$ 对应的正方形单元上的点 (ξ,η)，即可以求出该点与单元的四个节点的坐标关系。由于变形过程中，在同一时间步内，四边形单元内的点与四个节点的坐标关系系数即 ξ 和 η 可视为不变。则将 t_n 时刻流形单元 $k'l'm'n'$ 的四个顶点坐标分别代入式(1)，假设点 P 在 t_n 时刻的坐标为 (x',y')，则点 P 与点 $k'l'm'n'$ 的坐标关系为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_{k'} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_{l'} + \\ &\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_{m'} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_{n'} = x' \\ &\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_{k'} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_{l'} + \\ &\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_{m'} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_{n'} = y' \end{aligned} \tag{3}$$

将式(2)求得的 (ξ,η) 代入到位移函数中，即可求出点 P 在 t_n 时刻的具体坐标 (x',y')。

根据流形单元的覆盖函数和覆盖权函数，可以确定整个求解域上的总体覆盖函数。由式(3)得到点 P 在 t_n 时刻的坐标为 (x',y')，则点 P 的总体位移函数为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u(x',y') \\ v(x',y') \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^{4} N_i(x',y')\phi_i(x',y') \\ &= \sum_{i=1}^{4} N_i(x',y')[f]\{D_i\} \end{aligned} \tag{4}$$

式中 N_i 为覆盖权函数，ϕ_i 为覆盖函数，$[f]$ 为基本级数，$\{D_i\}$ 为物理覆盖 U_i 上的覆盖自由度。

3.3 迭代计算

物理网格更新后得到在 t_{n+1} 时刻的物理网格节点为 (x_{n+1}, y_{n+1})，通过映射插值计算得到其在 t_n 时刻的坐标 (x_n, y_n) 及其在该时间区域内的速度 $(u(x_n,y_n), v(x_n,y_n))$，设时间步长为 Δt。在理想状态下点 (x_n,y_n) 经过 Δt 位移后的坐标为 (x_{n+1},y_{n+1})，由于插值计算存在误差，点 (x_n,y_n) 位移后得到的真实坐标为 $((x_n+u\cdot\Delta t),((y_n+v\cdot\Delta t))$，真实坐标越接近 (x_{n+1},y_{n+1})，映射插值计算的精度越高。通过两点距离公式得

$$\sqrt{((x_n+u\cdot\Delta t)-x_{n+1})^2+((y_n+v\cdot\Delta t)-y_{n+1})^2}=\delta \tag{5}$$

δ 的大小主要与划分的网格大小、形状函数及增量变形时间步长 Δt 相关。若误差 $\delta < 10^{-6}$，则认为计算达到目标精度，否则通过迭代计算降低误差，计算过程如下，首先求得 x 方向和 y 方向上的误差为

$$\begin{aligned} \delta_x &= x_n + u\cdot\Delta t - x_{n+1} \\ \delta_y &= y_n + v\cdot\Delta t - y_{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

根据得到的误差值，对坐标 (x_n,y_n) 的 x 方向和 y 方向分别修正：

$$\begin{aligned} x_n &= x_n + \eta\delta_x \\ y_n &= y_n + \eta\delta_y \end{aligned} \tag{7}$$

式中 η 称为减速因子，$0 < \eta \leqslant 1$，选择合适的减速因子可以有效减少迭代次数。将求得的 (x_n,y_n) 再代入到速度与坐标的关系公式中，求得 (u,v)；进一步地，将修正后的坐标与速度代入到式(6)中，若 $\delta < 10^{-6}$，说明修正后的 (x_n,y_n) 达到目标精度，若 $\delta > 10^{-6}$，则重复上述步骤，直到精度达到要求或者达到修正次数。

4 计算方法的分析

为统计节点追踪的误差，现以刚塑性金属的镦粗变形为例，金属材料模型高度为 16 mm，半径为8 mm，材料选择工业纯铁，在常温下压缩，硬化曲线为 $S=$

$\sigma_s+608\varepsilon^{0.25}$，摩擦为 $\tau_f=0.3\cdot\bar{\sigma}/\sqrt{3}$，取网格大小为1 mm×1 mm，上模下压速度为 2 mm/s，时间步长为0.3 s。模拟过程中，将上下模视为刚体，不考虑其应变，使用罚函数法处理零位移和非零位移边界。取其中一个时间步的计算结果为例，如图 4 所示，流形单元总数量为 117，流形单元节点数量为 140。经过一个时间步长，上模移动的距离为0.6 mm，在当前时刻更新后得到的物理网格，其流形单元数量为 127，流形单元节点数量为 151，则更新当前时刻的场量需要计算151 个节点在上一时刻的坐标及场量信息。

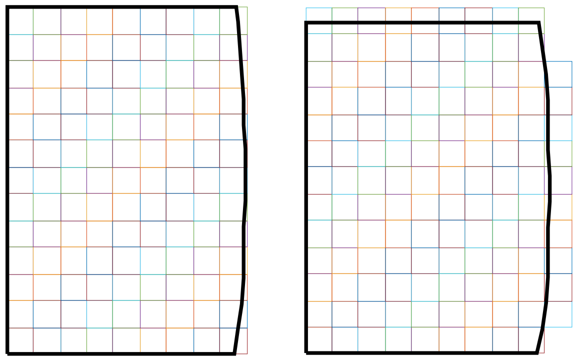


图 4 镦粗变形过程

Fig. 4 Upsetting deformation process

上文通过节点映射插值求得其在物理网格变形前的坐标，统计节点计算的误差值范围 δ 以及每个物理覆盖网格节点修正过程需要迭代的次数，列入表 1和表 2，计算的误差范围基本在 $10^{-4}\sim10^{-2}$之间，且经过 3 次迭代即可达到 $\delta<10^{-6}$，说明通过节点映射的方法插值求得其在上一时刻的坐标的算法是可行的。基于 MATLAB 软件，设计编辑了镦粗变形过程的计算程序以及后处理显示程序，得到镦粗变形过程的等效应力并绘制成应力云图如图 5 所示，经过物理网格更新以及场量信息传递后计算得到的等效应力云图，和上一时刻到当前时刻直接计算得到的等效应力云图分布几乎完全相同，说明物理覆盖网格场量更新的算法是可靠的。

表 1 计算误差范围统计

Tab.1 Statistical margin of calculation error

误差范围	$<10^{-4}$	$10^{-4}\sim10^{-3}$	$10^{-3}\sim10^{-2}$	$10^{-2}\sim10^{-1}$	$>10^{-1}$
占总数比例	13.91%	71.52%	14.57%	0.00%	0.00%

表 2 迭代次数统计

Tab. 2 Statistics of iterations

迭代次数	0	1	2	3	4	5
占总数比例	1.32%	11.26%	61.59%	25.83%	0.00%	0.00%

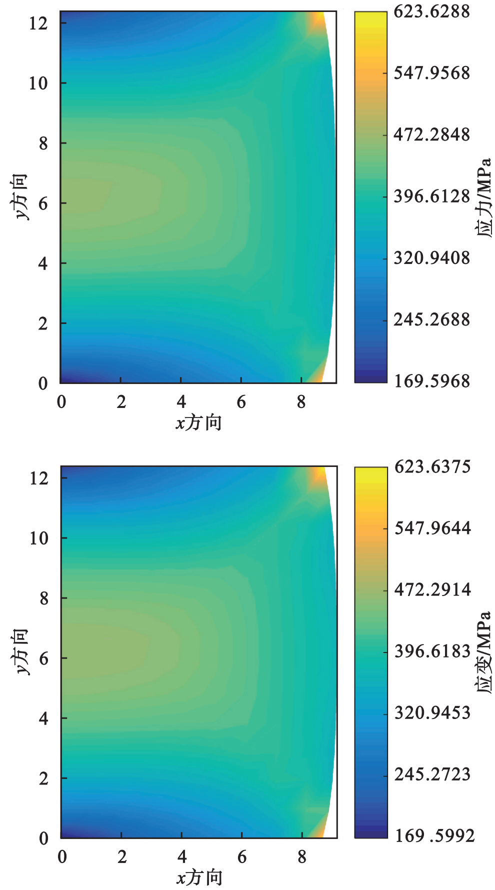


图 5 场量更新前后的等效应力云图

Fig. 5 Equivalent stress nephogram before and after field quantity updating

5 结 论

本文针对塑性成形数值流形模拟在场量更新问题进行研究，得到以下结论。

(1)利用物理网格变形前后以及更新前后的网格信息，使用映射插值的方式完成了物理覆盖网格的信息转换量信息转换。

(2)通过迭代修正能有效提高插值计算精度。

(3)数值算例结果表明，本方法可以有效且高精度地解决数值流形方法中的场量更新问题。

参考文献(References)：

[1] 李尚健. 金属塑性成形过程模拟[M]. 北京：机械工业出版社，1999. (LI Shang-jian. *Simulation of Metal Plastic Forming Process*[M]. Beijing：China Machine Press，1999. (in Chinese))

[2] Sin G H. Discontinuous deformation analysis：A new numerical model for the statics and dynamics of deformable block structures[J]. *Engineering Computations*，1992，**9**(2)：157-168.

[3] Ma G W，An X M，He L. The numerical manifold

method:A review[J]. *International Journal of Computational Methods*,2010,**7**(1):1-32.
[4] Shi G H. Rock stability analysis and three convergences of discontinuous deformation analysis(DDA)[A]. Proceedings of the 9th International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation(ICADD9)[C]. 2010.
[5] Li X,Zhao J. An overview of particle-based numerical manifold method and its application to dynamic rock fracturing[J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*,2019,**11**(3):684-700.
[6] Zhang H H,Li L X,An X M,et al. Numerical analysis of 2D crack propagation problems using the numerical manifold method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*,2010,**34**(1):41-50.
[7] Yang L,Yang Y T,Zheng H. A phase field numerical manifold method for crack propagation in quasi-brittle materials[J]. *Engineering Fracture Mechanics*,2021,**241**:107427.
[8] Zhang Z R. Numerical nethod based on compatible manifold element for thin plate bending[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*,2010,**23**(1):100.
[9] Fan H,Zhang H,He S M. S-R decomposition based numerical manifold method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2016,**304**:452-478.
[10] Wei W,Jiang Q H. A modified numerical manifold method for simulation of finite deformation problem[J]. *Applied Mathematical Modelling*,2017,**48**:673-687.
[11] 武卓威,刘俊.基于数值流形方法的特殊孔缘单元构造及开孔板求解[J].计算力学学报,2021,**38**(5):681-687.(WU Zhuo-wei,LIU Jun. A special hole edge element fitted to numerical manifold method for analyzing plates with holes[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2021,**38**(5):681-687.(in Chinese))
[12] 章争荣,张湘伟.二维定常不可压缩粘性流动 N-S 方程的数值流形方法[J].计算力学学报,2010,**27**(3):415-21.(ZHANG Zheng-rong,ZHANG Xiang-wei. Numerical manifold method for steady incompressible viscous 2D flow Navier-Stokes equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2010,**27**(3):415-421.(in Chinese))
[13] Herrmann L R. Laplacian-isoparametric grid generation scheme[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*,1976,**102**(5):749-756.

Methods for field quantity updating during plastic forming of metals using numerical manifold methods

LI Zi-wen[1], ZHANG Zheng-rong*[1,2]
(1. School of Material and Energy,Guangdong University of Technology,Guangzhou 510000,China;
2. Provincial Key Laboratory of Metal Forming Processing and Forging Equipment Technology,Guangzhou 510000,China)

Abstract:Two sets of separate and independent coverage grids are used in the numerical manifold method:mathematical cover and physical cover. When the numerical manifold method is used to simulate the plastic forming process,the physical domain will be deformed on the fixed mathematical mesh. Therefore,the physical grid needs to be updated based on the mathematical coverage grid and the physical coverage information needs to be transformed. In this paper,an interpolation mapping method is proposed to calculate the coordinates of the physical grid nodes at the previous time updated at the current time,and the field information of the physical mesh nodes updated at the previous time is obtained by using the cover function and weight function of cover at the previous time,and the calculation error can be reduced by revised iteration. The result of error analysis shows that the node information obtained by the node interpolation mapping is used as the initial value,and the number of iterations is reduced and the updating speed is accelerated. For this reason,this method is proved to be effective in updating the fields of old and new physical coverage grids.

Key words:plastic forming;numerical manifold method;field update