DOI:10.7511/jslx20240114002

不考虑几何刚度的框架结构非线性分析方法

陈安全*[1,2], 林航葳[1]

(1. 内江师范学院 建筑工程学院,内江 641100; 2. 内江市智能建造与建筑工业化工程技术研究中心,内江 641100)

摘 要:从增量迭代的力学机制出发,详细分析了增量迭代计算中预测阶段、校正阶段和平衡检查阶段的特征,并结合刚体准则,确立了框架结构非线性分析过程中单元节点恢复力计算的精确公式;同时采用改进塑性铰模型,构建了弹塑性梁单元并推导了弹塑性刚度矩阵,建立起物理概念清晰、过程简洁的框架结构非线性分析方法。通过对典型案例的分析表明,采用刚体准则更新单元初始节点力,在不考虑结构几何刚度的情况下,仅使用弹性或弹塑性刚度就可以求解框架结构的非线性响应,唯一的牺牲是稍微增加数值计算中的迭代次数,证明所提方法具有很好的可靠性,是框架结构弹性刚度和弹塑性刚度在非线性和后屈曲分析中的极限应用。

关键词:框架结构;几何非线性;材料非线性;刚体准则;改进塑性铰

中图分类号:TU312 **文献标志码**:A **文章编号**:1007-4708(2025)03-0395-09

1 引 言

结构极限承载性能通常表现出非线性特征,要准确评估结构极限承载能力需进行非线性行为分析,故高效、稳定、精确的结构非线性分析理论一直是工程结构分析领域的研究热点[1,2]。

对于框架结构的几何非线性分析,常用梁柱理论[3,4]与非线性有限元[5-8]两种方法。无论是梁柱理论还是非线性有限元,由于几何非线性的存在,求解单元刚度的过程都涉及大量的力学推导,特别是与几何非线性相关的高阶项的取舍,是学者研究重点。如 Mallett 等[5]考虑了横向位移二阶项的影响,根据势能原理,推导出了与总变形有关的割线刚度矩阵。Oran[3]在推导梁单元切线刚度时忽略了空间转角二阶和高阶效应,忽略了部分弯扭耦合项。Yang 等[7]通过考虑和省略轴向非线性应变的平方项,分别获得了普通和简化的梁单元几何刚度矩阵。此外 Yang 等[8]还采用刚体位移场推导出刚性单元的几何刚度。各种理论推导出的梁单元几何刚度不同,很难验证各自的适用范围,也没有标准进行统一。

分析框架结构极限承载能力,除考虑几何非线性之外,还需考虑材料非线性。框架结构弹塑性模型可分为塑性区模型和塑性铰模型[9],塑性区法虽能准确描述杆件在截面及沿杆长方向的塑性发展,但计算量大,目前主要用于对比各算法精度和相关规范的制定,较少用于实际工程分析。塑性铰模型最早由 Orbison 等[10]提出,基于塑性集中于杆端的假定,塑性铰在单元两端截面形成,其余部位完全保持弹性,计算相对简单,但由于没有考虑材料塑性到沿截面和杆长方向的发展,塑性铰模型计算结果往往偏高,于是诸多学者对塑性铰模型进行改进,提出了多种新的塑性铰方法[11-16]。如 Chen 等[11]通过引入塑性铰弹簧,当单元节点弯矩超过弹性极限弯矩时,即对该点处的塑性铰弹簧刚度进行折减来模拟截面刚度的退化。Liew 等[12,13]提出了精细塑性铰模型,通过降低弯曲刚度系数来处理截面刚度的退化。Iu 等[14-16]提出改进塑性铰模型,引入轴力屈服弹簧,考虑了屈服截面转动与拉伸效应。总的来说,建立的塑性铰模型如能有效地描述由于材料屈服导致的构件截面刚度退化过程,则可以较好地分析材料非线性行为。

本文的研究不同于以往大多数工作,重点是关注非线性分析过程中路径追踪的结构层面和单元

收稿日期:2024-01-14; **修改稿收到日期**:2024-03-22.

基金项目:国家自然科学基金(52078082);内江市基础研究与应用基础研究项目(NJJH202316);内江师范学院科研资助项目(2023ZD03)资助.

作者简介:陈安全*(1993-),男,博士,讲师(E-mail:chen.anquan@ foxmail.com).

引用本文:陈安全,林航葳. 不考虑几何刚度的框架结构非线性分析方法[J]. 计算力学学报,2025,**42**(3):395-403.
CHEN An-quan, LIN Hang-wei. Nonlinear analysis method for frame structure with no consideration of geometric stiffness[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, **42**(3):395-403.

节点恢复力计算的单元层面的要求,将概念上简单和物理上可解释的方法应用其中,并且将证明,如果使用鲁棒性很强的路径追踪技术,同时在更新单元初始节点力时遵守刚体准则,即使不考虑结构几何刚度,在只使用弹性或弹塑性刚度的情况下就可以求解框架结构的非线性响应,是结构弹性和弹塑性刚度在非线性和后屈曲分析中的极限应用。

2　单元节点恢复力的计算

在非线性分析过程中,通常可以分为三种位形,(1) C_0,初始位形;(2) C_1,上一步计算位形;(3) C_2,当前计算位形。刚体准则是一种物理概念,简单、意义清晰并且是普遍有效的,可以用来测试有初始节点力存在的有限单元质量的准则[17]。对于在 C_1 处有一组平衡力作用的有限单元发生刚性旋转,单元上所有的力都将随着旋转轴发生定向旋转,旋转前后力的数值大小保持不变,平衡单元发生刚性旋转后结果是在 C_2 处仍然保持平衡,并且在单元局部坐标系下的方向也不会发生改变。采用左上标表示一个量的当前位形,用左下标表示参考位形,刚体准则可表示为

$$\{{}^2_2 f\} = \{{}^1_1 f\} \tag{1}$$

以平面梁单元为例,式(1)可以解释为,有初始节点力作用的二维梁单元,发生刚性旋转后单元节点力大小不变,并且在单元局部坐标系下的方向也没有发生变化,只是在整体坐标系下力的方向发生了同样大小的刚性旋转,如图 1 所示,这种规律同样适用于空间梁单元,并且刚体准则对于单元上作用任意大小的初始节点力和发生任意大小的刚性旋转均有效。

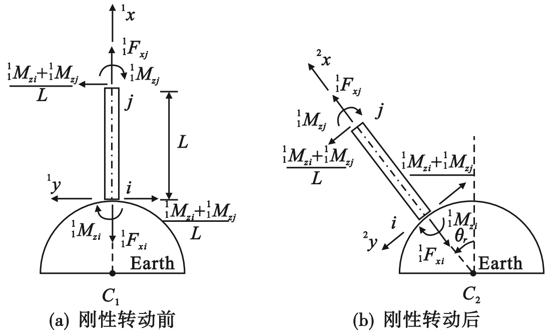

图 1　初始力作用的梁

Fig. 1　Initially stressed beam

在增量分析中,每个有限元单元都会经历刚性旋转和自然变形,而自然变形会对单元产生额外的节点力增量。对于每个增量步,单元的自然变形具有小应变、小位移和小旋转的特征,弹性状态下节点力增量可以使用弹性刚度来计算,即

$$\{\Delta f\} = [k_e]\{\Delta u\} \tag{2}$$

其中 $[k_e]$ 为单元弹性刚度矩阵,$\{\Delta u\}$ 为单元的自然变形。因此,C_2 位形处的单元节点力可以表达为

$$\{{}^2_2 f\} = \{{}^1_1 f\} + [k_e]\{\Delta u\} \tag{3}$$

式中 $\{{}^1_1 f\}$ 为在单元局部坐标系下根据刚体准则来考虑刚性旋转对单元初始节点力的影响,即 C_1 位形单元局部坐标系下的单元节点力发生刚性转动后在 C_2 位形单元局部坐标系下大小和方向均没有发生改变。如果在增量步内单元发生了弹塑性变形,节点力的计算只需将式(3)中的弹性刚度 $[k_e]$ 改变为弹塑性刚度 $[k_{ep}]$ 即可,即

$$\{{}^2_2 f\} = \{{}^1_1 f\} + [k_{ep}]\{\Delta u\} \tag{4}$$

3　增量步内迭代计算的力学机制

一个典型增量步内迭代机制如图 2 所示,图中物理量的右上标表示增量步,右下标数值表示迭代步。每一迭代步内涉及三个阶段,即预测阶段(Predictor)、校正阶段(Corrector)和平衡检查阶段(Equilibrium check)。为讨论方便,图 2 中每个关键点都分配了一个字母,大写字母表示在结构级别上的数量,小写字母表示在单元级别上的数量。

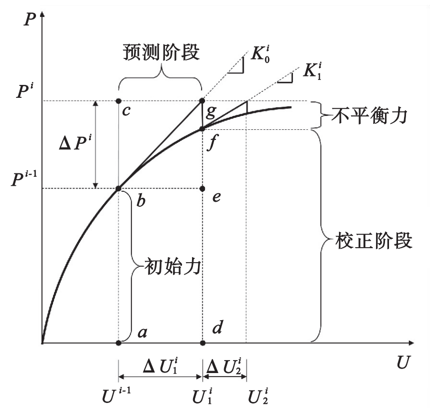

图 2　增量-迭代分析力学机制

Fig. 2　Mechanism of incremental-iterative analysis

3.1　结构层面—预测阶段

预测阶段开始时,结构处于 C_1 位形,并且在荷载 $\{P^{i-1}\}$ 作用下保持平衡(点 b)。进入预测阶段,结构承受荷载增量 $\{\Delta P^i\} = \{P^i\} - \{P^{i-1}\}$ (线 bc)作用,此时可以通过式(5)来求解结构的位移增量 $\{\Delta U_1^i\}$ (线 ad):

$$[K_0^i]\{\Delta U_1^i\} = \{\Delta P^i\} \tag{5}$$

需要说明的是,切线刚度 $[K_0^i]$ (线 bg 的斜率)不必是精确的,因为非线性的计算过程不可能一步到位,后续总是需要迭代来消除不平衡力(线 fg)。

一个典型案例就是改进的牛顿-拉夫逊方法，其在整个迭代过程中使用的都是初始切线刚度，对最终计算结果没有影响，唯一的不足是迭代次数有所增加。考虑变形过程中的几何非线性，结构除有弹性刚度或弹塑性刚度之外，还有表征节点力不稳定效应的几何刚度。根据预测阶段的特征，除非是求解在增量步内涉及到大旋转的问题，实际工程结构的非线性分析在预测阶段只使用弹性刚度或弹塑性刚度就可以达到很好的预测结果。

3.2　单元层面—校正阶段

根据结构位移增量 $\{\Delta U_1^i\}$，可以计算出相应的单元位移增量 $\{\Delta u_1^i\}$（线 ad），并更新此时单元所在的位形，图 2 中的点 e 需要特别解释。

首先，点 b 到点 e 的运动表示单元在初始节点力作用下发生刚性位移和旋转，其特点是作用在单元上的力大小没有变化，即旋转后的位形（线 de）与 C_1 位形（线 ab）处的力大小相同，这与刚体准则的描述完全一致。此时结构上的荷载和发生的刚性旋转都可能很大，但都可以用刚体准则来处理，因为刚体准则适用于任何大小的节点力和刚性旋转。

其次，在增量分析中，通常假定荷载增量较小，由此产生的节点力增量（线 ef）也很小，只需将单元位移增量与弹性刚度或弹塑性刚度相乘即可计算节点力增量。单元在 C_2 处的总内力（线 df）为初始节点力（线 de）和节点力增量（线 ef）之和，如式(3,4)。

3.3　平衡检查阶段

求解每个单元的节点力，组装可以获得结构的总内力 $\{F_1^i\}$，然后将其与结构外部作用力 $\{P_1^i\}$ 进行比较，得到此时结构的不平衡力 $\{R_1^i\}$，即

$$\{R_1^i\}=\{P_1^i\}-\{F_1^i\} \tag{6}$$

如果不平衡力不小于预设的误差，则需要重复迭代过程，此时将结构不平衡力视为外部施加的荷载增量。因此增量迭代过程其实就是在不断重复预测阶段、校正阶段、平衡检查阶段，直至结构的不平衡力小于预设的误差，则进入下一增量步的计算。

4　梁单元弹性刚度和弹塑性刚度

4.1　梁单元弹性刚度

如图 3 所示的空间梁单元，包含 6 个线位移自由度和 6 个转角位移自由度，其弹性刚度矩阵可以参考文献[8]。通过限制 z 轴方向线位移和绕 x 轴、y 轴的角位移自由度，空间梁单元弹性刚度矩阵将简化为平面梁单元弹性刚度矩阵。

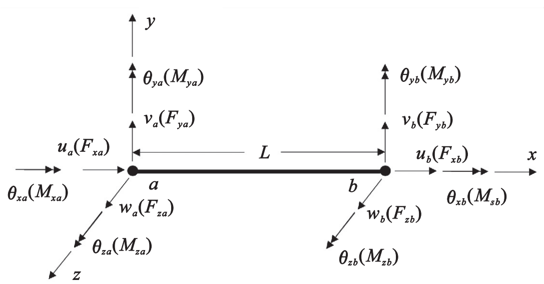

图 3　空间梁单元
Fig. 3　Spatial beam element

4.2　梁单元弹塑性刚度

4.2.1　梁单元的屈服准则

采用改进塑性铰法来分析结构的弹塑性行为，需定义截面初始屈服以及完全屈服的状态方程。对于双轴对称的空间梁截面，可采用截面初始屈服状态方程[16]

$$\varphi_y(P,M_x,M_y)=\frac{P}{0.8P_y}+\frac{1.25M_y}{M_{py}}+\frac{1.25M_z}{M_{pz}}=1 \tag{7}$$

和截面完全屈服状态方程[18]

$$\varphi_p(P,M_y,M_z)=\left\{\frac{M_y}{M_{py}[1-(P/P_y)^{1.3}]}\right\}^2+\left\{\frac{M_z}{M_{pz}[1-(P/P_y)^3]}\right\}^\alpha=1 \tag{8}$$

其中 $P_y=f_yA$，f_y 为材料单轴拉伸屈服强度，A 为杆件横截面面积，M_{py} 和 M_{pz} 分别为强轴和弱轴截面完全屈服弯矩，P 为构件截面的轴力，M_y 和 M_z 分别为截面强轴和弱轴所受弯矩，$\alpha=1.2+2(P/P_y)$。

对于强轴受弯，式(8)可简化为

$$\varphi_p(P,M_y,0)=\frac{M_y}{M_{py}[1-(P/P_y)^{1.3}]}=1 \tag{9}$$

对于弱轴受弯，式(8)可简化为

$$\varphi_p(P,0,M_z)=\frac{M_z}{M_{pz}[1-(P/P_y)^3]}=1 \tag{10}$$

若 $\varphi_y\leqslant 1$，表示杆件横截面处于弹性状态；若 $\varphi_p=1$，表示横截面处于完全塑性状态，形成塑性铰；若 $\varphi_y>1$，$\varphi_p<1$ 则表示截面处于弹塑性状态。

4.2.2　塑性铰弹簧刚度

在框架结构弹塑性分析中，假定塑性铰截面仅发生在杆件的端部，在弹性梁单元节点处引入两个主弯曲平面上的塑性铰弹簧来考虑截面弯曲刚度的变化，如图 4 所示。

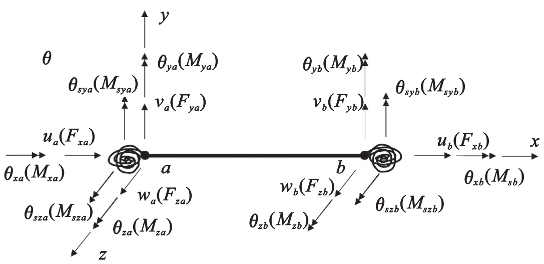

图 4 结合塑性铰弹簧的空间梁单元
Fig. 4 Spatial beam element combined with plastic hinge spring

当截面均处于弹性状态时，即 $\varphi_y(F_{xj}, M_{ij}) \leqslant 1$，塑性铰弹簧不起作用，弹簧弯曲刚度应为无穷大，本文取值为 ${}^0S_{ij}=10^{10}(EI/L)$ $(i=y,z;j=a,b)$，EI/L 为弹性梁单元的弯曲刚度。

当梁端截面开始屈服后，杆件截面刚度退化，塑性铰弹簧参与变形，弹簧弯曲刚度取为

$$S_{ij}=\frac{EI}{L}\left[\frac{1-\varphi_p(F_{xj}, M_{ij})}{\varphi_y(F_{xj}, M_{ij})-1}\right] \tag{11}$$

其中 $\varphi_p(F_{xj}, M_{ij})<1, \varphi_y(F_{xj}, M_{ij})>1$ $(i=y, z;j=a,b)$。当梁端截面完全屈服后，即 $\varphi_p(F_{xi}, M_{ij})=1$，杆端产生塑性铰，弹簧弯曲刚度取为 0，即 $S_{ij}=0$。

4.2.3 梁单元弹塑性刚度的推导

塑性铰弹簧的弯矩增量 $\{\Delta M_s\}$ 可表示为

$$\{\Delta M_s\}=\begin{Bmatrix}\Delta M_{sya}\\ \Delta M_{sza}\\ \Delta M_{syb}\\ \Delta M_{szb}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}S_{ya}\cdot\Delta\varphi_{ya}\\ S_{za}\cdot\Delta\varphi_{za}\\ S_{yb}\cdot\Delta\varphi_{yb}\\ S_{zb}\cdot\Delta\varphi_{zb}\end{Bmatrix}= \tag{12}$$

$$[k_s]\cdot\{\Delta\varphi\}=[k_s]\cdot(\{\theta_s\}-\{\theta_e\})$$

其中

$$[k_s]=\begin{bmatrix}S_{ya}&0&0&0\\0&S_{za}&0&0\\0&0&S_{yb}&0\\0&0&0&S_{zb}\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\{\Delta\varphi\}=\{\Delta\varphi_{ya}\quad\Delta\varphi_{za}\quad\Delta\varphi_{yb}\quad\Delta\varphi_{zb}\}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

$$\{\theta_s\}=\{\theta_{sya}\quad\theta_{sza}\quad\theta_{syb}\quad\theta_{szb}\}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$$\{\theta_e\}=\{\theta_{eya}\quad\theta_{eza}\quad\theta_{eyb}\quad\theta_{ezb}\}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

其中 $\{\Delta\varphi\}$ 为塑性铰弹簧的转角增量，$\{\theta_s\}$ 为塑性铰弹簧转角，$\{\theta_e\}$ 为弹性梁单元的节点转角。弹塑性梁单元的弯矩增量可表达为

$$\{\Delta M\}=\begin{Bmatrix}\Delta M_{ya}\\ \Delta M_{za}\\ \Delta M_{yb}\\ \Delta M_{zb}\end{Bmatrix}=\{\Delta M_e\}-\{\Delta M_s\} \tag{17}$$

式中 $\{\Delta M_e\}$ 为弹性梁单元的节点弯矩增量，可由节点位移与弹性梁单元相应的弹性刚度系数 k_{pq} 计算为

$$\{\Delta M_e\}=\begin{Bmatrix}\Delta M_{eya}\\ \Delta M_{eza}\\ \Delta M_{eyb}\\ \Delta M_{ezb}\end{Bmatrix}=[k_{L1}]\{v_e\}+[k_{\theta 1}]\{\theta_e\} \tag{18}$$

其中横向线位移刚度系数矩阵 $[k_{L1}]$ 和弯曲转角刚度系数矩阵 $[k_{\theta 1}]$ 分别为

$$[k_{L1}]=\begin{bmatrix}0&k_{5,3}&0&k_{5,9}\\k_{6,2}&0&k_{6,8}&0\\0&k_{11,3}&0&k_{11,9}\\k_{12,2}&0&k_{12,8}&0\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$[k_{\theta 1}]=\begin{bmatrix}k_{5,5}&0&k_{5,11}&0\\0&k_{6,6}&0&k_{6,12}\\k_{11,5}&0&k_{11,11}&0\\0&k_{12,6}&0&k_{12,12}\end{bmatrix} \tag{20}$$

$\{v_e\}$ 表示弹性梁单元的横向线位移，表达式为

$$\{v_e\}=\{v_{ea}\quad w_{ea}\quad v_{eb}\quad w_{eb}\}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

将式(12,18)代入式(17)可得

$$\{\Delta M\}=[k_{L1}]\{v_e\}+[k_I]\{\theta_e\}-[k_s]\{\theta_s\} \tag{22}$$

刚度系数矩阵 $[k_I]$ 为

$$[k_I]=[k_{\theta 1}]+[k_s]=$$

$$\begin{bmatrix}k_{5,5}+S_{ya}&0&k_{5,11}&0\\0&k_{6,6}+S_{za}&0&k_{6,12}\\k_{11,5}&0&k_{11,11}+S_{yb}&0\\0&k_{12,6}&0&k_{12,12}+S_{zb}\end{bmatrix} \tag{23}$$

当杆件端部截面达到完全屈服形成塑性铰时，截面弯矩增量 $\{\Delta M\}=\{0\}$，根据式(22)可得梁端截面转角 $\{\theta_e\}$ 为

$$\{\theta_e\}=[k_I]^{-1}([k_s]\{\theta_s\}-[k_{L1}]\{v_e\}) \tag{24}$$

同时，对于弹塑性单元来说，弯矩增量 $\{\Delta M\}=\{0\}$ 意味着弹性单元的节点弯矩增量 $\{\Delta M_e\}$ 与塑性铰弹簧的弯矩增量 $\{\Delta M_s\}$ 相同，将式(24)代入式(18)得塑性铰弹簧的弯矩增量 $\{\Delta M_s\}$ 为

$$\{\Delta M_s\}=\{\Delta M_e\}=[k_{L1}]\{v_e\}+$$

$$[k_{\theta 1}][k_I]^{-1}([k_s]\{\theta_s\}-[k_{L1}]\{v_e\})=[k']\{u'\} \tag{25}$$

式中 $[k']$ 为弹塑性单元的弯曲刚度系数矩阵，即

$$[k']=\begin{bmatrix}0&k'_{5,3}&k'_{5,5}&0&0&k'_{5,9}&k'_{5,11}&0\\k'_{6,2}&0&0&k'_{6,6}&k'_{6,8}&0&0&k'_{6,12}\\0&k'_{11,3}&k'_{11,5}&0&0&k'_{11,9}&k'_{11,11}&0\\k'_{12,2}&0&0&k'_{12,6}&k'_{12,8}&0&0&k'_{12,12}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\{u'\}=\{v_{ea}\ w_{ea}\ \theta_{sya}\ \theta_{sza}\ v_{eb}\ w_{eb}\ \theta_{syb}\ \theta_{szb}\}^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

同样地，弹塑性单元的剪力增量 $\{\Delta F_y\}$ 可计算为

$$\{\Delta F_y\}=\begin{Bmatrix}\Delta F_{ya}\\ \Delta F_{za}\\ \Delta F_{yb}\\ \Delta F_{zb}\end{Bmatrix}=[k_{L2}]\{v_e\}+[k_{\theta 2}]\{\theta_e\} \tag{28}$$

式中 横向线位移刚度系数矩阵 $[k_{L2}]$ 和弯曲转角刚度系数矩阵 $[k_{\theta 2}]$ 分别为

$$[k_{L2}]=\begin{bmatrix}k_{2,2} & 0 & k_{2,8} & 0\\ 0 & k_{3,3} & 0 & k_{3,9}\\ k_{8,2} & 0 & k_{8,8} & 0\\ 0 & k_{9,3} & 0 & k_{9,9}\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$[k_{\theta 2}]=\begin{bmatrix}0 & k_{2,6} & 0 & k_{2,12}\\ k_{3,5} & 0 & k_{3,11} & 0\\ 0 & k_{8,6} & 0 & k_{8,12}\\ k_{9,5} & 0 & k_{9,11} & 0\end{bmatrix} \tag{30}$$

将式(24)代入式(28)可得

$$\{\Delta F_y\}=[k_{L2}]\{v_e\}+[k_{\theta 2}][k_I]^{-1}([k_s]\{\theta_s\}-[k_{L1}]\{v_e\})=[k'']\{u'\} \tag{31}$$

式中 $[k'']$ 表示弹塑性单元的横向刚度系数矩阵，即

$$[k'']=\begin{bmatrix}k'_{2,2} & 0 & 0 & k'_{2,6} & k'_{2,8} & 0 & 0 & k'_{2,12}\\ 0 & k'_{3,3} & k'_{3,5} & 0 & 0 & k'_{3,9} & k'_{3,11} & 0\\ k'_{8,2} & 0 & 0 & k'_{8,6} & k'_{8,8} & 0 & 0 & k'_{8,12}\\ 0 & k'_{9,3} & k'_{9,5} & 0 & 0 & k'_{9,9} & k'_{9,11} & 0\end{bmatrix} \tag{32}$$

耦合后的弹塑性梁单元的轴向刚度与扭转刚度与原弹性梁单元相同，将式(26)弯曲刚度系数和式(32)横向刚度系数矩阵根据位移重新进行排列即可得到空间梁单元弹塑性刚度矩阵 $[k_{ep}]$ 为

$$[k_{ep}]=\begin{bmatrix}k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & k'_{2,2} & 0 & 0 & 0 & k'_{2,6} & 0 & k'_{2,8} & 0 & 0 & 0 & k'_{2,12}\\ & & k'_{3,3} & 0 & k'_{3,5} & 0 & 0 & 0 & k'_{3,9} & 0 & k'_{3,11} & 0\\ & & & k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{4,10} & 0 & 0\\ & & & & k'_{5,5} & 0 & 0 & 0 & k'_{5,9} & 0 & k'_{5,11} & 0\\ & & & & & k'_{6,6} & 0 & k'_{6,8} & 0 & 0 & 0 & k'_{6,12}\\ & & & & & & k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & & & & & & & k'_{8,8} & 0 & 0 & 0 & k'_{8,12}\\ & & & \text{对称} & & & & & k'_{9,9} & 0 & k'_{9,11} & 0\\ & & & & & & & & & k_{10,10} & 0 & 0\\ & & & & & & & & & & k'_{11,11} & 0\\ & & & & & & & & & & & k'_{12,12}\end{bmatrix} \tag{33}$$

平面梁单元的弹塑性刚度矩阵只需在空间梁单元的弹塑性刚度矩阵上限制 z 轴方向线位移以及绕 x，y 轴的转角自由度即可得到。

5　数值算例

本节选用广义位移控制法[19]作为非线性路径追踪方案。为便于说明，采用表1中的计算组合进行分析。其中$[k_g]$是文献[8]给出的梁单元几何刚度矩阵。

表1　数值计算中的组合

Tab.1　Combinations in numerical computation

组合	预测阶段	校正阶段
P1C1	$[k_e]$	$\{{}_2^2f\}=\{{}_1^1f\}+[k_e]\{u\}$
P2C1	$[k_e]+[k_g]$	$\{{}_2^2f\}=\{{}_1^1f\}+[k_e]\{u\}$
P3C2	$[k_{ep}]$	$\{{}_2^2f\}=\{{}_1^1f\}+[k_{ep}]\{u\}$
P4C2	$[k_{ep}]+[k_g]$	$\{{}_2^2f\}=\{{}_1^1f\}+[k_{ep}]\{u\}$

5.1　Lee's 框架

如图5所示 Lee's 框架，杆长均为 L，在水平杆

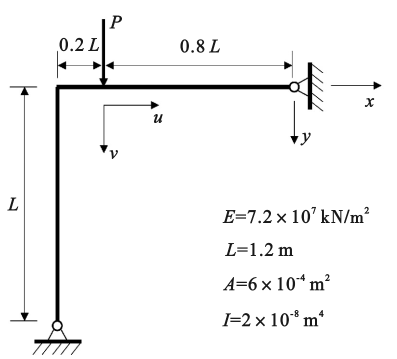

图5　Lee's 框架

Fig.5　Lee's frame

件距离左节点 1/5 位置处承受集中载荷 P 作用。每根杆件划分为 10 个单元,设置 $\lambda_1^1=1$,$\hat{P}=0.1$ kN。

从图 6 的非线性路径可知,P1C1 与 P2C1 求解的结构后屈曲响应完全相同,并且与 Simo[20] 求解结果基本一致。结合表 2 计算数据,P1C1 相比于 P2C1 的计算时间略长,需要更多的迭代次数来收敛到结构的真实路径。因此仅使用结构弹性刚度而不考虑几何刚度可以很好地求解平面框架结构的几何非线性响应。

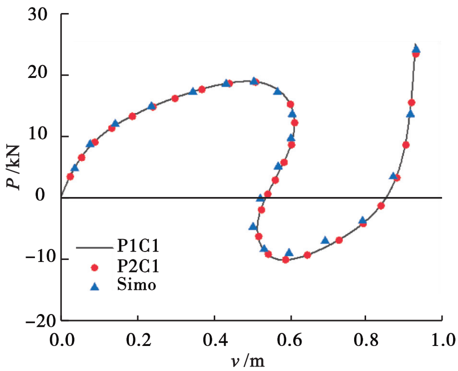

图 6 Lee's 框架荷载-位移曲线

Fig. 6 Load-deflection curves of Lee's frame

表 2 Lee's 框架计算数据

Tab. 2 Computation of Lee's frame

计算组合	P1C1	P2C1
计算时间/s	1.56	0.88
增量步数	1880	2098
平均每步迭代次数	4.92	2.06

5.2 对称的直角框架

如图 7 所示对称直角框架在两个铰接端受到大小相同的弯矩作用,即 $M_{za}=-M_{zc}$,并且在顶点 b 处作用 $F_{zb}=5\times10^{-5}M_{za}$ 大小的干扰力。结构在 a 端和 c 端处允许发生沿 x 轴平移和绕 z 轴旋转的位移,而节点 b 约束在 yz 平面中移动。由于直角框架的对称性,取结构左半部分进行分析,划分为 10 个空间梁单元,程序分析使用以下初始值,$\lambda_i=5$,$\hat{M}_{za}=10$ N·mm。

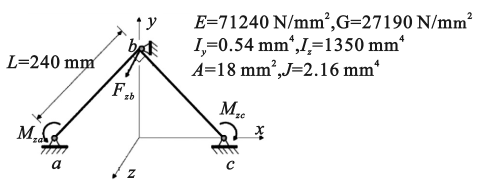

图 7 承受末端弯矩的对称直角框架

Fig. 7 Symmetric right-angle frame subjected to fixed-end moments

图 8 绘制了 P1C1 和 P2C1 的计算结果,求解的结构后屈曲响应与 Argyris 等[21]的求解路径完全吻合。结合表 3 计算数据说明,仅使用弹性刚度可以很好地求解空间框架的后屈曲响应,唯一不足的是程序计算时间和迭代次数有所增加。

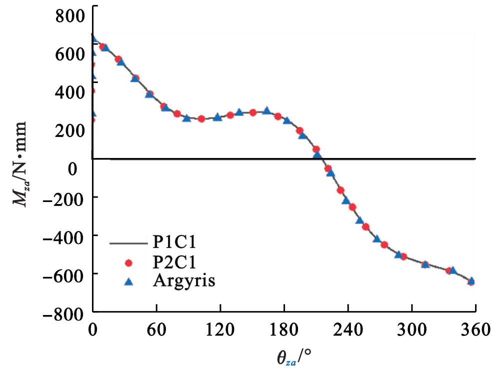

图 8 对称直角框架荷载-位移曲线

Fig. 8 Load-deflection curves of symmetric right-angle frame

表 3 对称直角框架计算数据

Tab. 3 Computation of symmetric right-angle frame

计算组合	P1C1	P2C1
计算时间/s	94.05	27.69
增量步数	49712	56599
平均每步迭代次数	7.83	2.00

5.3 两跨四层平面框架

如图 9 所示两跨四层平面框架,每根柱划分为 1 个单元,每根梁划分为 2 个单元,程序分析使用以下初始值,$\lambda_1^1=10$,$\hat{P}=6$ N。

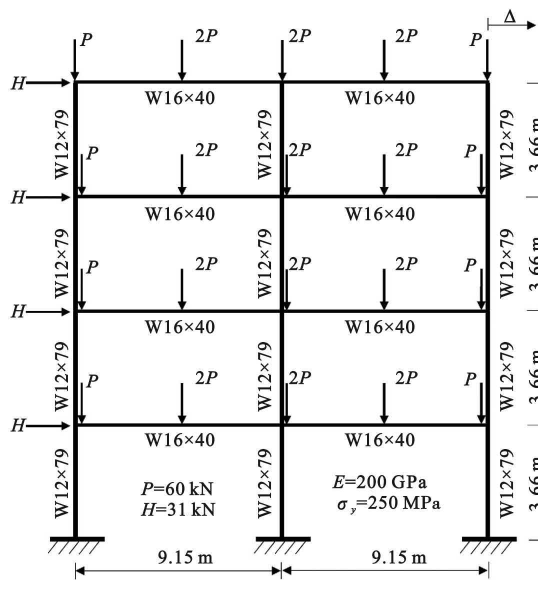

图 9 两跨四层框架

Fig. 9 Two-bay four-storey frame

P3C2 与 P4C2 求解的框架顶部右节点的侧向位移与荷载的关系曲线如图 10 所示，两者计算结果完全一致，并与文献[22，23]吻合较好。证明在预测阶段和校正阶段只使用弹塑性刚度以及运用刚体准则更新单元初始节点力可以很好地进行平面框架结构的二阶弹塑性分析。结合表4的计算数据，程序中不考虑几何刚度与常规考虑几何刚度相比，计算的时间和迭代次数稍有增加。

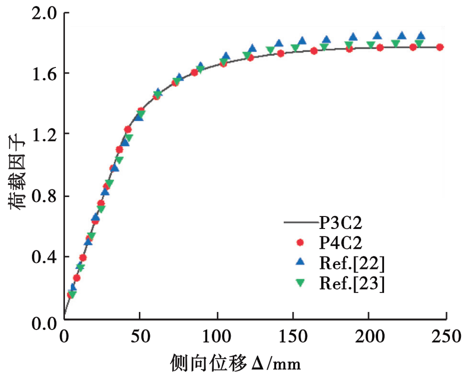

图 10　结构荷载与顶层右节点位移曲线

Fig. 10　Load-deflection curve of top right joint

表 4　两跨四层框架计算数据

Tab. 4　Computation of two-bay four-storey frame

计算组合	P3C2	P4C2
计算时间/s	6.17	6.01
增量步数	7216	7218
平均每步迭代次数	1.04	1.00

5.4　六层空间框架

如图 11 所示的高低跨空间框架结构，每层楼面上作用有均布竖向荷载 9.6 kN/mm^2，前正立面各层柱顶节点承受沿 y 轴负向的风荷载 51.376 kN，结构材料弹性模量为 206850 MPa，屈服强度为 250 MPa。每根杆件均划分为 1 个单元，程序设置初始值为 $\lambda_1^1=1$，水平荷载参考值 $\hat{H}$=0.1 kN。

如图 12 所示，P3C2 与 P4C2 计算结果完全一致，并与文献[24，25，16]求解结果吻合较好，再次证明本文建立的空间梁单元改进塑性铰模型的可靠性。根据 P3C2 与 P4C2 求解结果的一致性和表 5 中计算数据表明，仅使用结构弹塑性刚度而不考虑结构几何刚度可以很好地进行空间框架结构的二阶弹塑性分析，只是计算的时间和迭代次数有所增加。

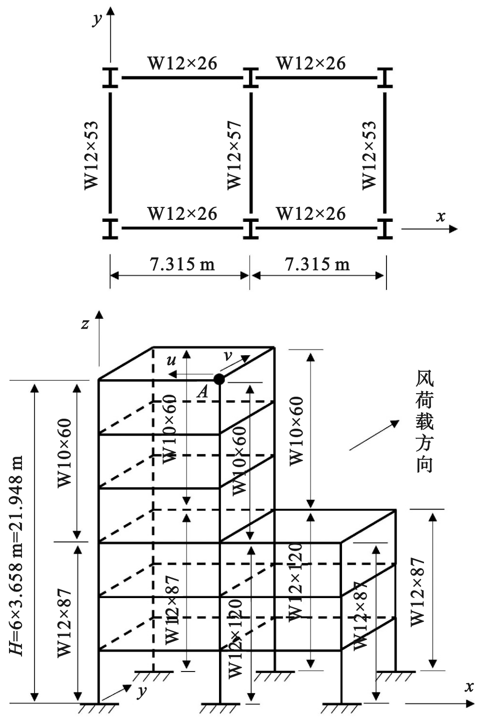

图 11　六层空间框架结构

Fig. 11　6-storey spatial framed structure

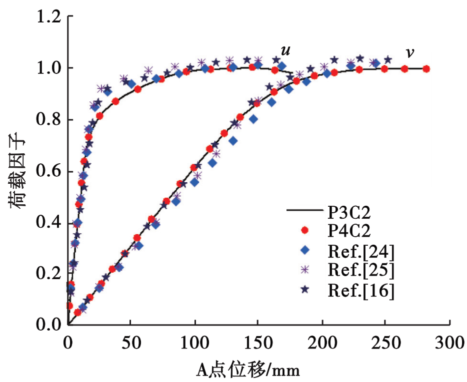

图 12　结构荷载与点 A 位移曲线

Fig. 12　Load-displacement curve of point A

表 5　六层空间框架计算数据

Tab. 5　Computation of 6-storey spatial framed structure

计算组合	P3C2	P4C2
计算时间/s	22.14	15.56
增量步数	8542	8554
平均每步迭代次数	4.95	3.48

6　结　论

本文在不考虑结构几何刚度而只使用弹性刚度或弹塑性刚度的情况下进行了框架结构非线性和后屈曲分析的新尝试。主要结论如下。

(1)增量迭代计算时,预测阶段使用的框架结构刚度不必精确,仅使用结构弹性刚度或弹塑性刚度即可。校正阶段单元节点恢复力需要精确计算,以免引起单元节点的虚拟力,这是保证迭代收敛到结构平衡路径的本质要求。

(2)迭代过程中,单元位移包含刚体转动和自然变形两部分。采用刚体准则可以精确处理由刚体转动引起的单元节点力变化,自然变形部分视为小变形,产生的单元节点力增量直接采用弹性刚度或弹塑性刚度计算即可。

(3)改进的塑性铰模型可以很好地模拟框架结构塑性的发展,通过静力凝聚建立的梁单元弹塑性刚度矩阵形式简洁、概念清晰。配合刚体准则计算单元节点力,单元划分少,可以高效地进行框架结构二阶弹塑性分析,适合于框架结构实际应用。

参考文献(References):

[1] 李钢,余丁浩. 土木工程结构非线性计算分析研究进展[J]. 工程力学,2023,**40**(7):1-24. (LI Gang, YU Ding-hao. Advances in nonlinear computational analysis of civil engineering structures[J]. *Engineering Mechanics*,2023,**40**(7):1-24. (in Chinese))

[2] 谭敏尧,程文明. 考虑弯扭形变的薄壁箱形梁的非线性后屈曲[J]. 计算力学学报,2022,**39**(2):222-228. TAN Min-yao, CHENG Wen-ming. Nonlinear post-buckling of thin-walled box beams considering bending and torsion[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2022,**39**(2):222-228. (in Chinese)

[3] Oran C. Tangent stiffness in plane frames[J]. *Journal of the Structural Division*,1973,**99**(6):973-985.

[4] Crisfield M A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,1990,**81**(2):131-150.

[5] Mallett R H, Marcal P V. Finite element analysis of nonlinear structures[J]. *Journal of the Structural Division*,1968,**94**(9):2081-2106.

[6] Bathe KJ, Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,1979,**14**(7):961-986.

[7] Yang Y B, Kuo S R. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*[M]. New Yok: Prentice Hall,1994.

[8] Yang YB, Lin SP, Chen CS. Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3D frames, plates and shells based on the updated Lagrangian formulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,2007,**196**(7):1178-1192.

[9] King W S, White D W, Chen W F. Second-order inelastic analysis methods for steel-frame design[J]. *Journal of Structural Engineering*,1992,**118**(2):408-428.

[10] Orbison J G, Mcguire W, Abel J F. Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,1982,**33**(1-3):557-573.

[11] Chen W F, Chan S L. Second-order inelastic analysis of steel frames using element with midspan and end springs[J]. *Journal of Structural Engineering*,1995,**121**(3):530-541.

[12] Richard Liew J Y, White D W, Chen W F. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part I[J]. *Journal of Structural Engineering*,1993,**119**(11):3196-3216.

[13] Richard Liew J Y, White D W, Chen W F. Second-order refined plastic-hinge analysis for frame design. Part II[J]. *Journal of Structural Engineering*,1993;**119**(11):3217-3236.

[14] Iu C K, Bradford M A, Chen W F. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method[J]. *Engineering Structures*,2009,**31**(3):799-813.

[15] Iu C K, Bradford M A. Higher-order non-linear analysis of steel structures. Part I: Elastic second-order formulation[J]. *Advanced Steel Construction*,2013,**8**(2):168-182.

[16] Iu C K, Bradford M A. Higher-order non-linear analysis of steel structures. Part II: Refined plastic hinge formulation[J]. *Advanced Steel Construction*,2013,**8**(2):183-198.

[17] Yang Y B, Chiou H T. Rigid body motion test for nonlinear analysis with beam elements[J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1987,**113**(9):1404-1419.

[18] Duan L, Chen W F. Design interaction equation for steel beam-columns[J]. *Journal of Structural Engineering*,1989,**115**(5):1225-1243.

[19] 李云飞,陈朝晖,杨永斌,等. 基于刚体准则和广义位移控制法的拱结构屈曲与后屈曲分析[J]. 土木工程学报,2017,**50**(12):37-45. (LI Yun-fei, CHEN Zhao-hui, YANG Yong-bin, et al. Buckling & post-buckling analysis of Arches based on rigid body rule and GDC method[J]. *China Civil Engineering Journal*,2017,**50**(12):37-45. (in Chinese))

[20] Simo J C, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,1986,**58**(1):79-116.

[21] Argyris J H, Hilbert O, Malejannakis G A, et al. On the geometrical stiffness of a beam in space: A consistent V. W. approach[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,1979,**20**(1):105-131.

[22] Doan-Ngoc T N, Dang X L, Chu Q T, et al. Second-order plastic-hinge analysis of planar steel frames using corotational beam-column element[J]. *Journal of Constructional Steel Research*,2016,**121**:413-426.

[23] Tang Y Q, Zhu H, Du E F. A novel incremental iterative force recovery method for second-order beam-column elements in plastic hinge analysis of steel frames[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*,2022,**22**(2):2250027.

[24] Richard Liew J Y, Chen H, Shanmugam N E, et al. Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures[J]. *Engineering Structures*,2000,**22**(10):1324-1338.

[25] Jiang X M, Chen H, Richard Liew J Y. Spread-of-plasticity analysis of three-dimensional steel frames[J]. *Journal of Constructional Steel Research*,2002,**58**(2):193-212.

Nonlinear analysis method for frame structure with no consideration of geometric stiffness

CHEN An-quan*[1,2], LIN Hang-wei[1]
(1. School of Architecture and Engineering, Neijiang Normal University, Neijiang 641100, China;
2. The Engineering Technology Research Center of Intelligent Construction and Building Industrialization of Neijiang, Neijiang 641100, China)

Abstract: Based on the mechanical mechanism of incremental iteration, the characteristics of predictor, corrector and equilibrium check are analyzed in detail. Combined with the rigid body rule, an accurate formula for calculating the recovery force of element nodes in nonlinear analysis of frame structures is established. Meanwhile, a refined plastic hinge model is utilized to construct the elasto-plastic beam element and derive the elasto-plastic stiffness matrix, and the nonlinear analysis method for frame structures with a clear physical concept and simple process is established. Through the analysis of typical cases, it is demonstrated that using only elastic stiffness or elasto-plastic stiffness can address the nonlinear response of the frame structure even without considering the geometric stiffness. The only sacrifice is to slightly increase the number of iterations in the numerical calculation. The result proves the reliability of the proposed method, which is the application of elastic stiffness and elasto-plastic stiffness of frame structures in nonlinear capacity and post-buckling analysis.

Key words: frame structure; geometric nonlinearity; material nonlinearity; rigid body rule; refined plastic hinge

(上接第 376 页)

Dynamic response analysis of deep-sea mining riser based on vector form intrinsic finite element method

XU Jing-chang[1,2], ZHENG Hao[2], YAN Hong-hao*[1], ZHANG Ming[2], WANG Ying-ying[3]
(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. State Key Laboratory of Exploitation and Utilization of Deep-sea Mineral Resources, Changsha Research Institute Mining and Metallurgy Co., Ltd., Changsha 410012, China; 3. College of Safety and Ocean Engineering, China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: A deep-sea mining riser is an important part of the collection and transportation system of underwater metal minerals such as metal nodules, cobalt-rich crusts and sulfides. The complex marine environment load has an adverse effect on the mechanical properties of the riser. The vector-form intrinsic finite element (VFIFE) method is a new dynamic analysis method based on vector mechanics. In this paper, the Matlab program based on the VFIFE is used to analyze the dynamic response of an underwater 5000 m mining riser. The displacement configuration, axial internal force and bending moment distribution of the riser under the conditions of wave and current are calculated, and the results are compared with Abaqus and Orcaflex. The effects of mining ship motion, structural damping and internal flow velocity on the dynamic response of the riser are further analyzed. The results show that the movement of the mining ship will increase the lateral deviation of the riser and the amplitude of the axial force at both ends. The structural damping will reduce the influence of the mining ship on the riser and make the structure tend to be come stable faster. The internal flow will reduce the axial force at the top of the riser, and the reduction is positively correlated with the internal flow velocity. It also shows that VFIFE has high accuracy and feasibility in simulating the dynamic response behavior, and provides a new and simple finite element method for the study of deep-sea mining riser mechanism.

Key words: deep sea mining; riser; vector from intrinsic finite element (VFIFE); dynamic response; wave current load; Inward flow; mining vessel movement