第42卷第3期
2025 年 6 月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 42，No. 3
June 2025

DOI：10.7511/jslx20231228002

基于S型曲线积分函数的离散变量结构优化方法

孙　蓉[1]，谭　涛*[1]，李艳艳[2]

（1.山东科技大学 能源与矿业工程学院，青岛 266590；2.山东科技大学 数学与系统科学学院，青岛 266590）

摘　要：离散变量结构优化设计的结果相较于连续优化设计更加符合工程实际的需求，然而设计变量的不连续性，导致许多有效的解析数学的优化算法和条件不再适用。因此本文提出了一种连续化处理离散变量结构优化设计问题的新函数，称为S型曲线积分函数，该函数在自变量取0或1时，函数值为零且函数具有连续光滑的性质。通过引入新的0-1设计变量，离散变量优化设计问题可以转化成等价的0-1规划，令S型曲线积分函数值为零，取代新设计变量取0-1离散值的约束条件，以实现离散变量优化问题的连续化处理。建立起与原问题等价的非线性规划问题的数学模型，用数学规划的方法进行求解，并给出了相应的算法。最后，基于MATLAB数值分析软件计算数值算例和经典桁架结构截面尺寸优化问题，数值结果表明所提方法是有效的且对问题规模不敏感。

关键词：离散变量；结构优化；0-1规划；连续化方法；S型曲线积分函数

中图分类号：O342　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1007-4708(2025)03-0353-09

1　引　言

结构优化设计可分为连续变量结构优化和离散变量结构优化问题，通常连续变量结构优化设计得到的最优解，并不能直接满足工程实际的需求，导致结构优化设计的实际应用相对落后于理论的发展[1]。为此，研究者提出了许多针对离散变量优化问题的求解方法，如早期的割平法、分支定界法等直接求解的方法；以及研究较多的启发式算法，如遗传算法[2,3]、蚁群算法[4]等在离散变量优化设计领域也起到了较好的效果。然而离散变量结构优化设计本身属于组合优化问题，随着设计变量的数目和可行集元素的增加，问题的计算量会呈现指数型增长。为避免离散变量本身固有的困难特性，连续化处理离散变量优化问题的方法提供了有效的求解思路。

离散变量结构优化的连续化思想最早源于Templeman等[5]提出的分节法，但分节法只适用于桁架结构的等内力单元问题。此后，隋允康等[6]又提出了用无量纲化设计变量的方法和分节无穷小微元的无穷组合模型，克服了分节法不能处理变量连接问题和非等内力单元的缺点。谭涛等[7,8]在将离散变量转化为0-1变量的基础上提出了Sigmoid函数法、NCP函数法和二进制熵函数法三种连续化方法。不同于从具体问题的物理关系出发提出的分节法等连续化方法，直接从数学的角度得到的连续化模型更适用于一般的离散变量优化问题；李兴斯等[9-11]分别用不同的NCP函数及光滑化方法，研究了基于NCP函数的离散变量结构优化的连续化方法及应用；Pan等[12,13]提出用NCP函数连续化方法求解二次规划问题，验证了方法的有效性；此后，Peng等[14]提出了基于Sigmoid函数法和NCP函数法的多体动力学优化模型；韦园清[15]又将Sigmoid函数法和NCP函数法应用到电力系统的无功优化问题中，验证了离散变量连续化的方法在收敛特性和优化结果方面都具有较好的优越性，以及计算时间对系统规模不敏感的特性。目前有关离散变量连续化方法的思想大多是在将离散变量转化成0-1变量的基础上进行的。这种方法有效降低了问题的复杂程度，在离散变量优化问题的其他求解方法上也得到广泛应用[16,17]。

收稿日期：2023-12-28；**修改稿收到日期**：2024-01-27.
基金项目：国家自然科学基金(20230045；51974171)资助项目.
作者简介：谭　涛*(1977-)，男，博士，讲师(E-mail：tantao@sdust.edu.cn).

引用本文：孙　蓉，谭　涛，李艳艳. 基于S型曲线积分函数的离散变量结构优化方法[J]. 计算力学学报，2025，**42**(3)：353-361.
SUN Rong，TAN Tao，LI Yan-yan. Discrete optimum design method based on S-type curve integral function[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2025，**42**(3)：353-361.

将离散变量0-1连续化后,问题的离散性体现在设计变量取0或1的约束条件上,实现连续化的本质,是用连续可微的函数取代设计变量为0或1的离散条件。为此,本文利用S型函数的性质,对其进行积分等基本函数变换,提出了一个新的函数称为S型曲线积分函数,并给出了函数的基本性质。由于S型曲线积分函数在定义域上连续可微,且具有函数值为0时,自变量取0或1的性质,用来取代0-1规划问题设计变量取离散值的约束条件,即可实现原离散变量结构优化设计问题的连续化。通过计算数值算例和经典桁架结构截面尺寸优化问题对所提方法的有效性进行验证。

2 S型曲线积分函数的构造及性质

S型曲线也称为Sigmoid曲线,在结构优化领域有十分重要的作用,经典Sigmoid函数表达式为

$$z(x)=\frac{1}{1+e^{-x/\gamma}} \tag{1}$$

式中γ为陡度参数,不同取值的γ对应Sigmoid函数不同陡度的曲线,如图1所示。

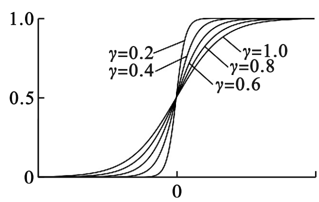


图1 Sigmoid函数族

Fig. 1 Graph of Sigmoid function family

根据图1函数曲线的特性和积分的几何意义,对式(1)所示的$z(x)$进行伸缩平移变换可以得到值域为$[-1,1]$,图像关于点$(1/2,0)$对称的新函数

$$\tilde{z}(x)=\frac{2}{1+e^{-(x-1/2)/\gamma}}-1 \tag{2}$$

再对$\tilde{z}(x)$积分,得到的函数$Z(x)$是关于$x=1/2$对称的,即自变量取0或1时具有相同的函数值。

$$Z(x)=2\gamma\ln\left(e^{-(x-1/2)/\gamma}+1\right)+x=2\gamma\ln\left(e^{x/2\gamma}+e^{(1-x)/2\gamma}\right) \tag{3}$$

令$\mu=2\gamma$,式(3)可以写成

$$Z(x)=\mu\ln\left(e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}\right) \tag{4}$$

为简化$Z(x)$在0或1处的函数值,定义参数函数

$$f(\mu)=\mu\ln\left(e^{1/\mu}+1\right) \tag{5}$$

将式(4,5)两式相减得到新函数

$$\Psi(x)=\mu\ln\left(e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}\right)-\mu\ln\left(e^{1/\mu}+1\right) \tag{6}$$

式中$\mu\neq0$,根据函数的构造方法,式(6)的函数为S型曲线积分函数,参数μ为平滑参数。不同参数对应的函数曲线如图2所示。

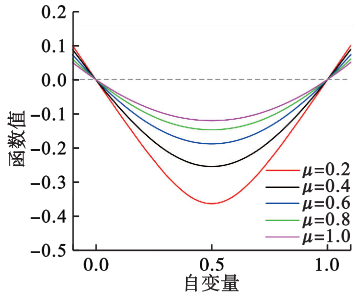


图2 S型曲线积分函数图像族

Fig. 2 Graph of S-type curve integral function family

与Sigmoid函数相似,参数μ的不同取值决定了$\Psi(x)$不同平滑程度的曲线。图2给出了$\mu>0$的情况,当μ取负值时对应的一组函数曲线关于$y=0$对称。

引理1 式(6)的S型曲线积分函数具有以下性质:

(1) $\Psi(x)$在定义域$\mathbb{R}$上连续可微,且存在一阶、二阶导数为

$$\Psi'(x)=\frac{e^{x/\mu}-e^{(1-x)/\mu}}{e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}}$$

$$\Psi''(x)=\frac{4e^{x/\mu}e^{(1-x)/\mu}}{\mu\left(e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}\right)^2}$$

(2)当平滑参数$\mu>0$时,$\Psi(x)$在$\mathbb{R}$上是严格凸函数。

(3) $\Psi(x)=0$是$x=0$或1的充分必要条件。

证明:性质(1)无需证明,为证明函数性质(2),首先给出凸函数的二阶条件定理。

定理1 设$f(x)$是定义在凸集上的二阶连续可微的函数,则函数$f(x)$是凸函数,当且仅当

$$\nabla^2 f(x)\geqslant0$$

如果$\nabla^2 f(x)>0$,则函数$f(x)$是严格凸函数。

根据性质1和定理1可知,当$\mu>0$时,有$\Psi''(x)>0$,故S型曲线积分函数在$x\in\mathbb{R}$上是严格凸函数。

令$\Psi(x)=0$,有

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\mu\ln\left(e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}\right)-\mu\ln\left(e^{1/\mu}+1\right)=0\\&\Rightarrow e^{x/\mu}+e^{(1-x)/\mu}=e^{1/\mu}+1=e^{1/\mu}+e^{0/\mu}\\&\Rightarrow x=0\ \text{or}\ x=1\end{aligned} \tag{7}$$

由图3和式(7)可知,当$\Psi(x)=0$时,函数的零点为0或1;且$x=0$或1时,有$\Psi(0)=\Psi(1)=0$,性质(3)成立,引理1证毕。

3　离散变量优化设计连续化模型

一般的离散变量结构优化设计问题表达式可以写为

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad g_j(x) \leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,J) \\ &\qquad x_i \in S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \cdots, S_{iR_i}\} (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{8}$$

式中 $f(x)$ 为目标函数，$g_j(x)$ 为约束函数，S_i 为第 i 个设计变量的离散集，R_i 为第 i 个离散集的维度。引入新的设计变量 δ_{ir}，用离散集 S_i 与之进行线性组合为原来的设计变量 x_i。

$$x_i = \sum_{r=1}^{R_i} S_{ir}\delta_{ir} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

式中 新设计变量 δ_{ir} 需满足

$$\sum_{r=1}^{R_i} \delta_{ir} = 1 \tag{10}$$
$$(\delta_{ir} \in \{0,1\}, i=1,2,\cdots,n, r=1,2,\cdots,R_i)$$

式(10)使得与原设计变量 x_i 对应的一组新变量 δ_{ir} 的值只能取得0或1，并且有且只有一个 $\delta_{ir}=1$。根据式(9)，当 $\delta_{ir}=1$ 时，$x_i=S_{ir}\in S_i$。通过上述方法，用 δ_{ir} 代替原设计变量，代入原离散优化设计问题，可以得到与式(8)等价的0-1规划问题：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\delta) \\ &\text{s.t.} \quad g_j(\delta) \leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,J) \\ &\qquad \sum_{r=1}^{R_i} \delta_{ir} = 1 \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ &\qquad \delta_{ir} \in \{0,1\} \quad (r=1,2,\cdots,R_i) \end{aligned} \tag{11}$$

根据S型曲线积分函数的性质，将 δ_{ir} 代入式(7)得

$$\Psi(\delta_{ir}) = \mu \ln(e^{\delta_{ir}/\mu} + e^{(1-\delta_{ir})/\mu}) - \mu \ln(e^{1/\mu}+1) = 0 \tag{12}$$

式(12)与模型(11)中 $\delta_{ir}\in\{0,1\}$ 的约束条件是等价的。因此，将式(12)代入式(11)，原问题可以转化成与其等价的非线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\delta) \\ &\text{s.t.} \quad g_j(\delta) \leqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,J) \\ &\qquad \sum_{r=1}^{R_i} \delta_{ir} = 1 \\ &\qquad \Psi(\delta_{ir}) = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n, r=1,2,\cdots,R_i) \end{aligned} \tag{13}$$

至此，通过所提的S型曲线积分函数，建立了离散变量结构优化设计的连续化模型，如式(13)所示。在工程结构优化问题中，通常 $g_j(\delta)$ 表示结构的位移、应力、刚度等约束条件，约束函数较多会影响问题的计算效率，而凝聚函数法[11,18]可以有效减少约束函数的数量，以简化问题的求解规模。设函数 $g_j(\delta)(j=1,2,\cdots,J)$ 充分光滑，其中最大值函数为

$$g_{\max}(\delta) = \max\{g_j(\delta)\} \tag{14}$$

凝聚函数为

$$g_\varepsilon(\delta) = g_{\max}(\delta) + \varepsilon \ln \sum_j^m \exp\{[g_j(\delta) - g_{\max}(\delta)]/\varepsilon\} \tag{15}$$

在 $\varepsilon>0$ 且足够小的条件下，式(15)在 $\mathbb{R}^n$ 上逼近式(14)。将式(13)中所有的等式约束写成

$$h_m(\delta) = 0 \quad (m=1,2,\cdots,M; M = n + \sum_{i=1}^n R_i) \tag{16}$$

式(15,16)代入式(13)简化非线性规划模型后，采用部分增广拉格朗日函数算法[19]对其求解。只将等式约束放入增广拉格朗日函数，而不等式约束作为子问题的约束函数进行计算，得到的部分增广拉格朗日函数子问题为

$$\begin{aligned} &\min \quad L_{\sigma_k}(\delta,\lambda^k) = f(\delta) + \sum_{m=1}^M \lambda_m^k h_m(\delta) + \frac{\sigma_k}{2}\sum_{m=1}^M h_m^2(\delta) \\ &\text{s.t.} \quad g_\varepsilon(\delta) \leqslant 0 \end{aligned} \tag{17}$$

式中 σ_k 为惩罚参数，λ_m 为拉格朗日乘子，其更新方式为

$$\lambda_m^{k+1} = \sigma_k h_m(\delta^k) + \lambda_m^k \tag{18}$$

具体算法如下：

Step1：给定初始点 $\delta^0 \in \Omega$，初始参数 $k=0$，$\lambda^0>0$，$\sigma_0>0$，$\kappa\in(0,1)$，$\eta>0$，$\varepsilon>0$。

Step2：以 δ^k 为子问题初始点，求解部分增广拉格朗日问题(17)，得到子问题最优解 δ^{k+1}，且满足 $g_\varepsilon(\delta^{k+1})\leqslant 0$。

Step3：按式(18)修正拉格朗日乘子。

Step4：更新罚因子，如果 $\|h(\delta^{k+1})\| \geqslant \kappa \|h(\delta^k)\|$，令 $\sigma_{k+1}=\eta\sigma_k$，否则，令 $\sigma_{k+1}=\sigma_k$。

Step5：判断是否满足终止准则，如果 $\|\nabla L(\delta^{k+1},\lambda^k)\| \leqslant \varepsilon_2$，则算法终止，否则令 $k=k+1$，回到Step2，进行下一次循环。

上述算法中，步骤2中带不等式约束的优化子问题，在本文采用MATLAB软件中的fmincon函数进行求解。此外，式(12)中的平滑参数 μ 的取值为非零实数，根据图2可知，平滑参数 μ 越大，S型曲线积分函数的图像越平缓；反之，μ 越小，曲线越陡峭。对于简单的问题，可以令 μ 取较小的值，使

得设计变量更快地离散到 0-1 值上;而对于较复杂地问题,为避免设计变量陷入局部最优解,可以增大平滑参数 μ 的取值,在本文桁架结构优化算例中,参数 μ 的取值为 5,以确保优化过程可以平稳收敛到最优解;凝聚函数中的参数 ε 只需满足大于零且足够小的条件,因此,本文算例取 $\varepsilon=10^{-4}$ 进行计算。

4 数值算例

4.1 算例 1

$$\begin{aligned}
\min\quad & f(X)=x_1+0.5x_2+1.5x_3+0.8x_4+1\\
\text{s.t.}\quad & 10-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2\leqslant 0\\
& 12-2x_1^2-x_2^2-x_3^2-2x_4^2\leqslant 0\\
& 9-x_1^2-3x_2^2-0.8x_3^2-0.5x_4^2\leqslant 0\\
& 15-0.5x_1^2-2x_2^2-3x_3^2-x_4^2\leqslant 0\\
& x_i\in S_i=\{0,1,2,3\}\quad (i=1,2,3,4)
\end{aligned}$$

上述问题共有 4 个设计变量,每个变量可取的离散值有 4 个,根据式(9)所示的变量线性组合方式,原设计变量可用 16 个 0-1 变量替代,利用本文所提算法,式(12)的平滑参数 μ 取 0.1,经过 5 次迭代计算得到相应的 0-1 变量为

$$[\delta_{11},\delta_{12},\delta_{13},\delta_{14}]=[1,0,0,0]$$
$$[\delta_{21},\delta_{22},\delta_{23},\delta_{24}]=[0,0,0,1]$$
$$[\delta_{31},\delta_{32},\delta_{33},\delta_{34}]=[1,0,0,0]$$
$$[\delta_{41},\delta_{42},\delta_{43},\delta_{44}]=[0,0,1,0]$$

优化计算过程列入表 1,原问题最优解为

$X^*=[0,3,0,2]$, $f(X^*)=4.10$ 。

表 1 算例 1 优化迭代过程

Tab. 1 Optimization iterative process of numerical example 1

迭代	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(X)$
0	0.60	0.60	0.60	0.60	3.28
1	0.00	3.00	0.00	1.21	3.47
2	0.00	3.00	0.00	1.22	3.48
3	0.00	3.00	0.00	1.21	3.47
4	0.00	2.70	0.00	2.00	3.95
5	0.00	3.00	0.00	2.00	4.10

4.2 25 杆桁架截面尺寸优化

25 杆桁架结构如图 3 所示。材料弹性模量为 68.98 GPa,材料密度为 2769 kg/m^3。设计变量是各杆件的截面面积,目标函数是结构重量。根据结构的对称性,25 根杆件可以分为 8 组,即对应设计变量有八个,杆件分组情况列入表 3。结构受两种工况的荷载作用列入表 2。讨论两种情况下 25 杆优化问题的算例。

算例 1:设计变量的许用离散集为 $S_1=\{51.6$, 64.5, 193.6, 451.6, 645.2, 1290.3, 1935.5, 2580.6$\}$(mm^2),节点 1 和节点 2 在 x 和 y 方向上的最大位移不超过±8.89 mm,各杆件许用应力列入表 3。

算例 2:设计变量从许用离散集 $S_2=\{6.45$, 258.1, 516.1, 774.2, 1032.3, 1290.3, 1548.4, 1806.4, 2064.5, 2322.6, 2580.6, 2838.7, 3096.8, 3354.8, 3612.9, 3871.0$\}$(mm^2)中选取,所有节点在 x,y,z 三个方向上的位移不超过±8.89mm,各杆件的许用应力值为±275.8 MPa。

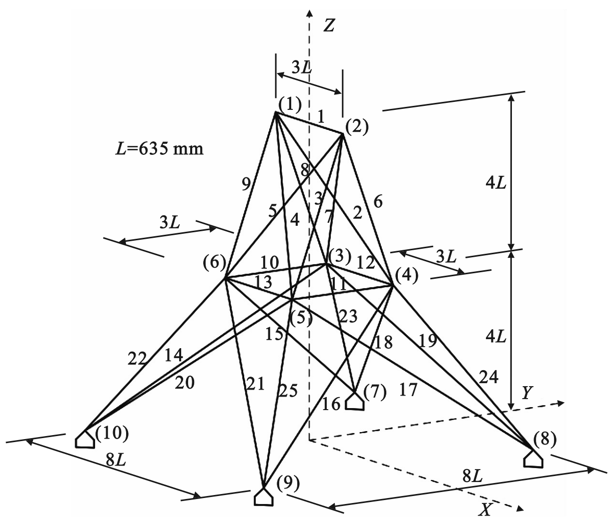


图 3 25 杆空间桁架

Fig. 3 25-bar spatial truss

表 2 25 杆桁架荷载工况

Tab. 2 Load conditions of 25-bar spatial truss

工况	节点	P_x /kN	P_y /kN	P_z /kN
1	1	4.45	44.5	−22.25
1	2	0.0	44.5	−22.5
1	3	2.225	0.0	0.0
1	6	2.225	0.0	0.0
2	1	0.0	89.0	−22.5
2	2	0.0	−89.0	−22.5

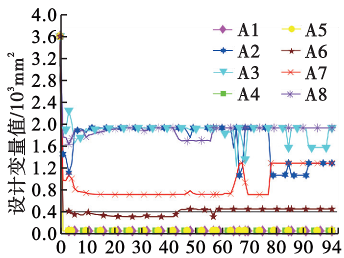
25 杆桁架结构算例 1 的最优解为 $X^*=$ (51.6, 1290.3, 1935.5, 51.6, 51.6, 451.6, 1290.3, 1935.5)(mm^2),结构最优重量为 $W^*=2630.45$N,与文献[11]优化计算结果一致。优化迭代过程如图 4 所示。根据本文算法,算例 1 共有 8 个设计变量,每个设计变量的许用离散集元素均为 8 个,根据式(9),原设计变量可用 64 个 0-1 变量等价替换,新设计变量的初值点均取为 0.5 进行迭代计

算。该问题共有 8 个线性等式约束和 64 个非线性等式约束,对各类等式约束的绝对值取最大值并进行归一化处理,得到其变化过程如图 4(c)所示,图 4(a)表示 8 组杆件截面尺寸的迭代过程,随着惩罚参数的更新促使各类等式约束条件趋于同时满足,因此计算过程中原设计变量能够趋近于离散集 S_1 中的离散元素。

表 3　25 杆节点连接情况及许用应力

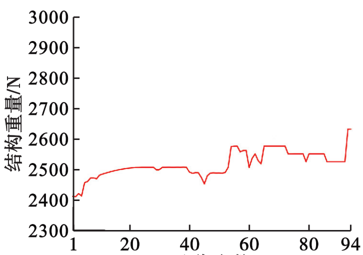
Tab. 3　Member linking groups and stress limits

分组	编号	$\underline{\delta}$ /MPa	$\bar{\sigma}$ /MPa
1	1-2	−242.0	275.8
2	1-4 2-3 1-5 2-6	−79.94	275.8
3	2-5 2-4 1-3 1-6	−11.94	275.8
4	3-6 4-5	−242.0	275.8
5	3-4 4-6	−242.0	275.8
6	3-10 6-7 4-9 9-8	−46.62	275.8
7	3-8 4-7 6-9 9-10	−46.62	275.8
8	3-7 4-8 5-9 6-10	−76.64	275.8



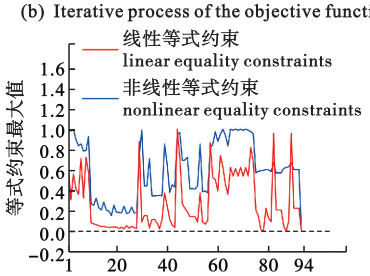
(a) 设计变量迭代过程

(a) Iterative process of design variables



(b) 目标函数迭代过程

(b) Iterative process of the objective function



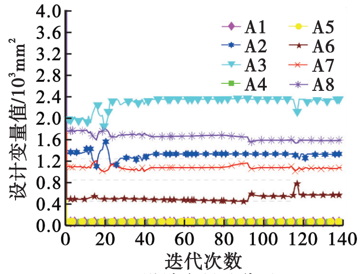
(c) 等式约束迭代过程

(c) Iterative process of equality constraints

图 4　25 杆算例 1 优化计算过程

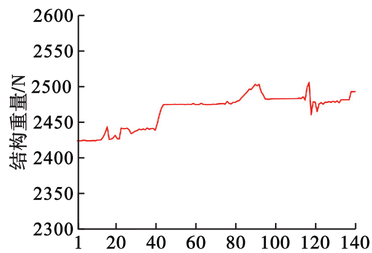
Fig. 4　Optimization calculation process of 25-bar example 1

25 杆桁架结构算例 2 的最优解为 $X^* = (6.45, 1290.3, 2322.6, 6.45, 6.45, 516.1, 1032.3, 548.4)$ (mm^2),最优重量为 $W^* = 2493.629$ N,对应的结构最大节点位移为 8.845 mm,最大应力为压应力 −50.8 MPa。图 5 给出了算例 2 的优化迭代过程,由于算例 2 离散集元素数目变为 16 个,原设计变量对应的新的 0-1 变量从 64 个变为 128 个,但优化迭代的次数并没有因此像组合优化方法一样呈指数型增长,这说明了本文的方法具有对问题的规模不敏感的优点。



(a) 设计变量迭代过程

(a) Iterative process of design variables



(b) 目标函数迭代过程

(b) Iterative process of the objective function

图 5　25 杆算例 2 优化计算过程

Fig. 5　Optimization calculation process of 25-bar example 2

4.3　72 杆桁架截面尺寸优化

72 杆空间桁架结构如图 6 所示。杆件材料的弹性模量为 $E = 68.98$ GPa,材料密度为 $\rho = 2769$ kg/m³。目标函数是结构重量,设计变量为杆件的截面面积,根据结构的对称性,72 根杆件可以分为 16 组,杆件的分组情况列入表 4。结构受两种工况的荷载作用,工况 1:在节点 1 处作用 $P_x = P_y = 22.226$ kN,$P_z = -22.226$ kN 的集中荷载。工况 2:在节点1～4 处分别作用 $P_z = -22.226$ kN 的集中力。所有杆件的许用应力为 ±172.244 MPa。讨论两种情况下 72 杆优化问题的算例。

算例 1:设计变量的许用离散集为 $S_1 = \{64.5, 129.0, 322.6, 387.1, 580.6, 774.2, 967.7, 1161.3\}$ (mm^2),节点 1 ～ 16 处三个方向节点位移不超过 ±6.35 mm。

算例 2:设计变量从许用离散集 $S_2 = \{64.5, 129.0, 193.5, 258.1, 322.6, 387.1, 451.6, 516.1,$

580.6,645.2,709.7,774.2,838.7,903.2,967.7,1032.3,1096.8,1161.3,1225.8,1290.3,1354.8,1419.4,1483.9,1548.9,1612.9,1677.4,1741.9,1806.4,1871.0,1935.5,2000.0,2064.5}(mm^2)共32个离散集元素中选取,结构四个顶点处 x 和 y 方向的位移不超过±6.35 mm。

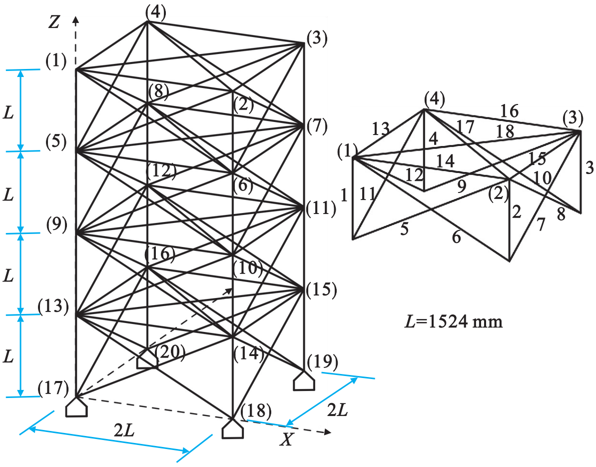


图 6 72杆空间桁架

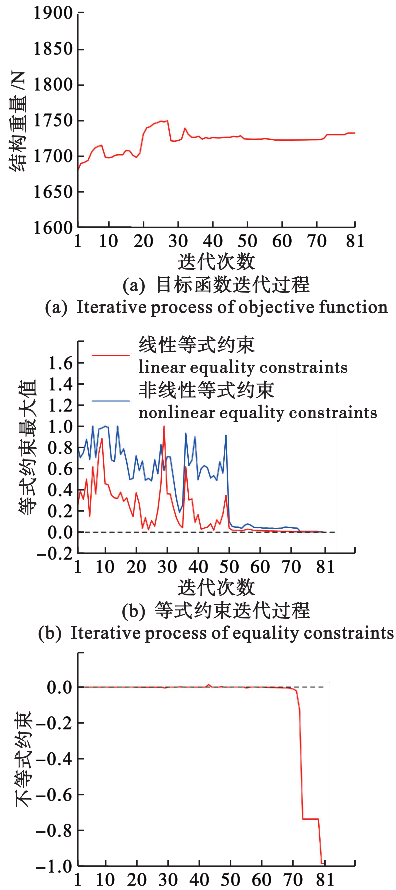
Fig. 6 72-bar spatial truss

表 4 72杆构件分组情况

Tab. 4 Grouping of 72-bar truss

分组	编号	分组	编号
1	1,2,3,4	9	37,28,29,40
2	5,6,7,8,9,10,11,12	10	41,42,43,44,45,46,47,48
3	13,14,15,16	11	49,50,51,52
4	17,18	12	43,54
5	19,10,21,22	13	55,56,57,58
6	23,24,25,26,27,28,29,30	14	59,60,61,62,63,64,65,66
7	31,32,33,34	15	67,68,69,70
8	35,36	16	71,72

经计算,72杆算例1的最优解为 X^* =(129.0,387.1,322.6,322.6,387.1,322.6,64.5,64.5,967.7,322.6,64.5,64.5,1161.3,322.6,64.5,64.5)(mm^2),结构的最优重量为 W^* =1731.9 N。相比于文献[11]的计算结果,本文计算的结构重量更轻,且节点的最大位移为6.299 mm,最大应力为压应力−140.5 MPa,满足结构的刚度和强度约束。算例1的各类约束条件满足情况和目标函数的优化迭代过程如图7所示。在优化初始阶段,由于惩罚系数和拉格朗日乘子较小,得到了较小但不满足等式约束条件的目标函数值,此时不等式约束保持近似满足小于0的条件,满足本文算法中子问题求解的终止准则。经过有限次数的迭代后,各类等式约束也趋于同时满足,最终迭代点收敛于原问题的可行点,因此目标函数最终值呈现出了大于初始阶段值的特征。



(a) 目标函数迭代过程

(a) Iterative process of objective function

(b) 等式约束迭代过程

(b) Iterative process of equality constraints

(c) 不等式约束迭代过程

(c) Iterative process of inequality constraint

图 7 72杆算例1优化计算过程

Fig. 7 Optimization calculation process of 72-bar example 1

算例2的最优解为 X^* =(129.0,387.1,258.1,322.6,322.6,322.6,64.5,64.5,903.2,322.6,64.5,64.5,1354.8,322.6,64.5,64.5)(mm^2),结构的最优重量为 W^* =1721.2 N。最大位移为6.337 mm,最大应力为−141.7 MPa。本文优化计算结果与其他文献结果对比列入表5,由于结构强度和刚度约束主要受位移约束的作用,因此表5只给出了最优解对应的最大位移情况。其中Kaveh等[20]的PSOPC算法和Degertekin等[21]的Jaya算法所得结果最小,但PSOPC算法的最大位移破坏了结构的约束条件。由于Jaya算法给出的结果对应的最大位移已经非常接近结构位移约束的上限,不再能够满足本文算法的精度条件,因此本文计算结果没有JA算法的结果理想,但本文研究的函数和方法仍然是可行的,相比于其他算法相比也取得了进步。由于离散集元素较多,且元素间

数值相差较少，在计算过程中结果容易收敛到局部最优解，不同算法间各设计变量容易收敛到不同的离散值，但总体来看相差不大，因此本文的方法对于解决实际问题是有效的。

表5　72杆算例2优化结果及对比
Tab.5　Optimization results and comparison of 72-bar example 2

分组	文献[20]	文献[21]	文献[22]	文献[23]	文献[11]	本文
1	129.0	129.0	129.0	64.5	129.0	129.0
2	387.1	387.1	322.6	322.6	322.6	387.1
3	258.1	258.1	193.5	387.1	258.1	258.1
4	387.1	387.1	451.6	387.1	387.1	322.6
5	387.1	322.6	322.6	645.2	387.1	322.6
6	322.6	322.6	322.6	258.1	322.6	322.6
7	64.5	64.5	322.6	322.6	64.5	64.5
8	64.5	64.5	322.6	322.6	64.5	64.5
9	838.7	903.2	903.2	1032.3	903.2	903.2
10	322.6	322.6	322.6	387.1	387.1	322.6
11	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5
12	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5
13	1225.8	1225.8	1354.8	1225.8	1225.8	1354.8
14	322.6	322.6	387.1	258.1	322.6	322.6
15	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5
16	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5	64.5
重量	1715.0	1715.0	1730.1	1726.2	1725.6	1721.2
位移	6.351	6.3499	6.342	6.348	6.325	6.337

注：设计变量单位：mm^2；重量单位：N；位移单位：mm。

5　结　论

本文对离散变量结构优化问题的连续化方法做了进一步探究，在离散变量0-1离散化的基础上，首先构造了S型曲线积分函数，等价替换了设计变量取0或1的离散约束条件，实现了原离散变量优化问题的连续化处理。目前常用的几种连续化方法中，Sigmoid函数法采用了变量代换的方式，由于部分区间导数值急剧变化，解的最优性不易满足；二进制熵函数法和NCP函数法则是通过取代约束条件的方法实现连续化，其中二进制熵函数法由于导数的变化较大，同样导致解的最优性不易满足[7]。而本文的S型曲线积分函数法用等价替换约束条件实现连续化，函数曲线的陡峭程度可以进行调整，因此容易满足问题的最优性，且相比于NCP函数法，S型曲线积分函数具有本身连续可微，无需光滑近似处理的优点。但同时为了更好地满足解的最优性，也会导致迭代时的可行性不大容易满足，因此如何平衡可行性和最优性的满足情况有待进一步研究。

针对所提的连续化方法，文中给出了相关算法并计算了经典桁架截面优化问题的四个算例，数值结果表明，所提方法对于解决实际问题是有效的，且具有对问题规模不敏感的特点，这意味着离散变量结构优化设计的连续化方法可用于计算大规模问题，仍然可以通过较少的迭代次数得到最优解。在实际问题中，如输电塔结构、大跨度拱桥结构等可以简化成桁架的工程结构都可以采用离散变量的连续化方法进行优化计算，不限于工程结构的尺寸优化问题，在各类结构的拓扑优化、电力系统的无功优化等领域都有非常广阔的应用前景。

参考文献(References)：

[1] 杜剑明，杜宗亮，刘　畅，等．基于结构可置信性鲁棒优化算法的离散优化问题研究[J]．计算力学学报，2021，**38**(4)：538-548．(DU Jian-ming，DU Zong-liang，LIU Chang，et al. A study on discrete optimization problem based on confidence structural robust optimization algorithm[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2021，**38**(4)：538-548.(in Chinese))

[2] 黄冀卓，王　湛．基于遗传算法的离散型结构拓扑优化设计[J]．工程力学，2008，**25**(5)：32-38．(HUANG Ji-zhuo，WANG Zhan. Topology optimization design for discrete structures using genetic algorithm[J]. *Engineering Mechanics*，2008，**25**(5)：32-38.(in Chinese))

[3] 冯一芒，孔德奎，毕世权，等．基于遗传算法的温差发电系统模块布局优化设计[J]．计算力学学报，2022，**39**(2)：161-169．(FENG Yi-mang，KONG De-kui，BI Shi-quan，et al. Optimization design of thermoelectric system module layout based on genetic algorithm[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2022，**39**(2)：161-169.(in Chinese))

[4] 张卓群，李宏男．基于蚁群算法的桁架结构布局离散变量优化方法[J]．计算力学学报，2013，**30**(3)：336-342．(ZHANG Zhuo-qun，LI Hong-nan. The method of truss structure layout discrete variable optimization based on Ant Colony Optimization[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2013，**30**(3)：336-342.(in Chinese))

[5] Templeman A B，Yates D F. A segmental method for

the discrete optimum design of structures[J]. *Engineering Optimization*, 1983, **6**(3): 145-155.

[6] 隋允康,林永明. 含梁结构离散断面的优化及其对平面框架的程序实现[J]. 计算结构力学及其应用, 1987, **4**(3): 62-69. (SUI Yun-kang, LIN Yong-ming. The optimization of beam-containing structure with discrete cross-sections and its computer implementation on plane frame structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1987, **4**(3): 62-69. (in Chinese))

[7] 谭 涛. 离散变量优化设计的连续化方法研究[D]. 大连理工大学, 2006. (TAN Tao. Continuous Approach to Discrete Optimum Design[D]. Dalian University of Technology, 2006. (in Chinese))

[8] Tan T, Li X S. A continuous approach to discrete structural optimization[A]. Computational Methods in Engineering & Science[C]. 2007.

[9] 李兴斯,谭 涛. 离散变量结构优化设计的连续化方法[J]. 应用力学学报, 2007, **24**(1): 26-30, 171. (LI Xing-si, TAN Tao. Continuous approach to discrete structural optimization[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2007, **24**(1): 26-30, 171. (in Chinese))

[10] 李艳艳. 0-1 规划问题的连续化方法研究及应用[D]. 大连理工大学, 2009. (LI Yan-yan. Research and Application of Continuation Method for 0-1 Programming Problem[D]. Dalian University of Technology, 2009. (in Chinese)

[11] Li Y Y, Tan T, Li X S. A gradient-based approach for discrete optimum design[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **41**(6): 881-892.

[12] Pan S H, Tan T, Jiang Y X. A global continuation algorithm for solving binary quadratic programming problems[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2008, **41**(3): 349-362.

[13] Nayak R K, Mohanty N K. Solution of Boolean quadratic programming problems by two augmented Lagrangian algorithms based on a continuous relaxation [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2020, **39**(3): 792-825.

[14] Peng H J, Zhang M R. Continuous methods for dynamic optimization of multibody systems with discrete and mixed variables[J]. *Multibody System Dynamics*, 2024, **60**(3): 475-496.

[15] 韦园清. 基于 Sigmoid 和 NCP 函数的电力系统无功优化连续化方法[D]. 广西大学, 2012. (WEI Yuanqing. Continuous Approach to Reactive Power Optimization of Power System Based on Sigmoid and NCP Function[D]. Guangxi University, 2012. (in Chinese))

[16] 孙焕纯,柴 山,王跃方,等. 离散变量结构优化设计[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2002. (SUN Huanchun, CHAI Shan, WANG Yue-fang, et al. *Discrete Optimum Design of Structures* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2002. (in Chinese))

[17] 乔心州,黄 兴,刘 鹏,等. 离散变量桁架非概率可靠性优化设计[J]. 机械设计与研究, 2021, **37**(3): 12-15, 28. (QIAO Xin-zhou, HUANG Xing, LIU Peng, et al. Optimization design of trusses with discrete variables based on non-probabilistic reliability[J]. *Machine Design & Research*, 2021, **37**(3): 12-15, 28. (in Chinese))

[18] 李兴斯. 解非线性规划的凝聚函数法[J]. 中国科学(A辑 数学 物理学 天文学 技术科学), 1991, **21**(12): 1283-1288. (LI Xing-si. Cohesive function method for solving nonlinear programming[J]. *Science in China, Ser A*, 1991, **21**(12): 1283-1288. (in Chinese))

[19] 张 雪. 矩阵不等式约束的部分增广拉格朗日法[D]. 苏州大学, 2020. (ZHANG Xue. Partially Augmented Lagrangian Method for Matrix Inequality Constraints[D]. Soochow University, 2020. (in Chinese))

[20] Kaveh A, Talatahari S. A particle swarm ant colony optimization for truss structures with discrete variables[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009, **65**(8-9): 1558-1568.

[21] Degertekin S O, Lamberti L, Ugur I B. Discrete sizing/layout/topology optimization of truss structures with an advanced Jaya algorithm[J]. *Applied Soft Computing*, 2019, **79**: 363-390.

[22] Li L J, Huang Z B, Liu F. A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables[J]. *Computers & Structures*, 2009, **87**(7-8): 435-443.

[23] Sedlar D, Lozina Z, Tomac I. Discrete optimization of truss structures using variable neighborhood search [J]. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 2022, **46**(2): 1249-1264.

Discrete optimum design method based on S-type curve integral function

SUN Rong[1], TAN Tao[*1], LI Yan-yan[2]
(1. College of Energy and Mining Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;
2. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: Compared with the continuous optimization design method, the results of the discrete optimum design are more in line with the actual needs of projects. However, because of the discontinuity of design variables, many effective analytical optimization algorithms and conditions are no longer applicable. Therefore, a new function for the continuous method of structural optimization design with discrete variables is proposed in this paper, which is called S-type curve integral function. The function has the property of continuous differentiability, and when the independent variable is zero or one, the corresponding function value is zero. According to the properties of the proposed function, new zero-one design variables are introduced to replace the original design variables, and a discrete optimum design is transformed into an equivalent zero-one programming. Then, the constraint condition that the new design variables are zero or one is replaced the condition that the value of S-type curve integral function is zero, and the continuous processing of the discrete variable optimization problem is realized in this way. In addition, the mathematical model and the corresponding algorithm of the nonlinear programming problem equivalent to the original problem are given, which can be solved by the general mathematical programming method. Finally, a numerical example and several size optimization problems of classical truss structures are calculated in MATLAB numerical analysis software. Numerical results show that the proposed method is effective and has the advantage of being insensitive to the scale of the problem.

Key words: discrete variables; structural optimization; zero-one programming; continuous method; S-type curve integral function

(上接第 345 页)

Quantum annealing-driven topology optimization design method for truss structures

WANG Yan, YANG Di-xiong[*], LEI Zhen-zeng, CHEN Guo-hai
(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: To address the limitations of computational inefficiency and ease to fall into local optima in traditional topology optimization methods for a truss structures, this paper proposes a quantum annealing-driven stiffness optimization design method based on the idea of a truss ground structure. Firstly, the elastic strain energy of the truss structure is selected as the objective function, while volume constraints are formulated as penalty terms embedded into the Hamiltonian of the truss system, thereby forming the problem of an unconstrained optimization. Subsequently, by constructing the exponential mapping relationship between the increment of the cross-sectional area of the bars and the encoded qubit, introducing auxiliary qubits and driving them by a quantum annealing algorithm, the adjustment of the positive and negative directions of the increment is realized. The volume-constrained truss stiffness optimization problem is transformed into a quadratic unconstrained binary optimization problem which is solvable by a quantum annealing machine. The hybrid optimization framework incorporating classical-quantum computing is developed, where classical finite element analysis is executed on a conventional computer and the optimization task is implemented on the special quantum annealer. Two examples of truss topology optimization indicate the stable convergence of the proposed algorithm of this paper. This work demonstrates the feasibility and application potential of the quantum annealing algorithm in structural optimization, offering an innovative paradigm for engineering design optimization that integrates classical computing with quantum algorithms.

Key words: truss structures; topology optimal design; quantum annealing algorithm; quantum computing; quadratic unconstrained binary optimization problem