

DOI: 10.7511/jslx20230815002

# 车道荷载作用下的变截面连续箱梁桥约束扭转分析

尉浩浩<sup>\*1</sup>, 张和<sup>1</sup>, 何昊<sup>2</sup>, 王磊<sup>1</sup>, 刘志<sup>1</sup>

(1. 中国电建集团西北勘测设计研究院有限公司, 西安 710065; 2. 兰州职业技术学院 后勤基建处, 兰州 730070)

**摘要:**为了分析约束扭转效应对箱梁截面应力的影响,基于箱梁约束扭转微分方程初参数解,推导出自由扭矩和二次扭矩的初参数解析式;引入以扭转角和广义翘曲位移为节点位移的箱梁单元,根据乌氏第二理论和箱梁单元推导出单元刚度矩阵、自由扭矩、二次扭矩的计算矩阵和等效节点荷载列阵;利用 Fortran 语言编写有限元程序,用于分析变截面连续箱梁桥的约束扭转效应,并用程序计算某变截面三跨连续箱梁桥在双力矩最不利布载下的截面内力和位移。结果表明,约束扭转效应引起的二次剪应力与扭转剪应力的比值在腹板上达到峰值,其比值在支点截面和集中荷载作用截面上分别可达到 35.66% 和 68.23%,而在其余截面上未超过 2.23%;沿纵桥向,正应力放大系数和剪应力放大系数的峰值出现在支点截面;对于本文实例桥,正应力放大系数的取值范围为 1.077~1.304,剪应力放大系数的取值范围为 1.822~2.667。

**关键词:**箱梁;约束扭转;单元刚度矩阵;二次剪应力;扭转剪应力;应力放大系数

**中图分类号:**U448.213;O302

**文献标志码:**A

**文章编号:**1007-4708(2025)01-0139-07

## 1 引言

变截面连续箱梁桥因其具有良好的稳定性和适应性而广泛应用于桥梁工程<sup>[1-3]</sup>,但随着在实际工程中的大量应用,发现预应力混凝土箱梁桥常出现裂缝<sup>[4,5]</sup>,这些裂缝影响着结构的耐久性和美观性,引起了研究人员的密切关注。为明确裂缝的出现原因并提出针对性的改善措施,文献[6]通过对具体桥梁的实际检查和有限元模型分析,指出箱梁扭转产生的剪力流是导致箱梁腹板开裂的原因之一。而文献[7,8]通过有限元软件对连续箱梁桥空间效应进行了分析,指出箱梁斜截面的抗剪承载力不足是导致箱梁出现裂缝的原因,并提出通过增加腹板刚度和强度来提高箱梁腹板的抗剪承载力,控制腹板裂缝的出现。上述文献表明了箱梁出现斜裂缝的原因,并提出了相关改善措施,但未定量给出箱梁尺寸的设计标准,为给桥梁设计提供直接方便的设计依据,文献[9,10]利用 Fortran 语言自编程序,分析了空间效应对变截面箱梁桥截面正应力

的影响,指出应力增大系数的峰值为 1.481,但此峰值仅针对正应力,并未对剪应力做出分析。文献[11]则利用程序计算和具体的实验模型分析,计算出箱梁空间效应引起的剪应力偏载系数分布在 1.5~2.0,并表明在设计中采取的经验系数 1.15 对于正应力适用,对于剪应力的考虑是偏小的。文献[12]利用有限元软件计算出连续梁桥的偏载系数介于 1.05~1.1 之间。文献[13]通过实体有限元模型和试验研究,提出偏载增大系数在跨中截面为 1.4,在支点截面为 1.7。综上,现有文献对于应力增大系数的取值相差较大,尚存争议,并且均是针对具体的桥梁计算出的,针对不同跨径、宽度的桥梁是否具有普遍适用性还需更多的研究。

本文在现有理论的基础上,推导出了自由扭矩、二次扭矩的初参数解析式和计算矩阵,并利用 Fortran 语言自编程序,对变截面连续箱梁桥的约束扭转效应进行详细研究。同时,在分析时改变了以往仅针对几个特殊截面进行分析的方法,通过大量计算,分别对正应力、剪应力、正应力放大系数和

收稿日期:2023-08-15;修改稿收到日期:2023-09-20.

基金项目:国家自然科学基金(52468044)资助项目.

作者简介:尉浩浩\*(1997-),男,硕士,工程师(E-mail:1248793481@qq.com).

引用本文:尉浩浩,张和,何昊,等.车道荷载作用下的变截面连续箱梁桥约束扭转分析[J].计算力学学报,2025,42(1):139-145.

WEI Hao-hao, ZHANG He, HE Hao, et al. Analysis on restrained torsion of continuous box girder bridge with variable section under lane load[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 139-145.

剪应力放大系数沿纵桥向和横桥向的分布规律进行分析。

## 2 约束扭转控制微分方程及初参数解

由乌氏第二理论可建立箱梁的约束扭转控制

微分方程<sup>[14]</sup>为  $\theta''''(z) - k^2\theta''(z) = \frac{\mu}{EI_{\omega}}m$ , 其对应的齐次微分方程的初参数解为

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{\mu\beta'_0 \operatorname{sh}kz}{k} + \frac{B_0(1 - \operatorname{ch}kz)}{GI_d} + \frac{T_0(kz - \mu \operatorname{sh}kz)}{kGI_d} \quad (1)$$

$$\beta'(z) = \beta'_0 \operatorname{ch}kz - \frac{kB_0}{\mu GI_d} \operatorname{sh}kz + \frac{T_0}{GI_d} (1 - \operatorname{ch}kz) \quad (2)$$

$$B(z) = -\frac{\mu GI_d}{k} \beta'_0 \operatorname{sh}kz + B_0 \operatorname{ch}kz + \frac{\mu}{k} T_0 \operatorname{sh}kz \quad (3)$$

$$T(z) = T_0 \quad (4)$$

式中  $k = \sqrt{\mu GI_d / (EI_{\omega})}$ ;  $\mu = (I_r - I_d) / I_r$ ;  $I_d = \Omega^2 / \oint \frac{ds}{t}$  为截面抗扭惯性矩;  $\Omega$  为箱梁薄壁中心线所围面积的两倍;  $I_r = \oint r^2 t ds$  为极惯性矩;  $I_{\omega} = \oint \omega^2 t ds$ ;  $m$  为扭矩外荷载, 方向以力矢指向坐标轴正向为正;  $E$  为弹性模量;  $G$  为剪切模量;  $\bar{\omega} = \int_0^s r ds - (\Omega / \oint \frac{ds}{t}) \int_0^s \frac{ds}{t}$ ;  $r$  为扇性极点与计算点切线的距离;  $t$  为箱梁各板件的厚度。  $\beta'(z)$  为广义翘曲位移;  $T(z)$  为扭矩;  $B(z)$  为翘曲双力矩;  $\theta_0, \beta'_0, T_0, B_0$  依次为由边界条件确定的四个初参数, 当为固定端时, 边界条件为  $\theta=0$  和  $\beta'=0$ 。

将式(1)的导数式代入  $T_s(z) = GJ_d \theta'(z)$ <sup>[14]</sup> 得

$$T_s(z) = T_0 + (\mu GJ_d \beta'_0 - \mu T_0) \operatorname{ch}kz - kB_0 \operatorname{sh}kz \quad (5)$$

式中  $T_s$  为自由扭矩。

将式(2)的导数式代入  $T_{\omega}(z) = -EJ_{\omega} \beta''''(z)$ <sup>[14]</sup> 得

$$T_{\omega}(z) = (\mu T_0 - \mu GJ_d \beta'_0) \operatorname{ch}kz + kB_0 \operatorname{sh}kz \quad (6)$$

式中  $T_{\omega}$  为二次扭矩。

## 3 单元刚度矩阵及等效节点荷载

以扭转角  $\theta$  和广义翘曲位移  $\beta'$  为节点位移, 可在箱梁上截取如图 1 所示的箱梁单元。

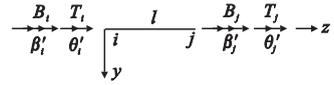


图 1 箱梁单元  
Fig. 1 Beam element

单元平衡方程为

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} \quad (7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{12} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中  $\boldsymbol{\delta} = [\theta_i \quad \beta'_i \quad \theta_j \quad \beta'_j]^T$ ,

$\mathbf{F} = [T_i \quad B_i \quad T_j \quad B_j]^T$ ,  $\mathbf{K}$  为单元刚度矩阵。

记单元两端自由扭矩、二次扭矩与节点位移之间的关系分别为

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{K}_s \boldsymbol{\delta} \quad (9)$$

$$\mathbf{T}_{\omega} = \mathbf{K}_{\omega} \boldsymbol{\delta} \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} K_{s11} & K_{s12} & K_{s13} & K_{s14} \\ K_{s21} & K_{s22} & K_{s23} & K_{s24} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{\omega} = \begin{bmatrix} K_{\omega11} & K_{\omega12} & K_{\omega13} & K_{\omega14} \\ K_{\omega21} & K_{\omega22} & K_{\omega23} & K_{\omega24} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中  $\mathbf{T}_s = [T_{si} \quad T_{sj}]^T$ ,  $T_{si}$  和  $T_{sj}$  分别指箱梁单元  $i$  端和  $j$  端的自由扭矩;  $\mathbf{T}_{\omega} = [T_{\omega i} \quad T_{\omega j}]^T$ ,  $T_{\omega i}$  和  $T_{\omega j}$  分别指箱梁单元  $i$  端和  $j$  端的二次扭矩;  $\mathbf{K}_s$  为自由扭矩矩阵;  $\mathbf{K}_{\omega}$  为二次扭矩矩阵。

记  $z=0$  为箱梁单元的  $i$  端,  $z=l$  为  $j$  端, 根据刚度矩阵中各元素的物理意义<sup>[15]</sup> 可知, 令  $\theta_0=1$ ,  $\beta'_0=\theta(l)=\beta'(l)=0$ , 则  $T_0, B_0, T(l), B(l)$  的数值依次与矩阵  $\mathbf{K}$  的第一列元素相等,  $T_{s0}, T_s(l)$  的数值依次与矩阵  $\mathbf{K}_s$  的第一列元素相等,  $\mathbf{K}_{\omega 0}, \mathbf{K}_{\omega}(l)$  的数值依次与矩阵  $\mathbf{K}_{\omega}$  的第一列元素相等。由此根据式(1~6)可计算出  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_s$  和  $\mathbf{K}_{\omega}$  的第一列元素。同理, 先后令  $\beta'_0=1, \theta(0)=1, \beta'(0)=1$  可求出矩阵  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_s$  和  $\mathbf{K}_{\omega}$  的其余元素。其中矩阵  $\mathbf{K}$  的各元素为

$$K_{11} = -K_{13} = -K_{31} = K_{33} = GJ_d D k \operatorname{sh}kl$$

$$K_{21} = K_{12} = K_{14} = K_{41} = \mu GJ_d D (1 - \operatorname{ch}kl)$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{34} = K_{43} = -\mu GJ_d D (1 - \operatorname{ch}kl)$$

$$K_{22} = K_{44} = \mu GJ_d D (kl \operatorname{ch}kl - \mu \operatorname{sh}kl) / k$$

$$K_{24} = K_{42} = -\mu GJ_d D (kl - \mu \operatorname{sh}kl) / k$$

式中  $D = 1 / (kl \operatorname{sh}kl + 2\mu - 2\mu \operatorname{ch}kl)$

矩阵  $\mathbf{K}_s$  的各元素为

$$K_{s11} = K_{s23} - K_{s13} = -K_{s21} = GJ_d D (1 - \mu) k \operatorname{sh}kl$$

$$K_{s24} = -\mu GJ_d D [(1 + \mu)(1 - \operatorname{ch}kl) + kl \operatorname{sh}kl]$$

$$K_{s14} = -K_{s22} = \mu GJ_d D (1 - \mu)(1 - \operatorname{ch}kl)$$

$$K_{s12} = \mu GJ_d D(1 + \mu)(1 - chkl)$$

矩阵  $\mathbf{K}_\omega$  的各元素为

$$K_{\omega11} = -K_{\omega13} = -K_{\omega21} = K_{\omega23} = \mu GJ_d Dkshkl$$

$$K_{\omega12} = -K_{\omega24} = \mu GJ_d D[\mu(chkl - 1) - klshkl]$$

$$K_{\omega14} = K_{\omega22} = \mu^2 GJ_d D(1 - chkl)$$

当箱梁单元作用满布扭矩荷载  $m_t$  时, 根据式(1~6)可得等效节点荷载列阵为

$$\mathbf{F}_{m_t}^f = \frac{m_t}{2} [l \quad R \quad l \quad -R]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{T}_{sm_t}^f = \left[ \frac{m_t l}{2}(1 - \mu) \quad \frac{m_t l}{2}(1 - \mu) \right]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_{\omega m_t}^f = \left[ \frac{\mu m_t l}{2} \quad \frac{\mu m_t l}{2} \right]^T \quad (15)$$

式中  $R = \frac{\mu}{k^2} \left( 2 + \frac{klshkl}{1 - chkl} \right)$ ;  $\mathbf{F}_{m_t}^f$  为总扭矩和翘曲双力矩的等效节点荷载列阵,  $\mathbf{T}_{sm_t}^f$  和  $\mathbf{T}_{\omega m_t}^f$  分别为自由扭矩和二次扭矩的等效节点荷载列阵。

### 4 应力放大系数

为具体表征约束扭转效应引起的附加应力, 引入正应力放大系数  $\eta$  和剪应力放大系数  $\alpha$ , 其计算表达式分别为

$$\eta = \frac{\sigma_m + \sigma_\omega}{\sigma_m} \quad (16)$$

$$\alpha = \frac{\tau_m + \tau_z}{\tau_m} \quad (17)$$

式中  $\sigma_m = \frac{My}{I_x}$  为弯曲正应力,  $\tau_m = -\frac{Q_y S_x}{I_x}$  为弯曲剪应力, 利用文献[16]的程序计算箱梁桥弯曲效应引起的截面内力;  $M$  为截面弯矩;  $y$  为计算点到中性轴的距离;  $I_x$  为截面惯性矩;  $Q_y$  为截面上作用的剪力;  $S_x = \int_0^s yt ds$  表示截面上点  $s$  关于  $x$  轴的静面距;  $\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \bar{\omega}$  为翘曲正应力;  $\tau_z = \frac{T_s}{\Omega t} - \frac{T_\omega}{I_\omega t} \bar{S}_\omega$  为约束扭转剪应力;  $\bar{S}_\omega = S_\omega - \oint \frac{S_\omega}{t} ds / \oint \frac{1}{t} ds$  为换算净面距;  $S_\omega = \int_0^s \bar{\omega} t ds$  为截面的扇性静面距;  $T_z = T_s + T_\omega$  为总扭矩。

### 5 程序介绍及验证

在推导出的箱梁单元刚度矩阵、自由扭矩矩阵、二次扭矩矩阵和等效节点荷载的基础上, 利用 Fortran 语言编写程序, 用于计算变截面箱梁在扭矩荷载作用下的截面内力(双力矩、总扭矩、自由扭矩和二次扭矩)和位移(扭转角、广义翘曲位移)。

为保证本文自编程序与计算方法的可靠性, 以一跨径布置为(40 m+40 m)的两跨等截面连续箱梁桥为例对程序进行验证, 此箱梁桥采用的混凝土强度为 C40, 第一跨跨中作用 997.5 kN·m 的集中扭矩  $T_k$ , 箱梁截面尺寸如图 2 所示。

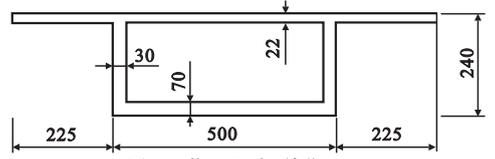


图2 截面尺寸(单位:cm)  
Fig.2 Section size drawing(unit:cm)

分别按照本文程序和文献[14]的方法计算截面内力, 图3为两种方法计算出的截面内力分布。从图3可以看出, 按照本文方法及程序与文献方法计算出的截面内力完全一致, 由此可以验证本文方法和程序是正确的。

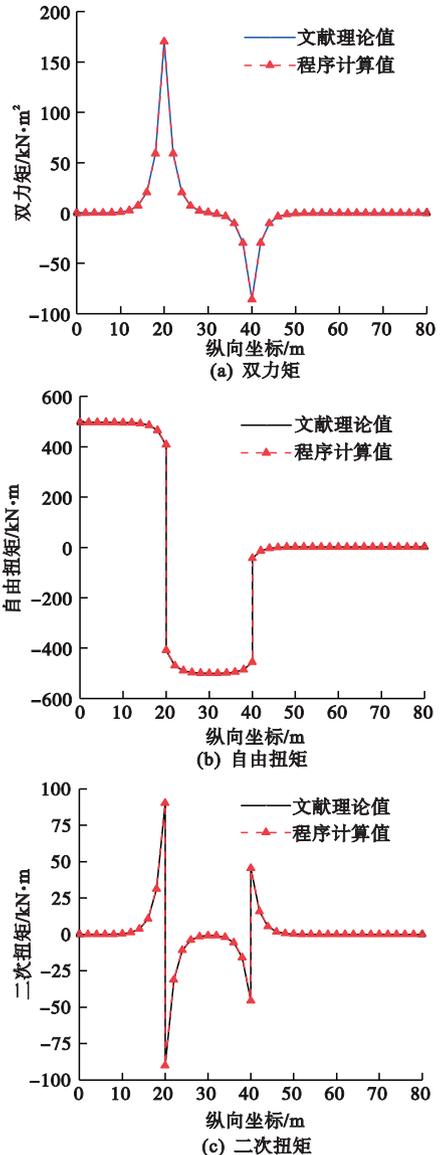


图3 内力分布  
Fig.3 Distribution of internal force

## 6 算例分析

以某三跨变截面预应力混凝土连续箱梁桥为算例。桥梁跨径为(75+120+75)米,为三跨对称结构,混凝土为C50。箱梁梁宽13.5米,桥面两侧各设有0.5米宽的护栏,桥面净宽12.0米。箱梁根部及中跨跨中截面尺寸如图4所示,箱梁梁高和底板厚度均按照二次抛物线变化,设计荷载为公路I级。

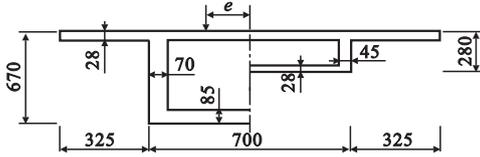


图4 中支点和中跨跨中处横截面(单位:cm)

Fig. 4 Cross section of middle fulcrum and middle span (unit:cm)

首先对桥梁进行有限元划分。将此桥划分成118个箱梁单元,共计119个节点,对应119个截面。具有相同尺寸的截面为同一种截面类型,可得35种截面类型。每个单元两端各对应一个截面,单元特征值为这两个截面对应的特征值的平均值,可将所有单元划分为43种单元类型。

为合理布置车道荷载,先利用自编程序对每个节点依次施加 $T=1$ 的扭矩荷载,由此可得出每个节点位置的双力矩影响线,边跨跨中、中支点、中跨1/4和中跨跨中位置处的双力矩影响线如图5所示。可以看出,支点处的双力矩由作用在其邻跨间的扭矩荷载贡献,作用于支点截面的扭矩荷载并不会在支点处产生双力矩,其他截面处的双力矩主要由作用在该截面及其附近的较小范围内的扭矩荷载贡献。

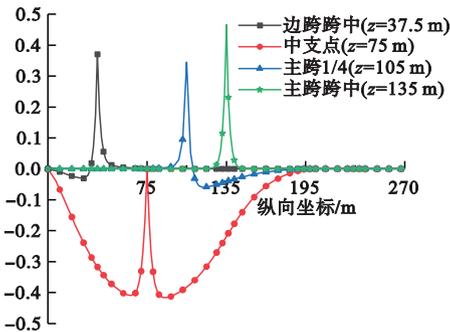


图5 双力矩影响线

Fig. 5 Influence line of bitorque

按照双力矩影响线布置车道荷载,以中跨跨中双力矩最大的布载方式为工况1,以中支点双力矩最大的布载方式为工况2。两种工况的布载如图6所示,图中 $P$ 为集中荷载, $q$ 为均布荷载。

根据行车道宽度,此桥最多设置三车道<sup>[17]</sup>,根据不同车道数下的车道荷载数值可知,单车道布载时,竖向荷载和扭矩均小于两车道时的布载,故本文对两车道和三车道进行分析。车道数量的不同,不影响桥梁在纵桥向的荷载布置方式,仅是荷载在数值上的不同,且不同车道数量下的集中荷载、分布荷载之间存在比例关系,故而不同的车道数量并不影响应力及应力放大系数沿纵桥向的变化趋势。

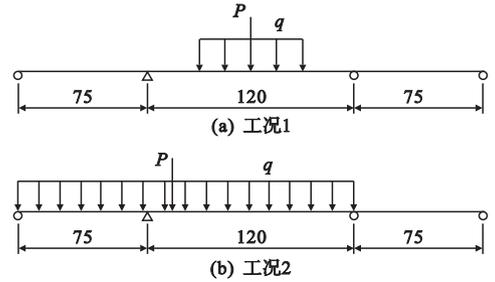


图6 布载示意图(单位:m)

Fig. 6 Layout diagram(unit:m)

为方便表示,选取翼缘板端部、腹板与顶板交点、腹板与底板交点分别为计算点1,2和3,将趋近计算点2的顶板上、腹板上和翼缘板上的点依次记为 $2_u, 2_w$ 和 $2_y$ ,将趋近计算点3的底板上和腹板上的点分别记为 $3_b, 3_w$ ,将腹板上扭转剪应力最大值点(腹板上 $\bar{S}_w$ 最小的点)和腹板上弯曲剪应力最大值点(腹板上 $S_y$ 最大的点)依次记为计算点4和计算点5,如图7所示。

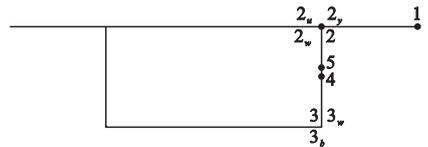


图7 计算点

Fig. 7 Calculation points

由箱梁的截面特性和正应力放大系数的计算表达式可知,正应力放大系数在计算点 $2_u, 2_w$ 和 $2_y$ 处相等,在计算点 $3_w$ 和 $3_b$ 处相等,故本文在对正应力的分析中仅列出计算点1,  $2_w$ 和 $3_b$ 的分布。

图8为两种工况下的正应力放大系数分布。从图8可以看出,在横截面上,正应力放大系数的峰值常出现在翼缘板端部。沿纵桥向,正应力放大系数的峰值在两种工况下均出现在中支点截面。按照双车道布载,正应力放大系数在工况1作用下最大为1.146,在工况2作用下最大为1.304。当按照三车道布载时,正应力放大系数在工况1作用下最大为1.077,在工况2作用下最大为1.161。

中跨跨中左截面各计算点的剪应力值列入表

1. 从表 1 可以看出,该截面二次剪应力和扭转剪应力的比值在计算点 4 处达到峰值,通过对其他截面的整理分析发现,其他截面上二次剪应力和扭转剪应力的比值也在计算点 4 处达到峰值。

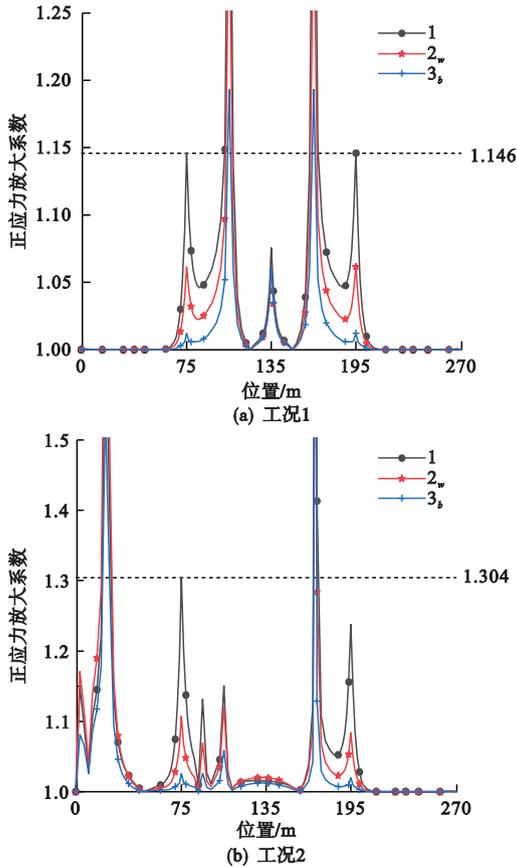


图 8 正应力放大系数分布(双车道)

Fig. 8 Normal stress amplification factor(two lanes)

表 1 中跨跨中左截面各计算点的剪应力值(工况 1)

Tab.1 Shear stress value of the calculated point of the middle left section of the middle span (case 1)

截面	计算点	$\tau_w /$ kPa	$\tau_z /$ kPa	$\tau_w / \tau_z /$ %
中跨跨中 左支点截面	2 <sub>u</sub>	53.22	142.34	37.39
	2 <sub>w</sub>	58.05	113.50	51.15
中跨跨中 左支点截面	3 <sub>b</sub>	88.18	177.30	49.73
	3 <sub>w</sub>	54.87	110.32	49.73
	4	119.08	174.53	68.23
	5	115.64	171.09	67.59

不同工况下,计算点 4 在支点截面、集中荷载作用截面和其余截面处的剪应力值列入表 2。从表 2 可以看出,计算点 4 处的二次剪应力与扭转剪应力的比值在支点截面上可达到 35.66%,在集中

荷载作用截面上可达到 68.23%,在其余截面上未超过 2.23%。

通过计算发现,计算点 3<sub>w</sub> 和计算点 3<sub>b</sub>、计算点 4 和计算点 5 的剪应力放大系数在同一横截面上较为接近,若对计算结果取两位小数则结果相等,而翼缘板上的扭转剪应力值较小,剪应力放大系数接近为 1,故本文在对剪应力放大系数的分析中仅列出计算点 2<sub>u</sub>, 2<sub>w</sub>, 4 和 3<sub>w</sub> 的分布。

表 2 计算点 4 处的剪应力组成(双车道)

Tab.2 Composition of shear stress at calculated points 4(two-lanes)

工况	截面位置	$\tau_w /$ kPa	$\tau_z /$ kPa	$\tau_w / \tau_z /$ %
1	中跨右支点左右截面	20.34	57.04	35.66
	中跨跨中左截面	119.08	174.53	68.23
	中跨 1/4 截面	3.93	176.01	2.23
2	中跨左支点左右截面	60.45	172.38	35.07
	Z=90 m 左截面	19.92	186.85	10.66
	中跨 3/4 截面	-0.64	-116.26	0.55

图 9 为两种工况下的剪应力放大系数分布。从图 9 可以看出,在同一截面上,剪应力放大系数在顶板上的值远大于底板和腹板上的值。沿纵桥向,截面上任一点的剪应力放大系数在中支点附近截面达到最大值。按照双车道布载时,剪应力放大系数在工况 1 作用下可达到 2.551,在工况 2 作用下可达到 2.667;按照三车道布载时,剪应力放大系数在工况 1 作用下可达到 1.822,在工况 2 作用下可达到 1.882。通过对图 9(a)和图 9(c),图 9(b)和图 9(d)的对比可以看出,两车道和三车道布载

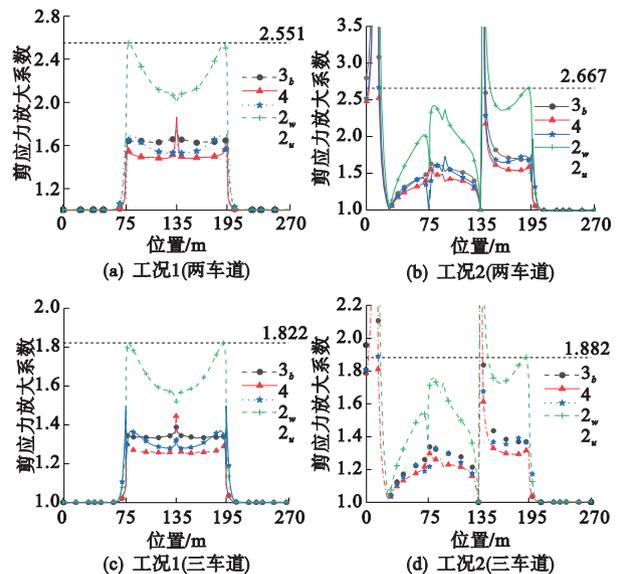


图 9 剪应力放大系数

Fig. 9 Shear stress amplification factor

时,同种工况下各计算点的应力放大系数沿纵桥向具有相同的变化趋势,仅在数值大小上存在差异。

从图 9(b)可以看出,横坐标靠近 0 m 和 135 m 处剪应力放大系数出现了骤增现象,结合图 10 可以发现,这是由于在该位置存在弯曲剪应力零点。对于图 8(a)横坐标靠近 105 m 和 165 m,图 8(b)横坐标靠近 20 m 和 170 m 处,正应力放大系数出现骤增也是由于在相应位置处存在弯曲正应力值零点。而在应力放大系数的分析中,应不考虑弯曲应力值零点截面及其附近截面,否则便会造成应力放大系数取值偏大。

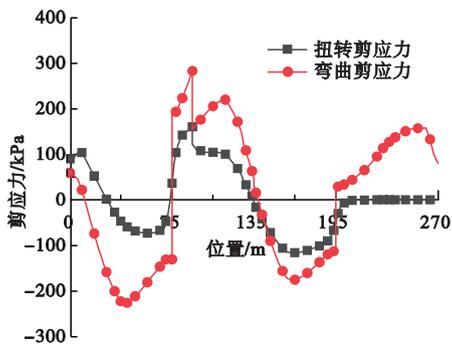


图 10 工况 2 下计算点  $2_w$  的剪应力分布(两车道)  
Fig. 10 Shear stress distribution at calculation point  $2_w$  on case 1 (two lanes)

## 7 结论

(1)三跨变截面连续箱梁桥在偏载作用下发生约束扭转时,支点截面和其他截面处的双力矩产生原因并不完全相同,中支点处的双力矩由其相邻两跨的跨间扭矩荷载贡献,其他截面处的双力矩主要由作用在该截面处的扭矩荷载贡献。

(2)在箱梁横截面上,约束扭转效应引起的二次剪应力与扭转剪应力的比值在腹板上(截面特性  $\bar{S}_w$  最小处)达到峰值,其比值在支点截面上可达到 35.66%,在集中荷载作用截面上可达到 68.23%,在其余截面上未超过 2.23%。

(3)在同一横截面上,正应力放大系数的峰值常出现在翼缘板端部,剪应力放大系数的峰值出现在顶板上。沿纵桥向,正应力放大系数和剪应力放大系数的峰值在本文两种工况下均出现在中支点截面。

(4)在考虑约束扭转效应引起的附加应力时,应对正应力和剪应力选用两个不同的应力放大系数,对于本文算例桥,正应力放大系数的取值范围为 1.077~1.304,剪应力放大系数的取值范围为 1.822~2.667。

## 参考文献(References):

- [1] Singh G J. Shear flow capacity of stiffened flanges in steel box girders[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, **185**(1):110575.
- [2] 马照伦,陈宝春,黄卿维,等. 30 m 预应力超高性能混凝土小箱梁优化设计[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2019, **47**(3):398-404. (MA Xi-lun, CHEN Bao-chun, HUANG Qing-wei, et al. Optimal design for a 30 m prestressed UHPC box girder[J]. *Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition)*, 2019, **47**(3):398-404. (in Chinese))
- [3] Liu J, Huang X Y, Chen J Y, et al. Effect of shear deformation at segmental joints on the short-term deflection of large-span cantilever cast prestressed concrete box girders[J]. *Buildings*, 2023, **13**(1):219.
- [4] 刘振伟,董鹏. 锚下控制应力对 PC 小箱梁裂缝发展的影响及控制方法研究[J]. 公路交通科技, 2022, **39**(08):16-24. (LIU Zhen-wei, DONG Peng. Study on influence of control stress under anchor on crack propagation of PC small box girder and control method[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2022, **39**(8):16-24. (in Chinese))
- [5] Li G, Fang Z Y, Mohammed A M, et al. Automated bridge crack detection based on improving encoder decoder network and strip pooling[J]. *Journal of Infrastructure Systems*, 2023, **29**(2):04023004.
- [6] 卫星,赵骏铭,肖林,等. 连续刚构桥施工过程中腹板裂缝检测与研究[J]. 铁道工程学报, 2019, **36**(7):38-43, 86. (WEI Xing, ZHAO Jun-ming, XIAO Lin, et al. Detection and analysis of web cracks in construction of continuous rigid frame bridge[J]. *Journal of Railway Engineering Society*, 2019, **36**(7):38-43, 86. (in Chinese))
- [7] 俞先林,叶见曙,吴文清. 大跨度预应力混凝土箱梁桥开裂病害[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, **43**(6):101-104. (YU Xian-lin, YE Jian-shu, WU Wen-qing. Cracking damage of long span prestressed concrete box girder bridges[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2011, **43**(6):101-104. (in Chinese))
- [8] 陈金义,廖伟华,李扬,等. 腹板钢束偏位对连续刚构箱梁的影响[J]. 公路, 2022, **67**(12):169-173. (CHEN Jin-yi, LIAO Wei-hua, Li Yang, et al. Analysis on the influence of web steel bundle deviation on continuous rigid frame box girder[J]. *Highway*, 2022, **67**(12):169-173. (in Chinese))
- [9] 尉浩浩,张元海. 变截面三跨连续箱梁桥活载作用下的约束扭转分析[J]. 公路交通科技, 2021, **38**(11):68-76. (WEI Hao-hao, ZHANG Yuan-hai. Analysis on restrained torsion of three-span continuous box girder bridge with variable section under live Load[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2021, **38**(11):68-76. (in Chinese))

- Chinese))
- [10] 梁永永,张元海.基于新型广义位移的箱形梁扭转单元及应用[J].计算力学学报,2023,40(1):119-125. (LIANG Yong-yong,ZHANG Yuan-hai. Torsion element and its applications of box girder based on a new generalized displacement [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(1): 119-125. (in Chinese))
- [11] 钟新谷,赵超,舒小娟,等.预应力混凝土箱梁桥偏心加载系数的数值分析与试验[J].湖南科技大学学报(自然科学版),2018,33(4):40-48. (ZHONG Xin-gu,ZHAO Chao,SHU Xiao-juan, et al. Numerical analysis and experimental study on eccentric-load coefficient of prestressed concrete box girder[J]. *Journal of Hunan University of Science & Technology (Natural Science Edition)*, 2018, 33(4): 40-48. (in Chinese))
- [12] 常诚.基于有限元法的现浇箱梁偏心增大系数计算[J].重庆大学学报,2020,43(5):84-92. (CHANG Cheng. Study on eccentric-loaded coefficients of cast-in-place box girder by solid FEM [J]. *Journal of Chongqing University*, 2020, 43(5): 84-92. (in Chinese))
- [13] 聂小沅,张国刚.混凝土连续宽箱梁桥横向偏载效应试验研究[J].中外公路,2017,37(4):130-134. (NIE Xiao-yuan,ZHANG Guo-gang. Experimental study on lateral eccentric load effect of concrete continuous wide box girder bridge[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2017, 37(4): 130-134. (in Chinese))
- [14] 郭金琼,房贞政,郑振.箱形梁设计理论[M].北京:人民交通出版社,2008. (GUO Jin-qiong, FANG Zhen-zheng, ZHENG zhen. *Design Theory of Box Girder* [M]. Beijing: China Communications Press, 2008. (in Chinese))
- [15] 杨浩,罗帅,邢国然,等.杆梁组合结构的有限元分析[J].工程力学,2019,36(s1):154-157,169. (YANG Hao,LUO Shuai,XIN Guo-ran, et al. Finite element analysis of bar and beam composite structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(s1): 154-157, 169. (in Chinese))
- [16] 吴鸿庆,任侠.结构有限元分析[M].北京:中国铁道出版社,2000. (WU Hong-qing,REN Xia. *Finite Element Analysis of Structure* [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2000. (in Chinese))
- [17] JTG D60-2015 公路桥涵设计通用规范[S].北京:人民交通出版社,2015. (JTG D60-2015 General Specifications for Design of Highway Bridges and Culverts[S]. Beijing: China Communications Press, 2015. (in Chinese))

## Analysis on restrained torsion of continuous box girder bridge with variable section under lane load

WEI Haohao<sup>\*1</sup>, ZHANG He<sup>1</sup>, HE Hao<sup>2</sup>, WANG Lei<sup>1</sup>, LIU Zhi<sup>1</sup>

(1. Powerchina Northwest Engineering Co., Ltd., Xi'an 710065, China;

2. Logistics Infrastructure Department, Lanzhou Vocational Technical College, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** In order to analyze the effect of the constrained torsion on the section stress of a box beam, based on the initial parametric solution of the restrained torsion differential equation of the box girder, the initial parametric analysis formula of free and secondary torques is derived. According to Umansky's Second Theory and the box girder element, the element stiffness matrix, calculation matrix of free torque and secondary torque and the equivalent node load column vector are derived by introducing the box girder element with torsion angle and generalized warping displacement as node displacements. The finite element program coded in Fortran Language is applied to analyze the constrained torsion effect of continuous box girder bridges with variable sections. The program is also used to calculate the internal force and displacement of a three-span continuous box girder bridge with variable sections under the most unfavorable bimoment loading mode. The results show that the ratio of the secondary shear stress to the torsional shear stress caused by the constrained torsion effect reaches its peak on the webs. It reaches 35.66% and 68.23% respectively on the fulcrum section and the concentrated load section while it is not more than 2.23% on the rest of sections. Along the longitudinal bridge, the peak values of the normal stress and shear stress amplification factor appear at the fulcrum section. For the bridge in this paper, the normal stress amplification factor ranges from 1.077 to 1.304 and the shear stress amplification factor from 1.822 to 2.667.

**Key words:** thin-walled box girder; restrained torsion; stiffness matrix; secondary shear stress; torsional shear stress; stress amplification factor

# 致谢审稿专家

2024年以来,许多专家为《计算力学学报》审阅了大量稿件,付出了辛勤的劳动。由于他们的工作,本刊的质量得以提高,读者、作者和编者均从中获益。在此,《计算力学学报》编委会谨向广大审稿专家致以诚挚的谢意!

《计算力学学报》编委会

2025年1月

## 审稿专家名单

(按姓氏拼音排序,截至2024年12月31日)

Guoxin Zhang	Mingjun Li	Shuilong	白海峰	白瑞祥	白瑜光	鲍四元	毕祥军
蔡建超	陈艾荣	陈斌	陈秉智	陈得良	陈定方	陈福振	陈海波
陈淮	陈黎	陈林聪	陈龙	陈伟杰	陈文炯	陈务军	陈衍茂
陈义保	陈志刚	陈子光	陈宗平	程长征	程时清	程先华	程玉民
程站起	崔洪宇	崔铁军	代胡亮	戴传山	戴华	单德山	邓华
邓英尔	丁睿	董雷霆	段忠东	凡凤仙	樊学平	费成巍	封建湖
冯殿垒	付朝江	傅卓佳	干湧	高丽敏	高乃平	高尚瞻	高效伟
高阳	顾水涛	顾鑫	顾兆林	郭君	郭力	郭秀秀	国凤林
韩非	韩啸	郝鹏	何雄君	何政	侯建国	侯淑娟	胡建辉
胡圣荣	胡志强	黄晨光	黄丹	黄洪钟	黄敏生	黄平	黄淑萍
黄章峰	季顺迎	贾祖朋	蹇开林	姜潮	姜金辉	姜云鹏	蒋建平
蒋水华	康厚军	康秀英	匡亚川	雷正保	黎胜	李本文	李顶河
李东升	李根	李庚英	李佳彬	李建宇	李杰	李杰(西北工大)	李金强
李静	李亮	李录贤	李锐	李淑华	李帅辉	李桐	李伟华
李翔宇	李学通	李宇航	李元齐	李宗利	李艳平	梁斌	梁正召
廖小伟	林长圣	林鹏	林鹏智	林炎海	蔺鹏臻	刘宝良	刘畅
刘传孝	刘合	刘济科	刘杰	刘巨	刘巨保	刘君	刘立武
刘明维	刘佩	刘斯宏	刘卫群	刘向军	刘学术	刘岩	刘义坤
刘永军	刘钊	刘忠玉	刘祖强	柳国环	龙凯	陆启韶	吕军
吕毅宁	罗阳军	罗永峰	马高	马怀发	马今伟	马连华	马新武
yumayue	茅德康	梅欢	梅宁	孟永钢	慕青松	倪新华	年廷凯
彭向和	彭一江	任鑫	邵国建	邵亚会	申志彬	申志彬	舒红宇
宋述芳	苏永华	孙得川	孙蓟泉	孙建桥	孙雷	孙鹏楠	孙其诚
孙仁	孙瑞	孙亚松	唐冶	唐智礼	陶干强	田荣	万征
王标	王丹生	王革	王浩	王嘉松	王建国	王奎华	王来贵
王连华	王生楠	王士召	王素襄	王天舒	王晓军	王鑫伟	王永亮
王云江	王振清	王正伟	王危银	魏凤英	魏静	魏培君	文颖
吴志强	吴智敏	武文华	武岳	夏凉	洗剑华	肖攀	肖映雄
谢明亮	谢兴华	徐斌	徐绯	徐劲力	徐军	徐丽	许飞云
闫再友	严刚	杨娜	杨庆生	杨秋伟	杨自豪	姚朝晖	姚建尧
姚卫星	姚文莉	易敏	阴存欣	尹涛	尹则高	于峰	于庆民
余昊	余岭	袁彩	袁礼	袁子峰	詹志新	张阿漫	张灿辉
张桂勇	张红平	张家忠	张金凤	张景新	张均富	张凯	张来平
张明	张奇志	张维声	张新军	张雄	张旭	张旭	张雪彪
张营	张永存	张玉军	张元海	张昭	张振宇	张忠强	张子明
赵闯	赵高峰	赵海盛	赵红华	赵均海	赵明皞	赵宁	赵维涛
赵岩	郑百林	郑文忠	郑勇刚	钟巍	钟新谷	周长东	周储伟
周华	周焕林	周乐平	周凌	周慎杰	周生田	周新刚	周跃亭
周震寰	周正华	朱继宏	庄心善	宗男夫	邹建锋	邹丽	左文杰