

DOI: 10.7511/jslx20230924001

# 串联型惯容系统多自由度结构地震响应分析

管涛<sup>1</sup>, 王善库<sup>1</sup>, 葛新广<sup>\*2</sup>, 王昌盛<sup>3</sup>

(1. 信阳职业技术学院 建筑工程学院, 信阳 464000; 2. 柳州工学院 土木建筑学院, 柳州 545004;  
3. 黄淮学院 建筑工程学院, 驻马店 463000)

**摘要:** 研究串联型惯容系统多自由度结构随机地震响应的简明封闭解, 分析了惯容系统参数及设置位置对结构减震性能的影响。首先, 根据串联型惯容系统力学构造图, 建立多自由度结构-惯容系统耦合地震动方程。其次, 运用二次式分解法推导出建筑结构节点相对于地面的绝对位移、层间节点位移及串联型惯容系统阻尼力等系列响应的0~2阶谱矩的简明封闭解。最后, 通过算例, 验证所提方法的正确性并研究了惯容系统参数及设置位置对结构减震性能的影响。研究表明, 串联型惯容系统对结构层间位移和顶层绝对位移的减震性能具有非一致性特点; 在层间位移较大的楼层设置惯容系统的布置策略是经济可行的。本文可为惯容系统实际工程应用提供参考。

**关键词:** 串联惯容系统; 简明封闭解; 二次式分解法; 参数分析; 阻尼器布置策略

**中图分类号:** TU 311.3; O 302

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2025)01-0130-09

## 1 引言

结构防震减灾是工程界面临的重要问题, 探寻经济有效的振动控制技术是解决该问题的重要途径<sup>[1]</sup>。惯容系统<sup>[2]</sup>是一种新型控制装置, 通过特定机械原理在不改变物理质量的情况下产生数千倍的惯容系数, 惯容系数越大惯容系统减震效果越显著, 具有良好的应用前景<sup>[3]</sup>。Nakamura等<sup>[4]</sup>提出一种质量泵装置, 通过试验验证了其对建筑结构具有良好的抑震作用, 相关学者<sup>[5]</sup>研究发现质量泵产生的惯性力与装置两端点的相对加速度成正比, 即端点惯性装置。Smith<sup>[6]</sup>通过力学与电学间的力-电流类比, 将端点惯性装置命名为 Inerter(惯容)。罗浩等<sup>[7]</sup>将黏滞单元与质量单元串联提出了一种惯容系统, 研究了其减震特性。刘志彬等<sup>[8]</sup>提出一种附加惯容器的控制装置, 研究后表明其具有良好的减震性能。

利用惯容系统进行建筑结构减震应用研究, 业已取得了一些有益成果。Lazar等<sup>[9]</sup>基于固定点理论并通过分析质量调质阻尼器(TMD)和调质惯容阻尼器(TID)的传递函数获得了 TID 的最优参

数。Hu等<sup>[10]</sup>基于固定点理论研究了惯容系统隔震结构的最优参数。以上优化分析采用固定点理论时忽略了结构的阻尼比, 而实际结构的阻尼对抑制地震贡献不能忽视。潘超等<sup>[11]</sup>研究了单自由度惯容系统过滤白噪声激励下响应分析的数值解法, 并探究了关键参数对减震效果的影响。李创第等<sup>[12]</sup>基于二次正交化法获得了单自由度惯容系统随机响应的简明封闭解, 并探究了惯容系数参数对减震效果的影响。上述研究针对单自由度体系开展研究, 而实际上高层结构采用多自由度模拟会更加精确, 因此有必要研究多自由度结构惯容系统的随机响应。

地震过程的随机性已为工程界的共识, 提出多种随机激励模型<sup>[13,14]</sup>。欧进萍等<sup>[14]</sup>提出一种随机地震动模型, 修正了金井清谱的不足。本文研究串联型惯容高层结构基于欧进萍平稳随机谱的结构及惯容阻尼器的响应封闭解, 探究惯容系统参数和楼层设置位置等因素对结构的减震性能。

## 2 结构-串联惯容系统耦合地震动方程

集中质量法常用来建立结构动力学方程, 当在

收稿日期: 2023-09-24; 修改稿收到日期: 2023-10-12.

基金项目: 河南省高等学校重点科研项目(22B560008)资助.

作者简介: 葛新广<sup>\*</sup>(1977-), 男, 博士, 副教授(E-mail: gxgzlr.2008@163.com).

引用本文: 管涛, 王善库, 葛新广, 等. 串联型惯容系统多自由度结构地震响应分析[J]. 计算力学学报, 2025, 42(1): 130-138.  
GUAN Tao, WANG Shan-ku, GE Xin-guang, et al. Seismic response of MDOF structures with series inerter dampers[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 130-138.

结构中设置惯容系统组成耗能体系,地震动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{F}_l = -\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{x}_g \quad (1)$$

式中  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  分别为集中质量相对于地面水平运动的位移、速度和加速度向量,其为  $n \times 1, n$  为集中质量水平自由度个数;  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  分别为质量、阻尼和刚度矩阵,均为  $n$  阶方阵;  $\mathbf{I}$  为集中质量的位置向量,是元素为 1 的  $n \times 1$  阶向量;  $\mathbf{G}$  为惯容系统位置矩阵,非零元素为 1 或 -1,其元素特点为,当在建筑结构的  $a, b$  节点设置编号为  $k$  的串联惯容系统,则  $G(b, k) = 1, G(a, k) = -1$ , 其为  $n \times L$  阶矩阵,  $L$  为惯容系统总个数;  $\mathbf{F}_l$  为惯容阻尼力向量,为  $L \times 1$  阶向量,表示为  $\mathbf{F}_l = [F_{l1}, F_{l2}, \dots, F_{lL}]^T$ ,  $F_{lk}$  为第  $k$  个惯容阻尼力;  $\ddot{x}_g$  为地面场地土的水平运动加速度。

动力学常通过有限元技术对结构建模,获得刚度矩阵和阻尼矩阵的等效形式。由于设置阻尼器的体量相对于整个建筑结构而言较小,工程上常将原结构按实模态进行解耦,便于获得等效动力学参数。根据实模态振型解耦法,结构位移可表示为

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{q}$  为实模态广义向量,其为  $N \times 1$  阶矩阵,  $N$  为实模态振型数;  $\boldsymbol{\varphi}$  为实模态振型,为  $n \times N$  阶矩阵。

把式(2)代入式(1),利用实模态解耦法可获得式(1)的等效形式,

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\xi\boldsymbol{\omega}_0\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}_0^2\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}\mathbf{F}_l = \boldsymbol{\mu}\mathbf{M}\mathbf{I}\ddot{x}_g \quad (3)$$

式中  $\boldsymbol{\omega}_0 = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$ ,  $\omega_i$  为结构第  $i$  阶自振圆频率;  $\xi$  为结构阻尼比,  $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi})^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T$ ,  $\mathbf{T}$  为矩阵转置运算。

串联型惯容系统构造<sup>[3]</sup>如图 1 所示,关系式为

$$F_{lk} = k_{dk}x_{dk,1} = c_{dk}\dot{x}_{dk,2} = m_{ink}\ddot{x}_{dk,3} \quad (L \geq k \geq 1) \quad (4a)$$

$$x_{dk,1} + x_{dk,2} + x_{dk,3} = x_b - x_a \quad (n \geq a, b \geq 1) \quad (4b)$$

式中  $m_{ink}, c_{dk}$  和  $k_{dk}$  分别为编号为  $k$  的惯容系统惯容系数、阻尼系数和刚度系数;  $x_{dk,1}, x_{dk,2}, x_{dk,3}$  分别为惯容系统的弹簧、阻尼、惯容元件两端的相对位移;  $x_l (l = a, b)$  为第  $l$  节点相对于地面的位移。

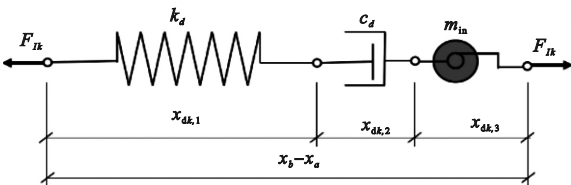


图 1 串联惯容系统构造图

Fig. 1 Mechanics diagram of series inerter damper (SID)

动力荷载激励下,结构位移、惯容系统阻尼力及其组件两端的相对位移都是时间  $t$  的函数,将式(4)中运动参量对时间求导,

$$\ddot{x}_{dk,1} = k_{dk}^{-1} \ddot{F}_{lk}; \ddot{x}_{dk,2} = c_{dk}^{-1} \dot{F}_{lk}; \ddot{x}_{dk,3} = m_{ink}^{-1} F_{lk} \quad (5)$$

式中  $\ddot{x}_{dk,1}, \ddot{x}_{dk,2}, \ddot{x}_{dk,3}$  分别为  $x_{dk,1}, x_{dk,2}, x_{dk,3}$  对时间  $t$  的二阶导数;  $\dot{F}_{lk}, \ddot{F}_{lk}$  分别为  $F_{lk}$  对时间  $t$  的一阶和二阶导数。

把式(5)代入式(4),建立惯容系统阻尼力与结构位移的关系式,

$$k_{dk}^{-1} \ddot{F}_{lk} + c_{dk}^{-1} \dot{F}_{lk} + m_{ink}^{-1} F_{lk} = x_b - x_a \quad (6)$$

将所有惯容系统阻尼力以矩阵形式表示为

$$\mathbf{K}_{in} \ddot{\mathbf{F}}_l + \mathbf{C}_{in} \dot{\mathbf{F}}_l + \mathbf{M}_{in} \mathbf{F}_l = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\varphi} \ddot{\mathbf{q}} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{K}_{in} = \text{diag}(k_{d1}^{-1}, \dots, k_{dL}^{-1}), \mathbf{C}_{in} = \text{diag}(c_{d1}^{-1}, \dots, c_{dL}^{-1})$$

$$\mathbf{M}_{in} = \text{diag}(m_{in1}^{-1}, \dots, m_{inL}^{-1}).$$

由式(7)与式(3),结构-串联惯容系统耦合地震动方程,

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{X}}} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\bar{\mathbf{X}}} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\alpha} \ddot{x}_g \quad (8)$$

式中

$$\bar{\mathbf{X}} = [\mathbf{q}^T, \mathbf{F}_l^T]^T \quad (9)$$

$$\text{式中 } \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{o}_1 \\ -\mathbf{G}^T \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{K}_{in} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2\xi\boldsymbol{\omega}_0 & \mathbf{o}_1 \\ \mathbf{o}_1^T & \mathbf{C}_{in} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0^2 & \boldsymbol{\mu}\mathbf{G} \\ \mathbf{o}_1^T & \mathbf{M}_{in} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\mu}\mathbf{M}\mathbf{I} \\ \mathbf{o}_2 \end{matrix} \right\}; \mathbf{E}_1 \text{ 为 } N \text{ 阶单位方阵;}$$

$\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2$  均为 0 元素矩阵,其中  $\mathbf{o}_1$  为  $N \times L$  阶矩阵,  $\mathbf{o}_2$  为  $L \times 1$  阶矩阵。

### 3 耗能系统基于欧进萍谱的系列响应封闭解

为获得耗能体系相对于地面位移、惯容系统阻尼力等系列响应的封闭解,引入状态变量,对式(8)进行重构

$$\tilde{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \ddot{x}_g \quad (10)$$

$$\text{式中 } \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{M}} \\ \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{o}_3 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \mathbf{o}_3 \\ \mathbf{o}_3 & -\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \dot{\bar{\mathbf{X}}} \end{Bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{\alpha}} =$$

$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{o}_4 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{o}_3$  和  $\mathbf{o}_4$  均为 0 元素矩阵,其中  $\mathbf{o}_3$  为  $(N+L)$  阶方阵;  $\mathbf{o}_4$  为  $(N+L) \times 1$  阶矩阵。

#### 3.1 系列响应统一形式频域解

由复模态理论<sup>[15-16]</sup>,存在对角阵  $\mathbf{P}$  和左右特

征向量  $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{U}$  使方程(10)复模态解耦。引入复模态变换

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{z} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{z}$  为复模态广义参数。

根据复模态理论<sup>[15-16]</sup>,式(10)存在解耦式

$$\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{P}\mathbf{z} = \boldsymbol{\eta}\ddot{\mathbf{x}}_g \quad (12)$$

式中  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}} / (\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U})$ , 是  $s$  个元素的列向量,  $s = 2 \times (N+L)$ 。

式(12)的分式形式为

$$\dot{z}_i + p_i z_i = \eta_i \ddot{x}_g \quad (13)$$

式中  $z_i, \eta_i, p_i$  分别为  $\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P}$  的分量。

由虚拟激励法<sup>[16]</sup>,式(13)的频域解为

$$z_i(\omega) = \frac{\eta_i}{p_i + j\omega} \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{j\omega t} \quad (14)$$

式中  $z_i(\omega)$  为  $z_i$  的频域解,  $j = \sqrt{-1}$ 。

由式(9)和(14),惯容系统阻尼力  $F_{lk}$  的频域解为

$$F_{lk}(\omega) = \sum_{i=1}^s u_{N+k,i} z_i(\omega) \quad (k=1 \sim L) \quad (15)$$

式中  $F_{lk}(\omega)$  为  $F_{lk}$  的频域解,  $u_{l,i}$  为右特征向量矩阵  $\mathbf{U}$  的第  $l$  行第  $i$  列元素,  $u_{k+N,i}$  为惯容阻尼器阻尼力的模态强度系数。

由式(2,9,14)及实模态解耦法,结构节点  $k$  的位移  $x_k$  和速度  $\dot{x}_k$  的频域解为

$$x_k(\omega) = \sum_{i=1}^s \lambda_{k,i} z_i(\omega) \quad (16a)$$

$$\dot{x}_k(\omega) = \sum_{i=1}^s \bar{\lambda}_{k,l} z_i(\omega) \quad (16b)$$

式中  $x_k(\omega), \dot{x}_k(\omega)$  为  $x_k, \dot{x}_k$  的频域解;  $\lambda_{k,i} = \sum_{l=1}^N \varphi_{k,l} u_{l,i}, \bar{\lambda}_{k,l} = \sum_{i=1}^N \varphi_{k,i} u_{l+s/2,i}$ , 分别为节点位移和速度的模态强度系数;  $\varphi_{k,l}$  为结构实模态振型  $\boldsymbol{\phi}$  的第  $k$  行第  $l$  列元素。

相邻楼层间的位移差为结构的层间位移,对于实际结构取竖向结构相邻楼层的节点位移之差。设第  $k$  层某构件的上下端的节点位移分别为  $x_{k,a}$  和  $x_{k,b}$ ,则层间位移及变化率表示为

$$\Delta x_k(\omega) = x_{k,b}(\omega) - x_{k,a}(\omega) = \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_{k,i} z_i(\omega) \quad (17a)$$

$$\Delta \dot{x}_k(\omega) = \dot{x}_{k,b}(\omega) - \dot{x}_{k,a}(\omega) = \sum_{i=1}^s \hat{\lambda}_{k,i} z_i(\omega) \quad (17b)$$

式中

$$\hat{\lambda}_{k,i} = \sum_{l=1}^N (\phi_{kb,l} - \phi_{ka,l}) u_{l,i}$$

$$\hat{\lambda}_{k,l} = \sum_{i=1}^N (\phi_{kb,i} - \phi_{ka,i}) u_{l+s/2,i}$$

式中  $\Delta x_k(\omega), \Delta \dot{x}_k(\omega)$  为第  $k$  层某构件的层间位移及变化率的频域解;  $\hat{\lambda}_{k,i}, \bar{\lambda}_{k,l}$  分别为层间位移及其变化率的模态强度系数;  $\phi_{ka,l}, \phi_{kb,l}$  分别第  $k$  层某构件的上下端节点的结构实模态振型。

由式(15~17)可知,惯容系统阻尼力、结构位移及其变化率、层间位移及其变化率可统一表示为

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^s \gamma_i z_i(\omega) \quad (18)$$

式中  $\gamma_i$  为响应量  $X$  第  $i$  个模态强度系数。

### 3.2 基于欧进萍平稳谱下系列响应 0-2 阶谱矩和方差的封闭解

由虚拟激励法<sup>[17]</sup>,  $X$  功率谱  $S_X(\omega)$  为

$$S_X(\omega) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^s \gamma_i \gamma_i z_k(\omega) z_i^*(\omega) \quad (19)$$

式中  $z_i^*(\omega)$  是  $z_i(\omega)$  的共轭项。

把式(18)代入式(19),基于功率谱二次式分解法,式(18)简化为

$$S_X(\omega) = \left[ \sum_{k=1}^s \frac{\gamma_k^2 \eta_k^2}{p_k^2 + \omega^2} + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{i=k+1}^s \frac{\gamma_k \gamma_i \eta_i \eta_k}{p_i + p_k} \times \left( \frac{2p_i}{p_i^2 + \omega^2} + \frac{2p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right) \right] S_{\ddot{x}_g}(\omega) \quad (20)$$

地震动采用欧进萍谱,其功率谱表示为<sup>[14]</sup>

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4\omega_g^2 \xi_g^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_g^2)^2 + 4\omega_g^2 \xi_g^2 \omega^2} \frac{\omega_h^2}{\omega^2 + \omega_h^2} \quad (21)$$

式(20)二次分解式为

$$S_{\ddot{x}_g}(\omega) = S_0 \frac{D^2}{\omega^2 + D^2} \frac{\omega_h^2}{\omega^2 + \omega_h^2} \sum_{m=1}^2 \frac{c_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \quad (22)$$

式中  $\omega_{g,1}^2 = (2\xi_g^2 - 1)\omega_g^2 - 2\omega_g^2 \xi_g \sqrt{\xi_g^2 - 1}$ ,

$$\omega_{g,2}^2 = \text{conj}(\omega_{g,1}^2), c_{g,1} = \frac{\omega_g^4 - 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega_{g,1}^2}{\omega_{g,2}^2 - \omega_{g,1}^2},$$

$c_{g,2} = \text{conj}(c_{g,1})$ , 其中  $\xi_g, \omega_g, \omega_h$  为欧进萍平稳随机激励模型的定参数。

把式(22)代入式(20),耗能系统系列响应功率谱密度函数的二次分解式为

$$S_X(\omega) = \sum_{i=1}^s \gamma_i^2 \eta_i^2 A_i(\omega) + 2 \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=i+1}^s \frac{\gamma_k \gamma_i \eta_i \eta_k}{p_k + p_i} [p_i A_i(\omega) + p_k A_k(\omega)] \quad (23)$$

式中

$$A_i(\omega) = S_0 \frac{1}{p_i^2 + \omega^2} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{c_{g,m}}{\omega^2 + \omega_{g,m}^2} \frac{d_k}{\omega^2 + \omega_{f,k}^2}$$

$$d_1 = \frac{D^2 \omega_h^2}{\omega_h^2 - D^2}, \omega_{f,1} = D, d_2 = -d_1; \omega_{f,2} = \omega_h.$$

基于 Vanmarke 的动力可靠度计算<sup>[18]</sup>是工程

结构动力安全分析的重要方法,其需要计算响应量的0阶、1阶和2阶谱矩。随机理论可知,响应的0阶谱矩等于其方差,响应的2阶谱矩是其变化率的方差,为此可通过谱矩分析获得结构随机地震动响应上述设计量。由谱矩定义,则响应的 $q$ 阶谱矩为

$$\alpha_{X,q} = 2 \int_0^{\infty} \omega^q S_X(\omega) d\omega \quad (q=0,1) \quad (24)$$

把式(23)代入式(24),利用二次式在 $[0, +\infty]$ 上积分有解析解,可获得响应量0-1阶谱矩的封闭解,

$$\alpha_{X,q} = \sum_{i=1}^s \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{i,q} + 2 \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=i+1}^s \frac{\gamma_k \gamma_i \eta_i \eta_k}{p_k + p_i} \times (p_i C_{i,q} + p_k C_{k,q}) \quad (q=0,1) \quad (25)$$

式中

$$C_{i,q} = S_0 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \frac{d_k c_{g,m}}{\omega_{f,n}^2 - \omega_{g,m}^2} (\rho_{gmi,q} - \rho_{fni,q}) \quad (26)$$

式中  $\rho_{ami,0} = \pi[\omega_{a,m} p_i (\omega_{a,m} + p_i)]^{-1}$ ,  $\rho_{ami,1} = (p_i^2 - \omega_{a,m}^2)^{-1} (\ln p_i^2 - \ln \omega_{a,m}^2)$  ( $a=g, f$ )

由于式(18)的 $X$ 可表示结构节点运动的速度,故由式(25)可计算结构速度的0阶谱矩,即为结构节点运动的2阶谱矩。

至此,获得了响应量的0-2阶谱矩和方差。

### 4 算例

钢筋混凝土框架结构,柱尺寸:1~5层 $0.8\text{ m} \times 0.8\text{ m}$ ,6-10层 $0.6\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ ,11-16层 $0.4\text{ m} \times 0.4\text{ m}$ ;梁尺寸为 $0.3\text{ m} \times 0.7\text{ m}$ 。梁板柱采用C30混凝土,梁的刚度考虑楼板作用取2.0倍梁截面计算刚度。结构竖向荷载由结构自重、楼板厚 $0.1\text{ m}$ 自重按 $2.5\text{ kN/m}^2$ 计、楼板铺装重 $1.0\text{ kN/m}^2$ 及活荷载 $2.0\text{ kN/m}^2$ 组成,按集中质量法进行动力分析,荷载从属宽度为 $6.0\text{ m}$ ,恒载系数1.0,活载系数0.5。框架结构采用瑞雷阻尼模型,阻尼比为0.05。利用MIDAS Civil有限元软件建模,图2为有限元模型,图中数字为节点编号;通过特征值分析后获得框架结构实模态振型、自振圆频率及节点集中质量等动力参数。欧进萍谱地震动参数为 $\omega_g = 15.71\text{ rad/s}$ , $\xi_g = 0.8$ , $\omega_h = 8\pi\text{ rad/s}$ , $S_0 = 166.22 \times 10^4\text{ m}^2/\text{s}^3$ 。

#### 4.1 系列响应封闭解的验证

利用虚拟激励法<sup>[16,17]</sup>对本文提出的封闭解进行验证。惯容系统在结构中的布置如图3所示,参数 $k_d = 2.4 \times 10^9\text{ N/m}$ , $c_d = 7.1 \times 10^8\text{ N} \cdot \text{s/m}$ , $m_{in} = 2.1 \times 10^8\text{ kg}$ 。利用虚拟激励法计算结构系列

响应方差的计算精度和效率受积分区间取值和积分间距的影响。经试算,积分上限为 $10^3\text{ rad/s}$ ,可满足精度, $\Delta\omega$ 为3个工况,即 $\Delta\omega = 1.0\text{ rad/s}$ , $0.25\text{ rad/s}$ 和 $0.01\text{ rad/s}$ 。图4~图7给出了结构位移0-2阶谱矩和惯容系统阻尼力0阶谱矩对比。

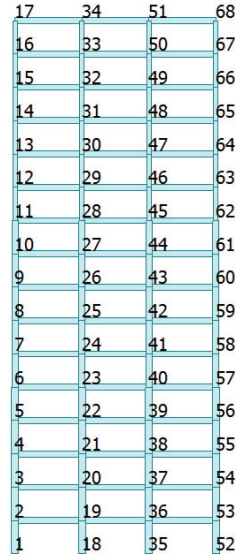


图2 有限元模型  
Fig.2 Finite element model

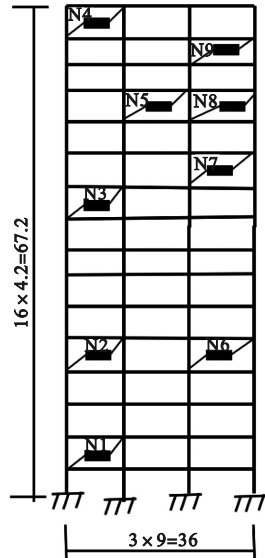


图3 惯容系统布置  
Fig.3 Layout of SIDs in structure

由图4~图7可知,随着数值积分步长 $\Delta\omega$ 取值的变小,虚拟激励法计算结果逼近本文方法,从而说明所提封闭解的正确性。由图4~图6可知,同一楼层处建筑结构各节点处位移的0-2阶谱矩基本相同,说明本算例建筑结构楼板平面内刚度可认为是无限大。由图7可知,设置在2层串联型惯容阻尼器阻尼力的0阶谱矩最大,说明设置在2层的惯容系统的地震动响应最突出;比较N5与N8,



N2 与 N6 两者阻尼力的 0 阶谱矩相同,说明同一楼层处惯容系统阻尼力相同。

### 4.2 串联型惯容系统参数对减震效果分析

对于多自由度结构,第 1 振型常起控制作用,为此,本文以第 1 振型动力学参数为基础,研究串联型惯容系统参数的最优值。令  $m_{in} = u_m m_0$ ;  $k_d = u_m m_0 u_\omega^2 \omega_0^2$ ;  $c_d = 2u_m u_\omega u_\xi m_0 \xi_0 \omega_0$ , 其中  $u_m, u_\omega, u_\xi$  分别为  $m_{in}, \omega_{in}, \xi_{in}$  与  $m_0, \omega_0, \xi_0$  的比值;  $m_0,$

$\omega_0, \xi_0$  分别为结构节点质量之和、第 1 振型圆频率和阻尼比;  $\omega_{in} = \sqrt{k_d/m_{in}}$ ;  $\xi_{in} = c_d/(2 m_{in} \omega_{in})$ 。

对无控结构进行分析,发现第 11 层层间位移最大,结构顶层超限。为此,惯容系统设置在第 11 层,并以 11 层的层间位移和结构顶层绝对位移为目标函数,研究惯容系统最优参数。参数取值范围为  $\mu_m = 5 \sim 100, \Delta\mu_m = 5$ ;  $\mu_\omega = 0.4 \sim 3.0, \Delta\mu_\omega = 0.1$ ;  $\mu_\xi = 1 \sim 20, \Delta\mu_\xi = 1$ 。图 8~图 13 给出三参数对 11 层层间位移和结构顶层绝对位移的影响云图。

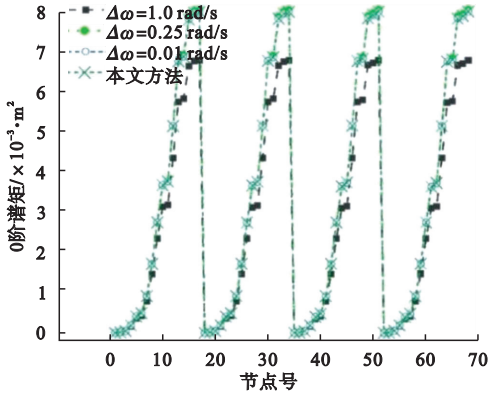


图 4 结构位移 0 阶谱矩

Fig. 4 0-order spectral moment of structural displacement

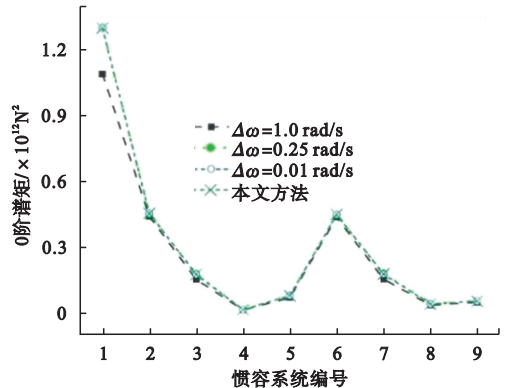


图 7 惯容系统阻尼力 0 阶谱矩

Fig. 7 0-order spectral moment of force of SID

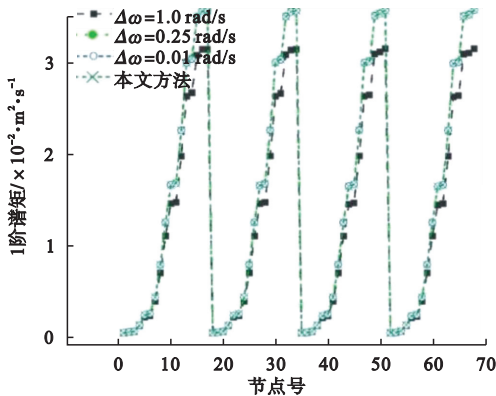


图 5 结构位移 1 阶谱矩

Fig. 5 1-order spectral moment of structural displacement

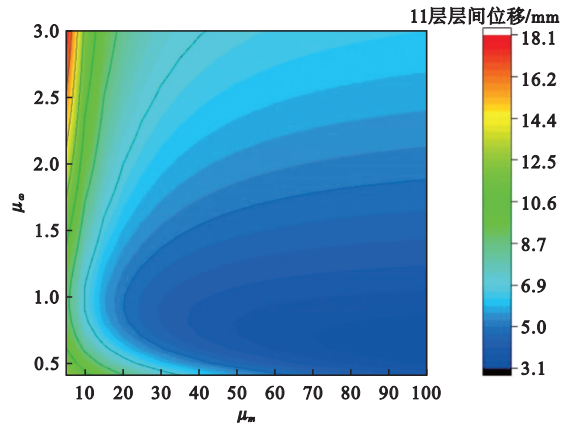


图 8 第 11 层层间位移与  $\mu_\omega$  和  $\mu_m$  的关系云图

Fig. 8 Effect on interlayer displacement of 11<sup>th</sup> floor by  $\mu_\omega, \mu_m$

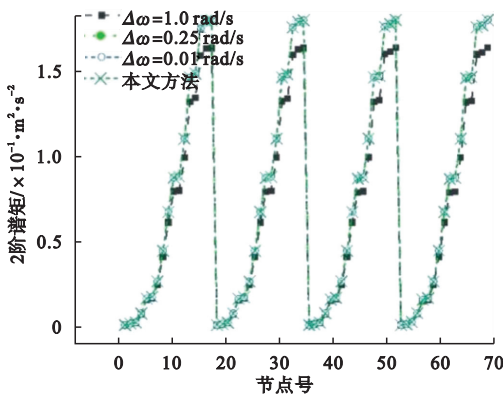


图 6 结构位移 2 阶谱矩

Fig. 6 2-order spectral moment of structural displacement

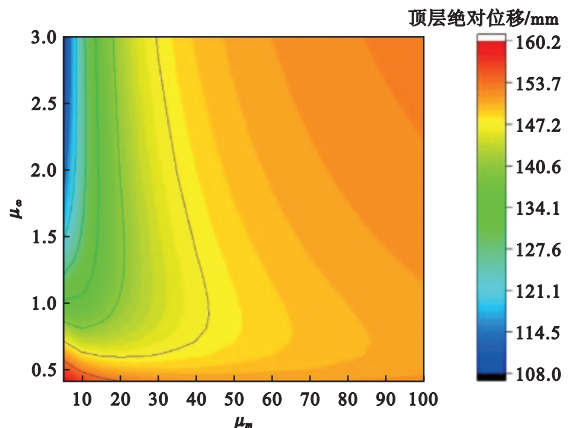


图 9 顶层绝对位移与  $\mu_\omega$  和  $\mu_m$  的关系云图

Fig. 9 Effect on absolute displacement of structure by  $\mu_\omega, \mu_m$

由图 8 可知,  $\mu_\omega$  一定时,  $\mu_m$  越大第 11 层的层间位移越小, 减震效果越显著;  $\mu_\omega$  最优值随着  $\mu_m$  增大而减小; 第 11 层层间位移最大值是最小值 6.1 倍, 最小值发生在  $\mu_m = 100$ ,  $\mu_\omega = 0.6$  时。由图 9 可知, 顶层位移最大值是最小值的 1.5 倍, 最小值发生在  $\mu_m = 5$ ,  $\mu_\omega = 3.0$  时。

由图 10 可知,  $\mu_m$  一定时,  $\mu_\omega$  越小或  $\mu_\xi$  越大, 第 11 层的层间位移越小, 减震效果越显著; 11 层层间位移的最大值是最小值 3.0 倍, 最小值发生在  $\mu_\xi = 5$ ,  $\mu_\omega = 0.8$  时。由图 11 可知, 结构顶层位移最大值是最小值的 1.15 倍, 最小值发生在  $\mu_\xi = 5$ ,  $\mu_\omega = 0.4$  时。

由图 12 可知,  $\mu_\xi$  一定时,  $\mu_m$  越大第 11 层的层间位移越小, 减震效果越显著。第 11 层层间位移的最大值是最小值 4.7 倍, 最小值发生在  $\mu_m = 100$ ,  $\mu_\xi = 5$  时。由图 13 可知, 结构顶层位移最大值是最小值的 1.2 倍, 最小值发生在  $\mu_m = 70$ ,  $\mu_\xi = 1$  时。

与图 13, 第 11 层层间位移和结构顶层位移的最小值对应的惯容系统参数是不一致的。

### 4.3 惯容系统设置楼层位置对减震效果的分析

工程上利用惯容系统对结构减震, 通常将惯容系统设置在建筑楼层间来实现。为此, 研究设置楼层位置对惯容系统减震效果的影响, 对于有效提高惯容系统工程减震性能具有重要作用。惯容系统参数取值为  $k_d = 2.4 \times 10^9$  N/m,  $c_d = 7.1 \times 10^8$  N \* s/m,  $m_{in} = 2.1 \times 10^8$  kg。图 14 和图 15 分别为惯容系统设置位置对层间位移和楼层绝对位移的影响。

由图 14 可知, 惯容系统对所在楼层的层间位移抑制特别显著, 对相邻 2 层的层间位移也有一定抑制作用, 其他楼层层间位移影响较小。从图 15 可知, 惯容系统设置在 1~4 层时会减小全部楼层绝对位移, 而设置在 4 层以上时, 仅 4 层以上楼层绝对位移有影响。因此, 对于高层结构要降低层间和绝对位移需要在多层设置惯容系统。

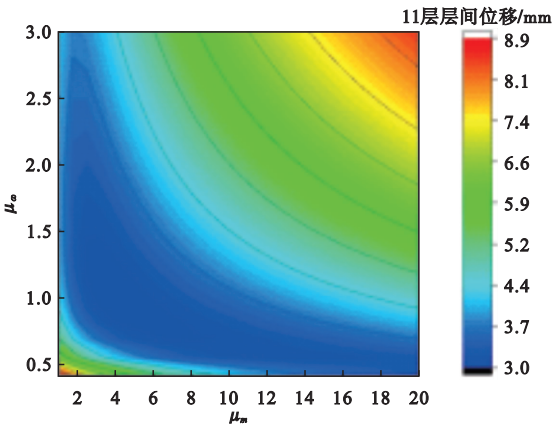


图 10 第 11 层层间位移与  $\mu_\omega$  和  $\mu_m$  的关系云图

Fig. 10 Effect on interlayer displacement of 11<sup>th</sup> floor by  $\mu_\omega$ ,  $\mu_m$

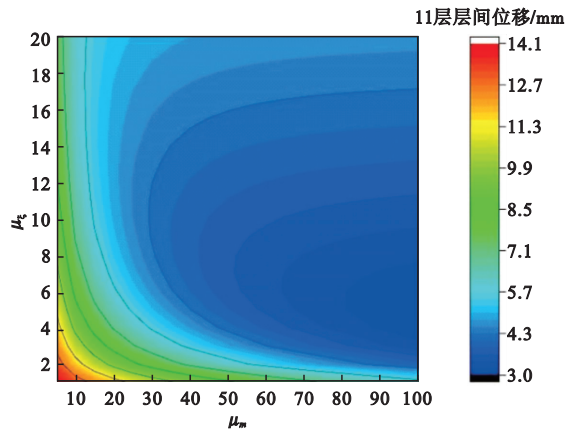


图 12 第 11 层层间位移与  $\mu_\xi$ ,  $\mu_m$  的关系云图

Fig. 12 Effect on interlayer displacement of 11<sup>th</sup> floor by  $\mu_\xi$ ,  $\mu_m$

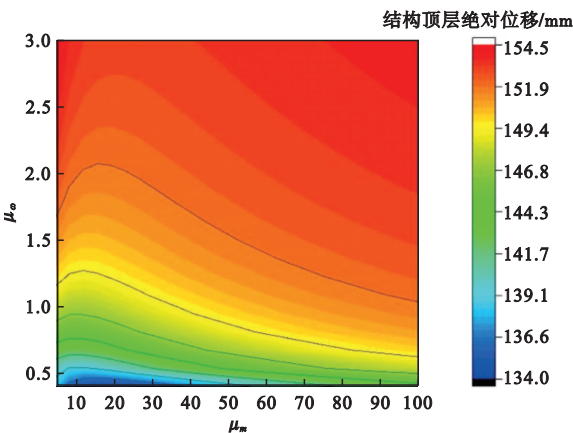


图 11 顶层绝对位移与  $\mu_\omega$ ,  $\mu_\xi$  的关系云图

Fig. 11 Effect on absolute displacement of structure by  $\mu_\omega$ ,  $\mu_\xi$

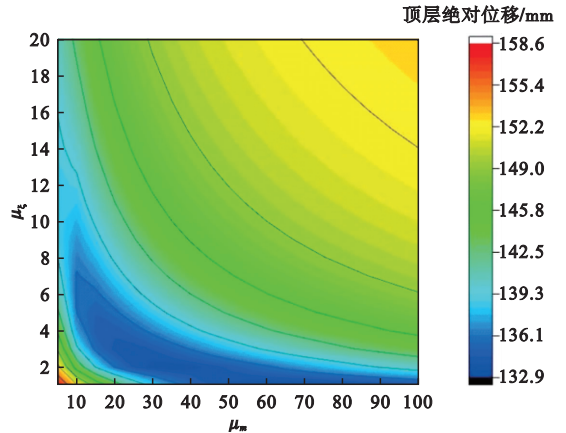


图 13 顶层绝对位移与  $\mu_\xi$  和  $\mu_m$  的关系云图

Fig. 13 Effect on absolute displacement of structure by  $\mu_\xi$ ,  $\mu_m$

分别对比图 9 与图 10、图 11 与图 12 和图 12

为获得更有效的减震效果, 在结构第 3~13 层

的奇数层设置惯容系统,耗能结构层间位移和原结构层间位移对比如图 16 所示。

由图 16 可知,在结构层间位移较大的楼层处隔一层设置惯容系统可有效降低层间位移并使其满足规范要求。

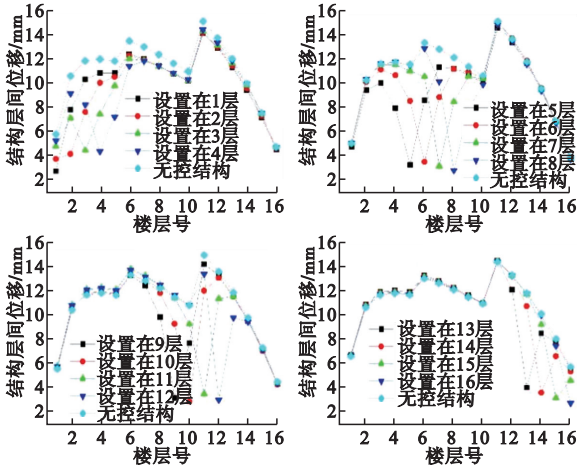


图 14 层间位移与惯容系统设置位置关系  
Fig. 14 Effect on interlayer displacement by setting position of SID

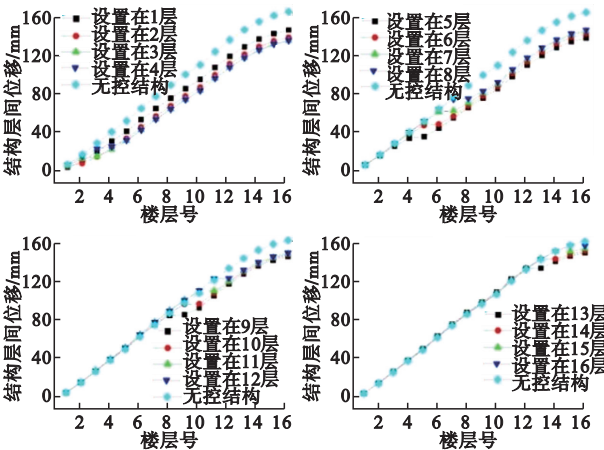


图 15 顶层绝对位移与惯容系统设置位置关系  
Fig. 15 Effect on absolute displacement by setting position of SID

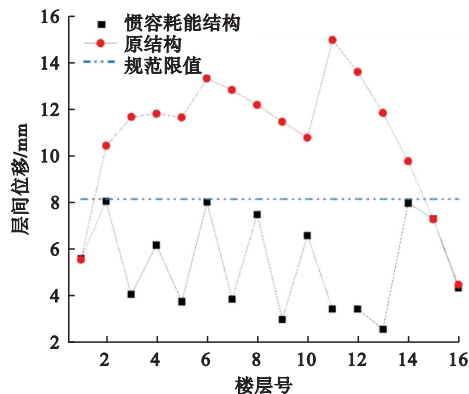


图 16 原结构与耗能结构层间位移对比

Fig. 16 Interlayer displacement of bare structure and structure with SIDs

## 5 结论

本文对设置串联型惯容系统的建筑结构基于欧进萍平稳谱激励下的结构位移、层间位移及惯容系统阻尼力的封闭解进行了研究,取得如下结论。

(1) 串联型惯容系统的  $m_{in}$ ,  $k_d$  和  $c_d$  对层间位移和结构顶层位移最优减震性能不具有一致性,即两者不能同时达到最优值。

(2) 串联型惯容系统对所在楼层及其相邻层具有显著影响而对其他层则影响较小。在无控结构层间位移较大的楼层及隔层设置惯容系统可有效降低结构震动响应,是一种经济可行的阻尼器布置策略。

## 参考文献(References):

[1] 孙永,王宪杰,秦云,等. 随机激励下考虑 SSI 效应的 TMD-结构控制参数优化设计[J]. 计算力学学报, 2019, **36**(1): 71-76. (SUN Yong, WANG Xian-jie, QIN Yun, et al. Optimal design of control parameters of TMD-structures with SSI effect under stochastic excitation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2019, **36**(1): 71-76. (in Chinese))

[2] 温华兵,张坤,刘伟,等. 惯容-橡胶复合隔振器动力学建模及参数识别[J]. 振动、测试与诊断, 2022, **42**(4): 644-648, 821. (WEN Hua-bing, ZHANG Kun, LIU Wei, et al. Dynamic mechanical modeling and parameter identification of inerter-rubber vibration isolator[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2022, **42**(4): 644-648, 821. (in Chinese))

[3] Zhang R F, Zhao Z P, Pan C, et al. Damping enhancement principle of inerter system[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020, **27**(5): e2523.

[4] Nakamura Y, Hiroyuki W, Kawamata S. Seismic response control of structures by accelerated liquid mass damper [A]. *Proceedings of 9th World Conference on Earthquake Engineering*, 1988.

[5] Arakaki T, Kuroda H, Arima F, et al. Development of seismic devices applied to ball screw: Part 2 performance test and evaluation of rd-series[J]. *AIJ Journal of Technology and Design*, 1999, **5**(9): 265-270.

[6] Smith M C. Synthesis of mechanical networks: The inerter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1648-1662.

[7] 罗浩,张瑞甫,翁大根,等. 一种旋转黏滞质量阻尼器

- 对结构响应的控制研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2016, **36**(2):295-301,308. (LUO Hao, ZHANG Rui-fu, WENG Da-gen, et al. Study of a series viscous mass damper in the control of structural response[J]. *Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering*, 2016, **36**(2):295-301,308. (in Chinese))
- [8] 刘志彬, 谭平, 王菁菁, 等. 新型非对称惯容 NES 减震控制性能研究[J]. 振动与冲击, 2023, **42**(2):116-125. (LIU Zhi-bin, TAN Ping, WANG Jing-jing, et al. Performance analysis of a novel asymmetric inerter NES for seismic response mitigation[J]. *Journal of Vibration and Shock* 2023, **42**(2):116-125. (in Chinese))
- [9] Lazar I F, Neild S A, Wagg D J. Using an inerter-based device for structural vibration suppression[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2014, **43**(8):1129-1147.
- [10] Hu Y L, Chen M Z Q, Shu Z, et al. Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, **346**:17-36.
- [11] 潘超, 张瑞甫, 王超, 等. 单自由度混联 II 型惯容减震体系的随机地震响应与参数设计[J]. 工程力学, 2019, **36**(1):129-137,145. (PAN Chao, ZHANG Rui-fu, WANG Chao, et al. Stochastic seismic response and design of structural system with series-parallel-II inerter system[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(1):129-137,145. (in Chinese))
- [12] 李剑第, 江丽富, 王瑞勃, 等. 单自由度混联 II 型惯容系统随机地震动响应分析[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(3):260-271. (LI Chuang-di, JIANG Li-fu, WANG Rui-bo, et al. Responses of SDOF structures with SPIS-II dampers under random seismic excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(3):260-271. (In Chinese))
- [13] 李鸿晶, 陈辰. 一种平稳地震地面运动的改进金井清谱模型[J]. 工程力学, 2014, **31**(2):158-163. (LI Hong-jing, CHEN Chen. A modified Kanai-Tajimi spectral model for the stationary earthquake induced ground motion process[J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(2):158-163. (in Chinese))
- [14] 欧进萍, 牛荻涛, 杜修力. 设计用随机地震动的模型及其参数确定[J]. 地震工程与工程振动, 1991, **11**(3):45-54. (Ou Jin-ping, Niu Di-tao, Du Xiu-li. Random earthquake ground motion model and its parameter determination used in aseismic design[J]. *Seismic Engineering and Engineering Vibration*, 1991, **11**(3):45-54. (in Chinese))
- [15] Ge X G, Azim I, Li C D, et al. Seismic responses of structure with six-element generalized model viscoelastic dampers[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2023, **164**:107610.
- [16] 葛新广, 龚景海, 李剑第, 等. 功率谱二次正交化法在随机地震动响应的应用[J]. 振动工程学报, 2022, **35**(3):616-624. (GE Xin-guang, GONG Jing-hai, LI Chuang-di, et al. Application of quadratic orthogonalization method of response power spectrum to random ground motion response[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2022, **35**(3):616-624. (In Chinese))
- [17] 林家浩, 张亚辉, 赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1):1-32. (LIN Jia-hao, ZHANG Ya-hui, ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1):1-32. (in Chinese))
- [18] 邓学晶, 林倩, 元玉成, 等. 平稳随机激励下耦合 Newmark 滑移系统的可靠性分析[J]. 计算力学学报, 2014, **31**(5):578-583. (DENG Xue-jing, LIN Qian, QI Yu-cheng, et al. Dynamic reliability analysis of the coupled Newmark sliding system under stationary random excitation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2014, **31**(5):578-583. (in Chinese))
- [19] 李佳霖, 张有为, 张维声, 等. 考虑平稳随机响应的显式结构拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2023, **40**(4):505-513. (LI Jia-lin, ZHANG You-wei, ZHANG Wei-sheng, et al. Explicit structural topology optimization considering structural stationary random responses[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(4):505-513. (in Chinese))



## Seismic response of MDOF structures with series inerter dampers

GUAN Tao<sup>1</sup>, WANG Shan-ku<sup>1</sup>, GE Xin-guang<sup>\*2</sup>, WANG Chang-sheng<sup>3</sup>

(1. College of Architectural Engineering, Xinyang Vocational and Technical College, Xinyang 464000, China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Liuzhou Institute of Technology, Liuzhou 545004, China;

3. School of Architectural Engineering, Huanghuai University, Zhumadian 463000, China)

**Abstract:** Concise closed-form solutions for random seismic responses of MDOF structures with Series Inerter Dampers (SID) were studied, and the effects of parameters and setting floor positions of SIDs on the seismic performance of building structures were analyzed. Firstly, the coupled seismic dynamic equations of a MDOF structure and a SID are established. Secondly, the quadratic decomposition method is used to derive a concise closed-form solution for the 0~2 order spectral moments of the absolute displacement of the structural nodes relative to the ground, interlayer displacement, and force of the SID. Finally, through an example, the correctness of the proposed solution was verified and the characteristics of the parameters of SID and the setting positions on the seismic performance of structures were studied. The result has shown that the influence of the SID on the interlayer displacement and absolute displacement of the top floor of structures is non-consistent; and the damper-setting strategy is economically feasible to set up a SID on floors with significant inter story displacement. The paper can provide a reference for the practical engineering application of inerter dampers.

**Key words:** series inerter damper; concise closed-form solution; quadratic decomposition method; parameter analysis; damper setting strategy

(上接第 121 页)

## Deflection calculation of new corrugated steel web composite box girder considering shear deformation

CAI Ming-hao<sup>1</sup>, LIU Shi-zhong<sup>\*1</sup>, WANG Zhi-kun<sup>2</sup>, ZHANG Jian-gong<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. CR21 Group Electric and Electrification Engineering Co., Ltd., Lanzhou 730030, China;

3. China 17 Metallurgical Group Limited Beijing Engineering Design Branch Company, Beijing 102218, China)

**Abstract:** In order to obtain a simple and efficient method for deflection calculation of a new type of corrugated steel web composite box girders at high accuracy, the effect of shear deformation of the whole cross-section is considered. Based on the analysis of the distribution characteristics of shear stress on the wall of the box girder, its deflection is divided into the Euler beam theoretical deflection and an additional deflection considering the shear deformation of the full section by using the principle of virtual work and the shear form factor considering the effect of full section. Based on the variational energy principle, the expression of the additional deflection of the full section is established. The scale model of the composite box girder with a new type of corrugated steel web was made, the concentrated load and uniform load tests were carried out, and the finite element model of the composite girder was established by ANSYS finite element software for comparative analysis. The correctness of the theoretical formula is verified by the experimental results and the finite element calculation results. The parameter analysis shows that the shear deformation has a greater effect on the deflection of the composite box girder with corrugated steel web than that of the composite girder wing plate. The shear additional deflection of the wing plate decreases with the increase of the height-span ratio, but it is always smaller than that of the corrugated steel web plate. The additional shear deflection of corrugated steel web decreases with the decrease of width span ratio. When the width span ratio is less than 0.2, the influence of shear deformation of corrugated steel web can be ignored.

**Key words:** bridge engineering; composite box girder with corrugate steel webs; shear additional deflection; virtual work principle; shear form factor