

DOI: 10.7511/jslx20230828001

加筋折叠壳静力弯曲的移动最小二乘无网格法

陈卫¹, 彭林欣^{*2,3}

(1. 南华大学 土木工程学院, 衡阳 421001; 2. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004;

3. 广西大学 广西防灾减灾与工程安全重点实验室 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁 530004)

摘要: 可展结构体系中的折板结构凭借高刚度-重量比、易拼接成型等特点, 已广泛应用于实际结构工程中。相比折板而言, 折壳具有几何形状多变、外观优美等特点。此外, 加筋板壳结构中的筋条可以采用基于欧拉-伯努利梁(EBT)和铁木辛柯梁(TBT)理论框架下的计算方法。然而, 当筋条跨高比达到一定限度时, EBT和TBT则不再满足工程精度需求。本文通过将筋条视为基于3D连续壳理论的长条形板或曲板, 提出一种求解加筋折叠壳静力弯曲问题的移动最小二乘无网格法。首先, 基于3D连续壳理论, 通过映射技术将随动坐标系上的二维无网格节点信息映射到三维壳体中, 采用移动最小二乘近似对曲面几何及位移场拟合, 根据最小势能原理, 推导出壳静力弯曲的离散方程; 其次, 采用完全转换法对离散方程进行修正; 将经过修正后各壳的刚度矩阵和载荷列阵转换到整体坐标系上; 最后, 通过子结构法叠加得到整个加筋折叠壳结构的离散方程。通过折板壳、加筋板、加筋壳四个数值算例, 将本文计算结果与ABAQUS有限元解进行对比, 验证了本文方法计算加筋折叠壳静力弯曲的收敛性及准确性。

关键词: 3D连续壳理论; 移动最小二乘近似; 加筋壳; 折壳; 静力弯曲

中图分类号: O342 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2025)01-0106-09

1 引言

加筋折叠板壳结构因具备高刚度-重量比等优点, 而广泛应用于航空、船舶、建筑等工程领域中, 如三角形屋盖、船体、机翼等。加筋折叠板壳结构卓越的特性和广泛的应用引起了研究人员的极大兴趣, 研究者们采用有限元法、有限条分法、等几何等数值方法对其静力弯曲、自由振动、屈曲和非线性等^[1-7]力学行为进行了分析, 以期为加筋折叠板壳结构提供一定的设计依据。

无网格法作为已发展二十余年的数值方法, 其形函数是基于节点构造, 不依赖于网格, 易构造任意高阶光滑近似, 这赋予了无网格法在板壳计算领域一种天然优势。如形函数易满足 C^1 连续性, 可避免剪切锁死、体积锁和膜锁等。Noguchi等^[8]基于3D连续壳理论, 建立了求解壳线性弯曲移动最小二乘MLS(moving-least square)近似的无网格模型。该模型采用罚函数法处理本质边界条件, 通

过几个经典板壳数值算例, 讨论了该方法在分析板壳线性弯曲问题时的剪切锁死、体积锁和膜锁问题, 并探讨了其收敛性及计算精度问题。陈卫等^[9]基于同样的理论和MLS近似, 利用完全转换法处理本质边界条件, 求解了壳线性弯曲和自由振动问题。上述研究表明, 该方法比有限元具有更快的收敛速度, 并有着计算精度高等特点。

无网格法研究折板壳问题目前主要集中在基于Reissner Mindlin板理论框架下, Liew等^[10-12]利用MLS近似的无网格法对折板的线性弯曲、自由振动、屈曲等问题进行了研究。Barbieri等^[13]基于von Kármán大挠度理论, 采用再生核RK(Reproducing kernels)近似的无网格法, 对含缺陷板/折板几何非线性进行了求解。Tanaka等^[14]采用RK近似的无网格法对含裂纹的折板结构进行了数值分析。Sadamoto等^[15]基于3D连续壳理论和全拉格朗日法, 采用RK近似的无网格法对折板柱壳进行了几何非线性分析。

收稿日期: 2023-08-28; 修改稿收到日期: 2023-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金(12162004; 11562001); 南华大学博士科研启动基金(Y00043-13)资助项目.

作者简介: 彭林欣*(1977-), 男, 博士, 教授, 博士生导师(E-mail: penglx@gxu.edu.cn).

引用本文: 陈卫, 彭林欣. 加筋折叠壳静力弯曲的移动最小二乘无网格法[J]. 计算力学学报, 2025, 42(1): 106-114.

CHEN Wei, PENG Lin-xin. Moving least squares meshless method for static bending of reinforced folded shells[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 106-114.

目前,对加筋板壳较为普遍的一种做法就是将板壳和筋条分开考虑,用基于铁摩辛柯梁理论 TBT(Timoshenko beam theory)的梁来模拟筋条,再将板壳和筋条组成整体的加筋板壳。基于这种比较精确的模型,Peng 等^[16-19]采用移动最小二乘近似的无网格法对直肋条加筋板的各项力学性能进行了大量的研究。相比有限元商业分析软件,当筋条位置改变时,这种方法无需重新划分网格,只需重新计算位移协调矩阵即可,且不会扩大刚度矩阵。此后,Tamijani 等^[20,21]同样基于 TBT 理论,发展了曲线筋条,采用无网格法完成了曲线加筋板壳静力弯曲、自由振动、屈曲研究。刘璟泽等^[22]基于离散 Kirchhoff-Mindlin 三角形单元完成了曲线加筋板的自由振动分析。另外有一种方法是采用基于 Reissner Mindlin 板理论的叶片式板来模拟直线筋条,如 Sadamoto 等^[23]采用 RK 粒子近似的无网格法研究了加筋板的屈曲问题;Hasim 等^[24]基于 RZT(Refined zig-zag)理论,利用等几何方法建立加筋层合板的线性弯曲计算模型。Ozdemir 等^[25]采用基于 3D 连续壳理论的曲壳来模拟筋条,建立了直线加筋柱壳、曲线加筋板壳 RK 近似的屈曲无网格模型,将数值结果与文献解和 ANSYS 解对比,证明了该方法求解加筋壳屈曲的准确性。

由此可见,无网格法在加筋折叠板方面的研究已有大量成果,在加筋折叠壳方面的分析较少。本文基于 3D 连续壳理论和移动最小二乘近似,根据最小势能原理推导出单个壳体静力弯曲的离散方程,再将修正后的离散方程叠加,得到整个加筋折叠壳静力弯曲的离散方程。文末算例通过将本文解和 ABAQUS 有限元解进行对比,检验了本文方法的有效性及其准确性。

2 壳线性弯曲分析

2.1 几何模型

如图 1 所示,所有任意曲面的节点在两个坐标系上具有一对一的对应关系。 $\mathbf{X}=(x, y, z)$ 和 $\mathbf{r}=(r_1, r_2, r_3)$ 分别为笛卡尔坐标系和随动坐标系中的位置矢量。 \mathbf{e}_i 是笛卡尔坐标系中正交单位矢量, \mathbf{V}_i 是壳中面某一点的正交单位矢量。根据 Reissner Mindlin 板壳理论,壳上任意一点的位置及位移矢量参数分别为

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{mid}} + \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_3(r_1, r_2) \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{mid}} + \frac{r_3}{2} h (-\theta_1 \mathbf{V}_2 + \theta_2 \mathbf{V}_1) \quad (2)$$

式中 \mathbf{X}_{mid} 和 \mathbf{u}_{mid} (u, v, w) 分别是壳中面的点在笛

卡尔坐标系中的位置矢量和位移; h 为厚度, r_1, r_2 和 r_3 分别为壳中面内和厚度方向的参数; θ_1 和 θ_2 分别为绕壳中面正交矢量 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 的转角; \mathbf{V}_3 是垂直壳中面的单位法向矢量, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ 的关系为

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_3 \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{V}_3 \times \mathbf{e}_1|}, \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3 \quad (3)$$

2.2 移动最小二乘近似

根据移动最小二乘近似^[26]可得壳在随动坐标系上第 I 个离散节点的形函数为

$$\mathbf{N}_I(r_1, r_2) = \mathbf{q}^T(r_1, r_2) \mathbf{B}^{-1}(r_1, r_2) \cdot \mathbf{q}(r_{1I}, r_{2I}) \bar{\omega}(r_1 - r_{1I}, r_2 - r_{2I}) \quad (4)$$

式中 $\mathbf{B}(r_1, r_2) = \sum_{I=1}^n \bar{\omega}(r_1 - r_{1I}, r_2 - r_{2I}) \mathbf{q}(r_{1I}, r_{2I}) \cdot \mathbf{q}^T(r_1, r_2)$; $\mathbf{q}^T(r_1, r_2) = [1, r_1, r_2, r_1^2, r_1 r_2, r_2^2]$ 为二维空间二次单项式基函数; n 为离散点的个数; $\bar{\omega}$ 为权函数,本文取三次样条权函数。

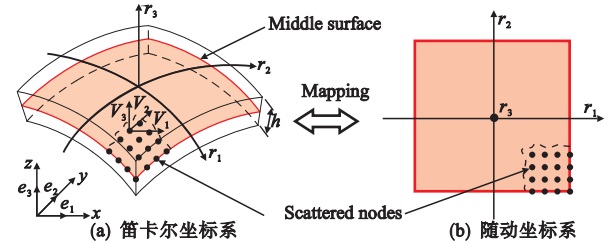


图 1 壳的几何模型及映射技术

Fig. 1 Meshless geometric model of the curved shell and mapping technique

2.3 雅克比

利用式(4)逼近式(1,2),则有

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \left(\mathbf{X}_{\text{mid } I} + \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_3 \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \left[\mathbf{u}_{\text{mid } I} + \frac{r_3}{2} h (-\theta_{1I} \mathbf{V}_2 + \theta_{2I} \mathbf{V}_1) \right] \quad (6)$$

式(5,6)改写成矩阵形式分别为

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \begin{bmatrix} x_I + h/2 r_3 V_{3(1)} \\ y_I + h/2 r_3 V_{3(2)} \\ z_I + h/2 r_3 V_{3(3)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{h}{2} r_3 N_I V_{2(1)} & \frac{h}{2} r_3 N_I V_{1(1)} \\ -\frac{h}{2} r_3 N_I V_{2(2)} & \frac{h}{2} r_3 N_I V_{1(2)} \\ -\frac{h}{2} r_3 N_I V_{2(3)} & \frac{h}{2} r_3 N_I V_{1(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \\ \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n N_I U_I \quad (8)$$

式中 $\mathbf{U}_I = [u_I, v_I, w_I, \theta_{1I}, \theta_{2I}]^T$ 是壳中面上第 I 个节点的节点参数, n 是壳中面无网格离散节点个数。

将式(6)的位置矢量对随动坐标系 r_i 求偏导, 可得到协变基矢量 $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{X}(\mathbf{r}) / \partial r_i (i = 1, 2, 3)$, 展开有

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{r})}{\partial r_i} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial N_I(r_1, r_2)}{\partial r_i} \left(\mathbf{X}_{\text{mid}I} + \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{3I} \right) \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{r})}{\partial r_3} = \sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \frac{1}{2} h \mathbf{V}_{3I} \quad (9)$$

整理式(9), 可得雅克比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1^T \\ \mathbf{g}_2^T \\ \mathbf{g}_3^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r_1} & \frac{\partial y}{\partial r_1} & \frac{\partial z}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x}{\partial r_2} & \frac{\partial y}{\partial r_2} & \frac{\partial z}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x}{\partial r_3} & \frac{\partial y}{\partial r_3} & \frac{\partial z}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.4 应变-位移关系

根据移动最小二乘近似^[26], 壳中面上任意一点的向量 \mathbf{V}_i 可表示为

$$\mathbf{V}_i = \frac{\sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \mathbf{V}_{iI}}{\left| \sum_{I=1}^n N_I(r_1, r_2) \mathbf{V}_{iI} \right|} \quad (i = 2, 3, \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)$$

(11)

式中 \mathbf{V}_{iI} 为第 I 个节点的 V_i 矢量

将式(8)对随动坐标系 r_i 求偏导, 可得

当 $j = 1, 2$ 时,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial r_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial r_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \end{Bmatrix} + \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} -\frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{2(1)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} - \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{2(1)}}{\partial r_j} N_I \\ -\frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{2(2)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} - \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{2(2)}}{\partial r_j} N_I \\ -\frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{2(3)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} - \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{2(3)}}{\partial r_j} N_I \\ \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{1(1)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} + \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{1(1)}}{\partial r_j} N_I \\ \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{1(2)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} + \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{1(2)}}{\partial r_j} N_I \\ \frac{r_3}{2} h \mathbf{V}_{1(3)} \frac{\partial N_I}{\partial r_j} + \frac{r_3}{2} h \frac{\partial \mathbf{V}_{1(3)}}{\partial r_j} N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n [\alpha_{j1} \quad \alpha_{j2} \quad \alpha_{j3}] \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \end{Bmatrix} + \sum_{I=1}^n [b_{1i,j} \quad b_{2i,j}] \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

当 $j = 3$ 时

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_3} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{2(1)} N_I & -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{1(1)} N_I \\ -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{2(2)} N_I & -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{1(2)} N_I \\ -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{2(3)} N_I & -\frac{1}{2} h \mathbf{V}_{1(3)} N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n [c_{1i} \quad c_{2i}] \begin{Bmatrix} \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中 $\partial \mathbf{V}_i / \partial r_j$ 可由式(14)导出

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial r_j} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_i) \Delta \mathbf{V}_{ij} \\ \Delta \mathbf{V}_{ij} = \frac{\sum_{I=1}^n (\partial N_I / \partial r_j) \mathbf{V}_{iI}}{\left| \sum_{I=1}^n N_I \mathbf{V}_{iI} \right|} \quad (i = 2, 3, j = 1, 2) \end{cases} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial r_j} = \frac{\partial \mathbf{V}_2}{\partial r_j} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_2 \times \frac{\partial \mathbf{V}_3}{\partial r_j} \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

式中 \mathbf{I} 为 3×3 单位矩阵。

小位移分析应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \mathbf{J}_{ij}^{-1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \mathbf{J}_{ji}^{-1} \right) \quad (16)$$

将式(10, 12, 13)和代入式(16)可得到应变张量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{Bmatrix} N_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3} \\ N_{,2} & N_{,1} & 0 \\ 0 & N_{,3} & N_{,2} \\ N_{,3} & 0 & N_{,1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{1,1}^1 & G_{1,1}^2 \\ G_{2,2}^1 & G_{2,2}^2 \\ G_{3,3}^1 & G_{3,3}^2 \\ G_{1,2}^1 + G_{2,1}^1 & G_{1,2}^2 + G_{2,1}^2 \\ G_{2,3}^1 + G_{3,2}^1 & G_{2,3}^2 + G_{3,2}^2 \\ G_{1,3}^1 + G_{3,1}^1 & G_{1,3}^2 + G_{3,1}^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \\ \theta_{1I} \\ \theta_{2I} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{U}_I \quad (17)$$

式中 $N_{,i} = \mathbf{J}_{i1}^{-1} \frac{\partial N}{\partial r_1} + \mathbf{J}_{i2}^{-1} \frac{\partial N}{\partial r_2}$, $G_{i,j}^k = \mathbf{b}_{ki,1} \mathbf{J}_{j1}^{-1} + \mathbf{b}_{ki,2} \mathbf{J}_{j2}^{-1} + \mathbf{c}_{ki} \mathbf{J}_{j3}^{-1}$, \mathbf{J}_{ij}^{-1} 中的 (i, j) 表示雅克比的逆中元素所在的行和列。

2.5 应力-应变关系

根据虚功原理, 将定义在随动坐标系上的应力-应变关系转换到笛卡尔坐标系中, 则有

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{T}_\varepsilon^T \mathbf{D}' \mathbf{T}_\varepsilon) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 \\ 2l_1l_2 & 2m_1m_2 & 2n_1n_2 \\ 2l_2l_3 & 2m_2m_3 & 2n_2n_3 \\ 2l_3l_1 & 2m_3m_1 & 2n_3n_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{1-\nu}{2K_s} & 0 \\ & & & & \frac{1-\nu}{2K_s} \end{bmatrix}$$

式中 l_i, m_i, n_i 分别为局部正交单位矢量 $\mathbf{V}_i (i=1, 2, 3)$ 的三个分量, $K_s=6/5$ 为剪切修正因子。

2.6 离散方程

壳在径向均布荷载作用下的能量泛函为

$$\Pi_B = \frac{1}{2} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx dy dz - \iint q w dx dy \quad (19)$$

式中 q 为径向均布荷载。

将位移场公式(8)代入式(19),并结合应力-应变方程式(18),可得

$$\Pi_B = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U} \mathbf{F} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I dV = \int_V \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I |\mathbf{J}| dr_1 dr_2 dr_3 \quad (21)$$

$$\mathbf{F} = \iint N_I q |\mathbf{J}'| \frac{1}{V_{3(3)}} dr^1 dr^2 \quad (22)$$

式中 \mathbf{J}' 取雅克比 \mathbf{J} 的前两行两列。

根据最小势能原理,由 $\Pi_B=0$,可得壳线性弯曲离散方程为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (23)$$

3 加筋折叠壳线性弯曲分析

为了得到整个折/加筋壳刚度矩阵。如图2和图3所示的两折壳及加筋壳,将每个壳、筋条各自

视为一个大的单元,通过两个大单元连接处的重合节点具有相同的真实节点位移协调条件,将两个大单元的刚度矩阵和载荷列阵进行叠加。

由于基于移动最小二乘近似的无网格法,式(4)得到的形函数不满足克罗内克条件,式(23)得到的是节点参数,而并非是节点真实位移,所以各大单元的刚度矩阵和载荷列阵不能直接叠加。本文引入Chen等^[27]提出的完全转换法修正其离散方程,具体过程详见文献[11,12],修正后的表达式为

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (24)$$

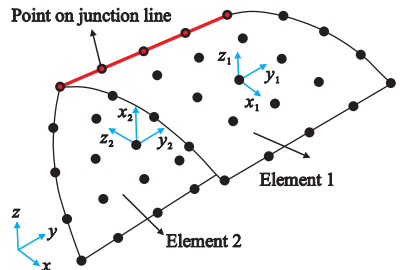


图2 折壳无网格模型(包括两个柱壳大单元)

Fig. 2 A meshless model of a folded shell that is made up of two big cylindrical shell elements

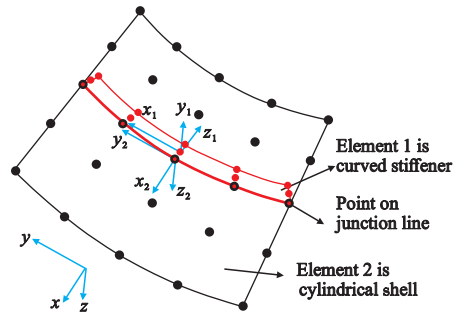


图3 曲线加筋无网格模型(包括一个柱壳和一个曲肋两个大单元)

Fig. 3 A meshless model of a stiffened shell including two large elements and a cylindrical shell and a curved rib

3.1 坐标转换

式(24)修正后的刚度方程是基于局部坐标系构建的(这里各个壳体所属的笛卡尔坐标系归为局部坐标系),叠加前,需变换到整体坐标系中去。

通过追加一个转动自由度 θ_3 并变换,可得到整体坐标系下单个壳的刚度矩阵、载荷列阵分别为

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}_g \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T}_g^T, \mathbf{F} = \mathbf{T}_g \bar{\mathbf{F}} \quad (25)$$

式中 \mathbf{T}_g 为 $6n \times 6n$ 坐标变换矩阵^[11-12]。

3.2 子结构法

如图2和图3中的两个折/加筋壳的交界线上有 $1 \sim J$ 共 J 个重合的节点,即有

$$U_b^1 = U_b^2 \quad (26)$$

式中 $U_b^1 = [\tilde{u}_1^1, \tilde{v}_1^1, \tilde{w}_1^1, \tilde{\theta}_{11}^1, \tilde{\theta}_{21}^1, \tilde{\theta}_{31}^1, \dots, \tilde{u}_j^1, \tilde{v}_j^1, \tilde{w}_j^1, \tilde{\theta}_{1j}^1, \tilde{\theta}_{2j}^1, \tilde{\theta}_{3j}^1]^T$ 是单元 1 在交界线上的真实节点位移;同理, U_b^2 是单元 2 在交界线上相应重合点的真实节点位移,表达式类上。通过矩阵初等变换,可得两个单元离散方程为

$$\begin{bmatrix} k_{ii}^1 & k_{ib}^1 \\ k_{bi}^1 & k_{bb}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_b^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i^1 \\ F_b^1 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} k_{ii}^2 & k_{ib}^2 \\ k_{bi}^2 & k_{bb}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^2 \\ U_b^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i^2 \\ F_b^2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

式中 U_i^1, U_i^2 分别表示 1 单元和 2 单元非交界线的真实节点位移,将式(27-28)进行叠加有

$$\begin{bmatrix} k_{ii}^1 & k_{ib}^1 & 0 \\ k_{bi}^1 & k_{bb}^1 + k_{bb}^2 & k_{bi}^2 \\ 0 & k_{ib}^2 & k_{ii}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_b^1 \\ U_i^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i^1 \\ F_b^1 \\ F_i^2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

则可得到加筋折叠壳线性变形的最终离散方程

$$KU = F \quad (30)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} k_{ii}^1 & k_{ib}^1 & 0 \\ k_{bi}^1 & k_{bb}^1 + k_{bb}^2 & k_{bi}^2 \\ 0 & k_{ib}^2 & k_{ii}^2 \end{bmatrix}, U = \begin{Bmatrix} U_i^1 \\ U_b^1 \\ U_i^2 \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} F_i^1 \\ F_b^1 \\ F_i^2 \end{Bmatrix}$$

由于追加的转动自由度 θ_3 , 会使得刚度矩阵主对角线上出现零元素,致使求解式(30)产生奇异性,本文将刚度矩阵主对角线对应转动自由度 θ_3 元素置 1 进行处理。

4 数值算例

本文所有算例均采用背景网格积分,高斯点数为 $3 \times 3 \times 2$,影响域为方形,如无特别说明,取影响域大小 $d_{\max} = 3$ 。ABAQUS 商业软件分析时采用八节点壳单元(S8R),单个板壳节点个数为 6721,直/曲筋条节点个数为 1621。

4.1 两折板壳

悬臂两折板及折柱壳如图 4 所示。几何参数 $a = b = 1 \text{ m}, h = 0.1 \text{ m}, R = 1 \text{ m}$ 。材料参数 $E = 70 \times 10^9 \text{ Pa}, \nu = 0.3$,每个折板/柱壳表面均承受径向均布载荷 $q = 1000 \text{ Pa}$ 。图 5 和图 6 分别给出了不同节点离散数目下,板 A 或者柱壳 A 沿着 $y = 0.5 \text{ m}$ 线上挠度值。从图 5 和图 6 可知,当节点数为 5×5 和 7×7 时,板 A 和柱壳 A 可获得比较理想的数值结果;随着节点数增多,数值结果越来越

逼近 ABAQUS 有限元解,说明本方法求解折板壳线性弯曲具有良好的收敛性。

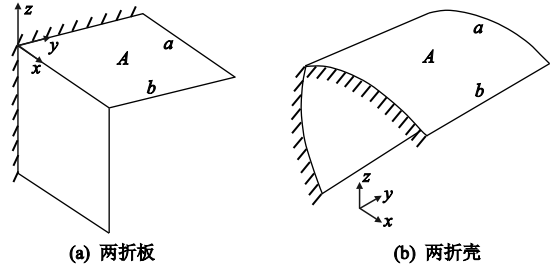


图 4 悬臂两折板壳

Fig. 4 A cantilevered two folded plate and shell

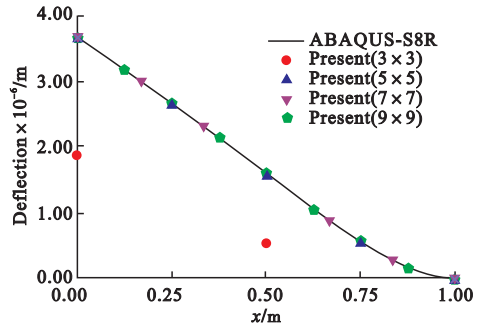


图 5 板 A 沿着 $y = 0.5 \text{ m}$ 线上的挠度

Fig. 5 Deflection along $y = 0.5 \text{ m}$ of plate A

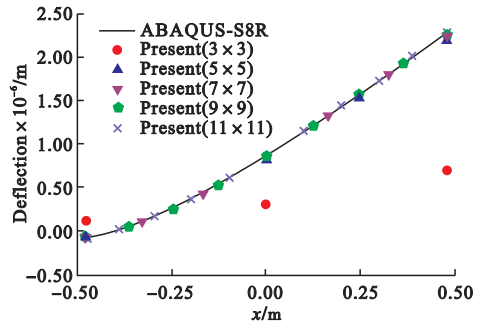


图 6 柱壳 A 沿着 $y = 0.5 \text{ m}$ 线上的挠度

Fig. 6 Deflection along $y = 0.5 \text{ m}$ of cylindrical shell A

表 1 考虑了 4 组节点数在均布和散乱节点下柱壳 A 中点挠度与 ABAQUS 解 $8.711 \times 10^{-7} \text{ m}$ 的误差。图 7 给出了 11×11 散乱节点布置方式。研究表明,本文方法在散乱节点布置下,计算精度有所降低,但在可接受范围之内。为了提高计算精度和计算效率,后续算例采用均布节点计算。

4.2 四折板壳

悬臂四折板及折柱壳如图 8 所示,几何及材料参数同算例 4.1。根据算例 4.1 的收敛情况,分别采用 9×9 和 11×11 节点数对每块板及柱壳进行离散。图 10 和图 11 分别给出了板 A 沿着 $x = 0.5 \text{ m}$ 及柱壳 A 沿着 $y = 0.5 \text{ m}$ 线上挠度值。观察图 9 和图 10 可知,采用本文方法计算悬臂四折板及折柱壳挠度结果与有限元 ABAQUS 解基本一致,证明了本文

表1 柱壳A中点误差分析

Tab.1 Relative error of midpoint of cylindrical shell A

Nodes	Relative error(%)	
	Regular	Irregular
Present(5×5)	6.49	8.50
Present(7×7)	1.84	3.65
Present(9×9)	0.52	1.65
Present(11×11)	0.22	0.95

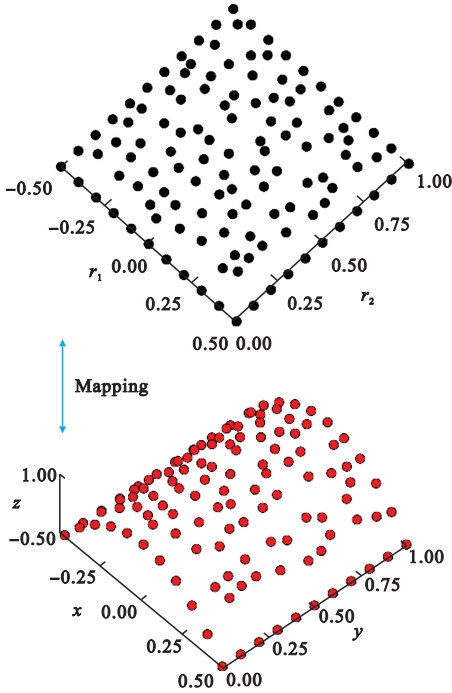


图7 柱壳A 散乱节点 11×11 布置

Fig.7 Cylindrical shell A with 11×11 irregular nodes

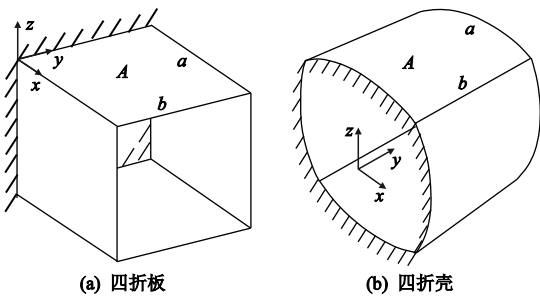


图8 悬臂四折板壳

Fig.8 A cantilevered four folded plate and shell

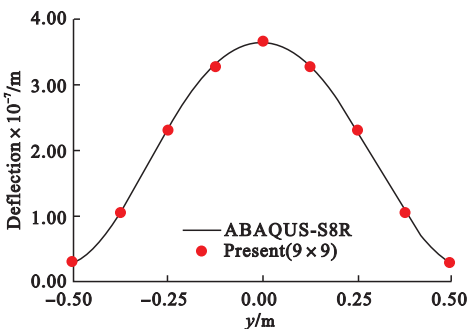


图9 板A 沿着 $x=0.5$ m 线上的挠度

Fig.9 Deflection along $x=0.5$ m of plate A

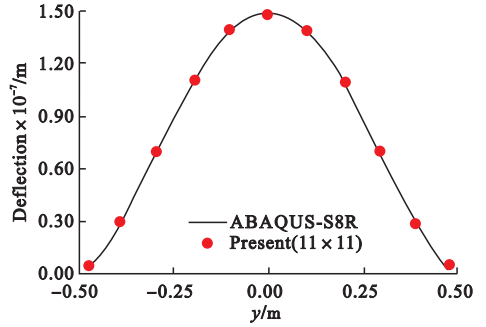


图10 柱壳A 沿着 $y=0.5$ m 线上的挠度

Fig.10 Deflection along $y=0.5$ m of cylindrical shell A

方法分析悬臂四折板/柱壳线性弯曲的准确性。

4.3 加筋板

如图11所示的一个四边固支加筋方板(肋条两端均固支,顶边自由),肋条分别布置在 $x=0.5$ m和 $y=0.5$ m处。板的长宽为 $a=b=1$ m,板厚 $h=0.01$ m。肋条长度及厚度与板的长度和厚度一致,肋条的高度 $h_s=0.2$ m。板和肋条的材料参数为 $E=1.7 \times 10^7$ Pa, $\nu=0.3$ 。方板受 $q=1$ Pa横向均布荷载。因布置筋条处板的应变梯度变化大,采用影响域 $d_{r1}=d_{r2}=4$ 。离散方案为方板, 19×19 均布节点;肋条, 19×5 均布节点。图12和图13给出了单筋条板沿着 $y=0.5$ m和双筋条板沿着 $y=1/6$ m 线上的挠度。可知本文方法得到的挠度值与ABAQUS解基本一致,证明了本文方法求解加筋板线性弯曲的准确性。

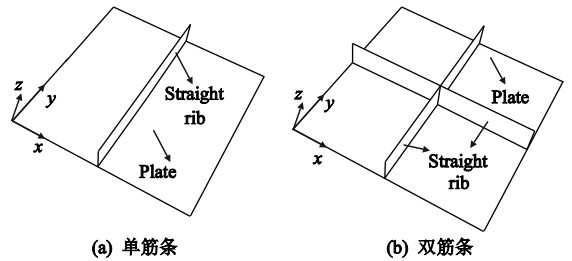


图11 加筋板

Fig.11 Stiffened plate

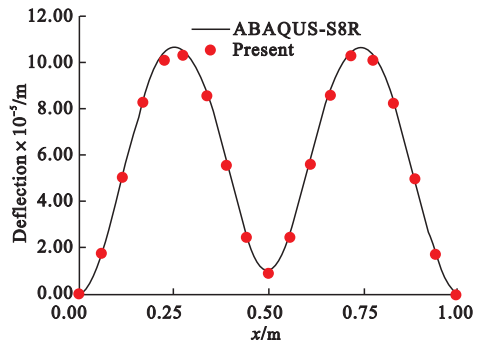


图12 单筋条方板沿着 $y=0.5$ m 线上的挠度

Fig.12 Deflection along $y=0.5$ m of stiffened square plate with one rib

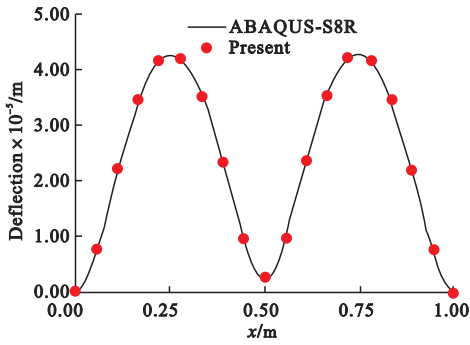


图 13 双筋条方板沿着 $y=1/6$ m 线上的挠度
Fig. 13 Deflection along $y=1/6$ m of stiffened square plate with two ribs

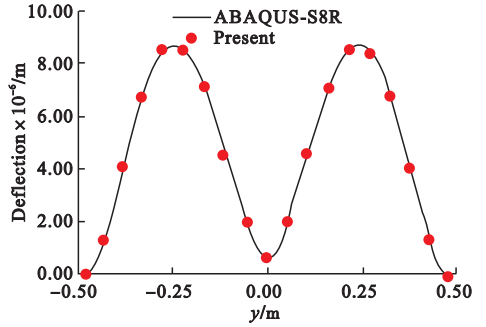


图 16 单筋条柱壳沿着 $x=-0.5$ m 线上的挠度
Fig. 16 Deflection along $x=-0.5$ m of stiffened cylindrical shell with one rib

4.4 加筋壳

如图 14 所示,受 $q=1\text{Pa}$ 径向均布荷载的四边固支加筋柱壳(肋条两端均固支,顶边自由),柱壳的弧长与边长相等,即 $a=b=1\text{ m}$, $h=0.01\text{ m}$ 。直肋条长度与壳的边长一致,曲肋条的弧长、厚度与柱壳的弧长、厚度相等,肋条高度 $h_s=0.2\text{ m}$ 。材料参数、影响域及节点离散方案同算例 4.3。图 15 为曲线筋条 19×5 节点离散示意图。对于单肋条柱壳,肋条布置在 $y=0.0\text{ m}$ 处,对于双肋条方板,肋条分别布置在 $x=-0.5\text{ m}$ 与 $y=0.0\text{ m}$ 处。图 16 和图 17 给出了单肋条柱壳沿着 $x=-0.5\text{ m}$ 和双肋条柱壳沿着 $x=-1/6\text{ m}$ 线上的挠度。可知采用本文方法得到的挠度值与 ABAQUS 解基本一致,证明了本文方法求解加筋柱壳静力弯曲的准确性。

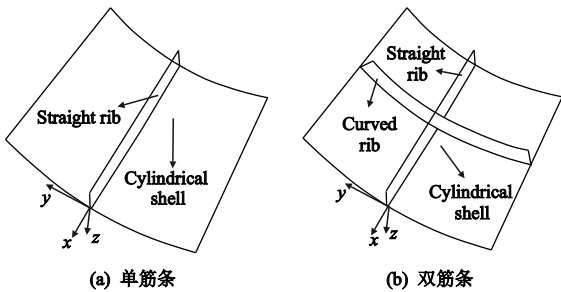


图 14 加筋柱壳

Fig. 14 Stiffened cylindrical shell

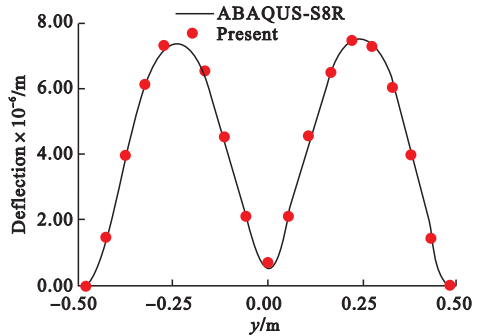


图 17 双筋条柱壳沿着 $x=-1/6$ m 线上的挠度
Fig. 17 Deflection along $x=-1/6$ m of stiffened cylindrical shell with two ribs

5 结论

本文提出了一种求解加筋折叠壳结构静力弯曲问题的移动最小二乘无网格法。将加筋折叠壳结构视为由多个壳元件组成的复合结构,先基于 3D 连续壳理论,利用移动最小二乘近似和 Reissner Mindlin 板壳理论给出壳体位移场,根据最小势能原理,推导出相应的离散方程,再将各壳元件叠加成加筋折叠壳,得到整体结构静力弯曲离散方程。研究表明:(1)本文方法求解加筋折叠壳具有良好的收敛性及较高的准确性。(2)基于移动最小二乘近似构造的形函数,需对全局问题域的节点进行逐点构造。此外,采用完全转换法处理本质边界条件,需对转换矩阵进行求逆。相比有限元,以上两点是造成本文方法计算效率降低的主要原因,但随着计算机和并行技术的发展,采用本文方法分析加筋折叠壳大型结构依然可行。(3)本文建立的加筋壳无网格模型部分,其中直/曲线筋条是基于 3D 连续壳理论,可不必像铁摩辛柯梁理论限制于一定的跨高比,但筋条的布置需与板壳的节点重合。

参考文献(References):

[1] Qin X C, Dong C Y, Wang F, et al. Free vibration

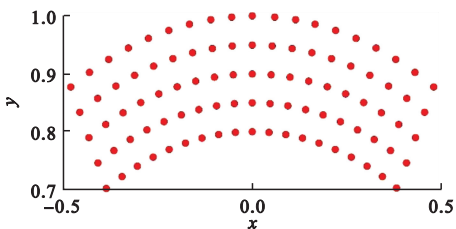


图 15 曲线筋条无网格节点离散方案

Fig. 15 Meshless node discretization scheme for curved ribs

- analysis of isogeometric curvilinearly stiffened shells [J]. *Thin-Walled Structures*, 2017, **116**:124-135.
- [2] Qin X C, Dong C Y, Wang F, et al. Static and dynamic analyses of isogeometric curvilinearly stiffened plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **45**:336-364.
- [3] Milasinovic D D, Majstorović D, Vukomanović R. Quasi static and dynamic inelastic buckling and failure of folded-plate structures by a full-energy finite strip method [J]. *Advances in Engineering Software*, 2018, **117**:136-152.
- [4] Li Z X, Li T Z, Vu-Quoc L, et al. A nine-node corotational curved quadrilateral shell element for smooth, folded, and multishell structures [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, **116**(8):570-600.
- [5] Liu J Z, Fei Q G, Jiang D, et al. Experimental and numerical investigation on static and dynamic characteristics for curvilinearly stiffened plates using DST-BK model[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, **169**:105286.
- [6] Singh K, Kapania R K. Accelerated optimization of curvilinearly stiffened panels using deep learning[J]. *Thin-Walled Structures*, 2021, **161**:107418.
- [7] Milašinović D D, Bursać S. Nonlinear analysis of folded-plate structures by harmonic coupled finite strip method and rheological-dynamical analogy [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2022, **29**(26):5191-5206.
- [8] Noguchi H, Kawashima T, Miyamura T. Element free analyses of shell and spatial structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**(6):1215-1240.
- [9] 陈卫, 杨健生, 韦冬炎, 等. 任意壳线性弯曲与自由振动分析的最小二乘无网格法 [J]. *振动与冲击*, 2022, **41**(16):125-134. (CHEN Wei, YANG Jian-sheng, WEI Dong-yan, et al. Bending and vibration analysis of an arbitrary shell by the moving-least square meshfree method [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, **41**(16):125-134, 241. (in Chinese))
- [10] Liew K M, Peng L X, Kitipornchai S. Buckling of folded plate structures subjected to partial in-plane edge loads by the FSDT meshfree Galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, **65**(9):1495-1526.
- [11] Peng L X, Kitipornchai S, Liew K M. Bending analysis of folded plates by the FSDT meshless method [J]. *Thin-Walled Structures*, 2006, **44**(11):1138-1160.
- [12] Peng L X, Kitipornchai S, Liew K M. Free vibration analysis of folded plate structures by the FSDT mesh-free method [J]. *Computational Mechanics*, 2007, **39**(6):799-814.
- [13] Barbieri E, Ventura L, Grignoli D, et al. A meshless method for the nonlinear von Karman plate with multiple folds of complex shape [J]. *Computational Mechanics*, 2019, **64**(3):769-787.
- [14] Tanaka S, Dai M J, Sadamoto S, et al. Stress resultant intensity factors evaluation of cracked folded structures by 6 DOFs flat shell meshfree modeling [J]. *Thin-Walled Structures*, 2019, **144**:106285.
- [15] Sadamoto S, Ozdemir M, Tanaka S, et al. Finite rotation meshfree formulation for geometrically nonlinear analysis of flat, curved and folded shells [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, **119**:103300.
- [16] 彭林欣. 加肋板自由振动的移动最小二乘无单元分析 [J]. *振动与冲击*, 2011, **30**(6):67-73. (PENG Lin-xin. Moving-least square meshless analysis on free vibration behavior of ribbed plates [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, **30**(6):67-73. (in Chinese))
- [17] 彭林欣, 杨绿峰. 基于一阶剪切变形理论和移动最小二乘近似的加肋板屈曲临界荷载求解 [J]. *工程力学*, 2012, **29**(7):42-48, 55. (PENG Lin-xin, YANG Lu-feng. Critical buckling load calculation of ribbed plates by the first-order shear deformation theory and the moving-least square approximation [J]. *Engineering mechanics*, 2012, **29**(7):42-48, 55. (in Chinese))
- [18] Peng L X, Tao Y P, Liang N, et al. Simulation of a crack in stiffened plates via a meshless formulation and FSDT [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **131**:880-893.
- [19] 覃霞, 刘珊珊, 谌亚菁, 等. 基于遗传算法的弹性地基加肋板肋梁无网格优化分析 [J]. *力学学报*, 2020, **52**(1):93-110. (QIN Xia, LIU Shan-shan, CHEN Ya-jing, et al. Rib meshless optimization of stiffened plates resting on elastic foundation based on genetic algorithm [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, **52**(1):93-110. (in Chinese))
- [20] Tamijani A Y, Kapania R K. Buckling and static analysis of curvilinearly stiffened plates using mesh-free method [J]. *AIAA Journal*, 2010, **48**(12):2739-2751.
- [21] Tamijani A Y, Kapania R K. Vibration of plate with curvilinear stiffeners using mesh-free method [J]. *AIAA Journal*, 2010, **48**(8):1569-1581.
- [22] 刘璟泽, 姜东, 韩晓林等. 曲线加筋 Kirchhoff-

- Mindlin 板自由振动分析[J]. *力学学报*, 2017, **49**(4): 929-939. (LIU Jing-ze, JIANG Dong, HAN Xiao-lin, et al. Free vibration analysis of curvilinearly stiffened Kirchhoff-mindlin plates [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, **49**(4): 929-939. (in Chinese))
- [23] Sadamoto S, Tanaka S, Taniguchi K, et al. Buckling analysis of stiffened plate structures by an improved meshfree flat shell formulation [J]. *Thin-Walled Structures*, 2017, **117**: 303-313.
- [24] Hasim K A, Kefal A, Madenci E. Isogeometric plate element for unstiffened and blade stiffened laminates based on refined zigzag theory[J]. *Composite Structures*, 2019, **222**: 110931.
- [25] Ozdemir M, Sadamoto S, Tanaka S, et al. Application of 6-DOFs meshfree modeling to linear buckling analysis of stiffened plates with curvilinear surfaces[J]. *Acta Mechanica*, 2018, **229**(12): 4995-5012.
- [26] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods [J]. *Mathematics of Computation*, 1981, **37**(155): 141-158.
- [27] Chen J S, Pan C H, Wu C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**(1-4): 195-227.

Moving least squares meshless method for static bending of reinforced folded shells

CHEN Wei¹, PENG Lin-xin^{*2,3}

(1. School of Civil Engineering, University of South China, Hengyang 421001, China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China;

3. Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education, Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: A folded plate structure in a deployable structure system has been widely used in practical structural engineering due to its high stiffness to weight ratio and easy splicing. Compared to folded plates, folded shells have the characteristics of variable geometric shapes and beautiful appearance. In addition, the reinforcement bars in reinforced plate and shell structures can be calculated using methods based on the Euler-Bernoulli beam (EBT) and Timoshenko beam theoretical (TBT) frameworks. However, when the span-depth ratio of the reinforcement reaches a certain limit, the EBT and TBT no longer meet the engineering accuracy requirements. This article proposes a moving least-squares meshless method for solving the static bending problem of reinforced folded shells by treating the ribs as elongated or curved plates based on 3D continuous shell theory. Firstly, based on the 3D continuous shell theory, the two-dimensional meshless node information on the following coordinate system is mapped into the 3D shell using a mapping technique. The moving least-squares approximation is used to fit the surface geometry and displacement field. Based on the principle of minimum potential energy, the meshless discrete equation for static bending of the shell is derived; Secondly, the discrete equation is modified using the complete transformation method. Then, the modified Stiffness matrix and load array of each shell are converted to the overall coordinate system. Finally, the discrete equation of the entire reinforced folded shell structure is obtained by using the substructure method. At the end of the article, the convergence and accuracy of the method in calculating the static bending of reinforced folded shells were verified by comparing the calculation results of this paper with the ABAQUS finite element solutions of four numerical examples: a folded plate and a folded shell, a reinforced plate, and a reinforced shell.

Key words: 3D continuous shell theory; moving-least square approximation; stiffened shell; folded shell; static bending