

DOI: 10.7511/jslx20230904003

# 基于可靠性指标法的连续体结构可靠性拓扑优化

王林军<sup>1</sup>, 李家豪<sup>1</sup>, 张正伟<sup>2</sup>, 吴振雨<sup>1</sup>, 魏悠贵<sup>3</sup>, 刘辉<sup>\*4</sup>

(1. 三峡大学 机械与动力学院, 宜昌 443002; 2. 中国船舶科学研究中心, 无锡 214082;

3. 西安工业大学 机电工程学院, 西安 710021; 4. 武汉大学 土木建筑工程学院, 武汉 430072)

**摘要:**实际工程中,结构面临着来自多种复杂环境下不确定性因素的影响,导致结构性能的变化,传统拓扑优化未考虑这些因素的影响。因此,本文提出了一种可靠性指标法(RIA)的可靠性拓扑优化方法,用于连续体结构拓扑优化。旨在考虑结构可靠性的情况下,使得结构最终拓扑构型的体积分数最小。本文将载荷作为不确定量,通过可靠性指标法寻找极限状态点;然后基于双向渐进结构优化法(BESO),以结构体积为目标函数,可靠性指标作为约束条件,采用移动渐进线法(MMA)进行优化。对不同的数值算例(如简支梁、悬臂梁、L型梁)进行分析,同时研究了目标可靠度和标准差对结构性能的影响,还考虑了多工况、载荷方向不确定性等情况。研究结果表明,本文方法能够高效地找到极限状态点,相较于传统拓扑优化方法所得的拓扑构型更加可靠。

**关键词:**可靠性指标法;移动渐进性法;变密度法;可靠性拓扑优化

**中图分类号:** O302; O224

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2025)01-0098-08

## 1 引言

实际工程中结构由于受各种不确定因素影响导致不能达到规定寿命,研究发现几何参数、载荷等不确定因素对结构有一定影响,因此对结构可靠性研究十分必要。Bendsøe等<sup>[1]</sup>提出了标志着连续体结构拓扑优化设计诞生的均匀化方法,使拓扑优化逐步成为结构优化领域的热门,但是大多学者都只限于研究在各项因素确定前提下进行优化,忽视了工程结构中不确定因素影响。自Bae等<sup>[2]</sup>首次提出可靠性拓扑优化RBTO(Reliability based on topology optimization),研究者们才开始重视考虑RBTO<sup>[3-6]</sup>。

针对考虑不确定因素结构拓扑优化,相关学者已从不同角度开展了研究。Lazarov等<sup>[7]</sup>考虑了材料和几何不确定性下拓扑优化,并将该方法应用于柔顺机构的设计。龙凯等<sup>[8]</sup>在局部失效中引入负载不确定性,讨论了方向不确定的问题。虽然很多学者考虑了各因素不确定性问题,但是都未讨论结构是否满足可靠性要求。Cheng等<sup>[9]</sup>考虑了载

荷不确定性下应力约束的可靠性拓扑优化。Gao等<sup>[10]</sup>提出了基于微观材料不确定性下的可靠性拓扑优化,同时考虑微观结构层次不确定性,通过多相材料数值算例验证了该方法可行性。同时为了评估可靠性,研究者们作出了大量成果,亢战等<sup>[11]</sup>将非概率可靠性模型引入拓扑优化,着重讨论了桁架结构可靠性拓扑优化结果。王选等<sup>[12]</sup>同样在局部破损拓扑优化模型中引入可靠性,用响应面方法构建功能函数。易平等<sup>[13]</sup>采用功能度量法PMA(Performance Measure Approach)进行可靠性评估,基于变密度法开展可靠性拓扑优化设计。

在结构力学拓扑优化领域,Xie等<sup>[14]</sup>提出渐进结构优化法ESO(Evolutionary Structural Optimization Method)模拟了力学结构进化过程,删除应力较小的单元,但ESO算法只能从结构中删除材料。为了完善该方法,Querin等<sup>[15]</sup>提出了双向渐进结构优化法BESO(Bi-directional Evolutionary Structural Optimization Method)作为ESO方法的延伸,材料既可以删除也可以重新添加进结构中,但是早期方法都基于启发式概率,忽略了棋盘

收稿日期:2023-09-04; 修改稿收到日期:2023-10-13.

基金项目:国家自然科学基金(11202116;12072242;12372200)资助项目.

作者简介:刘辉\*(1985-),男,博士,副教授(E-mail: h.liu@whu.edu.cn).

引用本文:王林军,李家豪,张正伟,等.基于可靠性指标法的连续体结构可靠性拓扑优化[J].计算力学学报,2025,42(1):98-105.

WANG Lin-jun, LI Jia-hao, ZHANG Zheng-wei, et al. Reliability topology optimization of continuum structure based on reliability index method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 98-105.

格现象和网格依赖性问题。Huang 等<sup>[16]</sup>提出了一种软删单元的 BESO 方法,其使用了类似于 SIMP(Solid Isotropic Material Penalization)方法的惩罚机制,进行人工材料插值,将虚拟单元的密度变为一个非常接近 0 的正数以参与敏度分析。

现阶段基于拓扑优化的研究多为体积约束或者应力约束等,缺少对结构可靠性的研究,同时为了避免基于 SIMP 材料插值模型过于依赖网格分辨率,本文考虑载荷不确定性因素,使用 RIA(Re-liability Index Analysis)评估可靠性,以 BESO 拓扑优化对刚性结构进行可靠性拓扑优化,研究可靠性对拓扑优化的影响。优化模型以体积分数为目标函数,基于经典拓扑优化引入可靠性指标约束,同时还讨论了标准差以及多载荷对可靠性拓扑优化的影响。

## 2 可靠性分析基本原理

实际工程中由于多种不确定因素存在,都会对结构可靠性产生影响,因此用功能函数与可靠性指标评价结构可靠性,结构功能函数不仅与设计变量有关,还与随机变量有关,假设有  $N$  个随机变量结构,功能函数为  $g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X})$ ,其中  $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  为随机变量。当  $g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X}) < 0$  时代表结构失效,则结构的失效概率可以表示为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} p_f &= P(g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X}) \leq 0) \\ &= \int_{g < 0} f_g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int \cdots \int_{g < 0} f_g(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N \\ &= F_g(\boldsymbol{\rho}, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $f_g(\mathbf{X})$  为随机变量概率密度函数,  $F_g(\boldsymbol{\rho}, 0)$  为结构累积分布函数,  $\boldsymbol{\rho}$  为设计变量,  $P$  为概率算子。

由于失效概率的计算涉及概率密度函数的多重积分,因此工程中用与失效概率对等的可靠性指标来衡量,即

$$\beta = \Phi^{-1}(p_f) \quad (2)$$

式中  $\Phi^{-1}(\ast)$  为逆累积分布函数。

可靠性中随机变量通常满足一定分布形式,为了更好地评价可靠性指标,通过将  $Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})/\sigma$  转换到规范化空间中<sup>[18]</sup>,即  $g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y})$ ,使随机变量满足标准正态分布规律,其中  $\boldsymbol{\mu}$  为随机变量的均值,  $\sigma$  为标准差。因此求解可靠性指标模型变为

$$\begin{aligned} \min: \beta &= \|\mathbf{Y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N y_i^2} \\ \text{s. t. : } g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X}) &= g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)为可靠性指标法(RIA)<sup>[19]</sup>的数学模型。在规范化空间中  $\beta$  的大小为 MPP 点(Most Probable Point)到原点的距离, MPP 点为功能函数上距离原点最近的点。

采用 HL-RF<sup>[20]</sup>迭代方法求解式(3), HL-RF 迭代是根据功能函数梯度下降最快的方向逐步搜寻最可能失效的点。其迭代格式表示为

$$\begin{aligned} \beta^k &= \frac{g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k) - (\nabla_Y g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k))^T \mathbf{Y}^k}{\|\nabla_Y g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)\|} \\ \mathbf{Y}^{k+1} &= -\beta^k \cdot \frac{\nabla_Y g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)}{\|\nabla_Y g(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)\|} \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\beta^k$  为第  $k$  步迭代时的可靠性指标,  $\mathbf{Y}^{k+1}$  为第  $k+1$  迭代时的  $\mathbf{Y}$  值,  $\nabla g$  为功能函数梯度。

## 3 BESO 拓扑优化方法

拓扑优化通过在固定空间内调整材料的分布,以在满足特定约束条件下最大化结构的性能。根据连续体结构静力平衡方程与表征应变能的平均柔度表达式,以体积比为约束、刚度最大化为目标函数的 BESO 拓扑优化数学模型为

$$\begin{aligned} \text{find: } \boldsymbol{\rho} &= \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_e}\} \\ \min: c &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{f} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} E_e(\rho_e) \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_e \\ \text{s. t. } &\begin{cases} V^* - \sum_{e=1}^{N_e} V_e \rho_e = 0 \\ \mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\rho}_e = \{\rho_{\min}, 1\} \quad (e = (1, 2, \dots, N_e)) \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\rho_{N_e}$  为第  $N_e$  个单元的密度,取值在  $0 \sim 1$ ,其中为了避免结果奇异给定密度下限值  $\rho_{\min} = 10^{-9}$ ;  $c$  为目标函数,其体现了该结构在当前载荷下的总刚度;  $\mathbf{k}_0$  为单元刚度矩阵;  $V_i$  为第  $i$  个单元体积;  $V^*$  为初始设计域总体积;  $E_i$  为第  $i$  个单元的弹性模量;  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{f}$  分别为整体刚度矩阵、节点位移向量和节点载荷向量。

为了解决早期 BESO 方法将迭代过程中彻底删除低效能的单元,导致不再考虑删除材料的问题, Huang 等<sup>[16]</sup>提出一种基于材料插值模型的 BESO 方法,引入惩罚因子  $p$ ,使删掉的单元得以参与后续的灵敏度分析计算。

$$E_i(\rho_i) = E_0 \rho_i^p \quad (6)$$

式中  $E_0$  为实体材料的弹性模量,  $p$  为惩罚因子。本文取  $p = 3$ 。

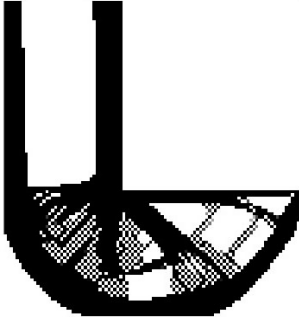


图1 棋盘格现象(未引入过滤器)

Fig. 1 Checkerboard phenomenon(filter not introduced)

由于采用了离散的变量值,导致产生一个离散的优化空间。在某些情况下,优化算法会在不同的离散变量值中来回切换,找到不同的局部最优解,这些局部最优解的形状最终形成棋盘格现象,如图1所示。针对该现象,本文引入如下的独立网格过滤器:

$$\bar{\rho}_e = \frac{1}{\sum_{j \in n_e} \omega(x_j)} \sum_{j \in n_e} \omega(x_j) \rho_j \quad (7)$$

式中  $\omega(x)$  为加权因子,  $n_e$  表示单元距离小于于过滤半径  $r_{min}$  的单元指标集合,本文取  $r_{min} = 1.6$ 。加权因子定义为

$$\omega(x_j) = \begin{cases} R - r_{ef} & (R > r_{ef}) \\ 0 & (R < r_{ef}) \end{cases} \quad (8)$$

式中卷积算子  $r_{ef}$  代表单元  $e$  到单元  $f$  的阿基米德距离,此过滤法能够很好地抑制棋盘格现象。

如图2所示,引入过滤器后的结果不仅有效避免了棋盘格现象,且所得结构的边界较为清晰,灰度单元较少。

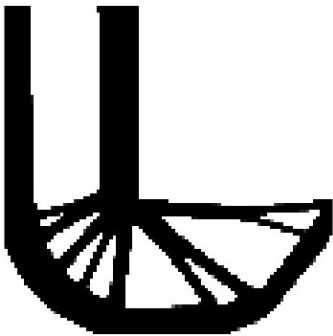


图2 棋盘格现象(引入过滤器)

Fig. 2 After introducing the filter(introducing filters)

## 4 可靠性拓扑优化

### 4.1 可靠性拓扑优化模型

基于 BESO 拓扑优化的基础上引入可靠性,考虑不确定性因素的影响,数学模型为

$$\text{find: } \boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_e}\}$$

$$\text{min: } f_{obj} = \left( \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e V_e \right) / V_0$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{K}(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{X}) \mathbf{U}(\bar{\boldsymbol{\rho}}, \mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \\ p_f = P(G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X}) \leq 0) \leq p_f^* \\ (\rho_{min} \leq \rho \leq \rho_{max}) \end{cases} \quad (9)$$

式中  $p_f$  为当前结构失效概率,  $p_f^*$  为给定失效概率,其余变量与式(5)相同。模型以体积分数为目标函数,考虑在载荷为随机变量的情况下,结构可靠度大于或等于目标可靠度,假设结构功能函数

$$G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{X}) = c_{max} - c \quad (10)$$

式中  $c_{max}$  为给定的结构柔度限值,  $c$  为当前结构的柔度。首先将随机载荷变换到规范化空间中,再根据功能函数基于 RIA 法寻求 MPP 点:

$$\beta^k = \frac{G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k) - (\nabla_{\mathbf{Y}} G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k))^T \mathbf{Y}^k}{\|\nabla_{\mathbf{Y}} G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)\|} \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}^{k+1} = -\beta^k \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{Y}} G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)}{\|\nabla_{\mathbf{Y}} G(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{Y}^k)\|}$$

### 4.2 灵敏度分析

在可靠性拓扑优化过程中,为了找到 MPP 点,需要求解功能函数的梯度,即功能函数对随机变量的导数,本文利用伴随变量法进行推导  $\partial G / \partial \mathbf{X}$ , 构造等价柔度的增广拉格朗日函数为

$$L = \mathbf{F}^T \mathbf{U} + \lambda^T (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{U}) \quad (12)$$

式(12)两边同时对随机变量求得

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{U} + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} + \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (13)$$

为了消去未知项  $\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{X}$ , 使  $\frac{(\mathbf{F} - \lambda^T \mathbf{K}) \partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} =$

0, 即  $\lambda = \mathbf{U}$ , 可得

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial c}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = -2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \quad (15)$$

通过可靠性找到 MPP 点后,再实施外层的拓扑优化,而优化的关键是求出功能函数对设计变量的灵敏度,即

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = -\frac{\partial c}{\partial \rho} = -\frac{\partial c}{\partial \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \rho} \quad (16)$$

同样用伴随法求  $\partial c / \partial \bar{\rho}$ , 对式(12)两边求导:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\rho}} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{\rho}} - \lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \bar{\rho}} \mathbf{U} - \lambda^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \bar{\rho}} \quad (17)$$

为消去  $\partial \mathbf{U} / \partial \bar{\rho}$ , 使  $\frac{(\mathbf{F} - \lambda^T \mathbf{K}) \partial \mathbf{U}}{\partial \bar{\rho}} = 0$ , 选择

$\lambda = \mathbf{U}$ , 则可以确定功能函数对设计变量的导数:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{\partial L}{\partial \rho} = -\lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} \mathbf{U} = -P \bar{\rho}^{\rho-1} \mathbf{u}^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u} \quad (18)$$

根据式(7)直接求导  $\partial \bar{\rho} / \partial \rho$  为

$$\bar{\rho}_e = \frac{1}{\sum_{j \in n_e} w(x_j)} w(x_j) \quad (19)$$

求出功能函数对设计变量的导数以及约束函数后,使用移动渐进线法 MMA<sup>[21]</sup> (Method of Moving Asymptotes)进行优化。可靠性分析中,由于功能函数是结构柔度限值与当前柔度差值,因此每一次迭代都需要大量有限元计算,得到当前柔度,求出功能函数的响应值,设定可靠性分析中当误差  $|\beta^{k+1} - \beta^k| \leq 10^{-4}$  时停止迭代。最可能失效点为功能函数无限趋近于 0 时的随机变量值,再通过得到的最可能失效点进行外层的拓扑优化,本文的计算流程如图 3 所示。

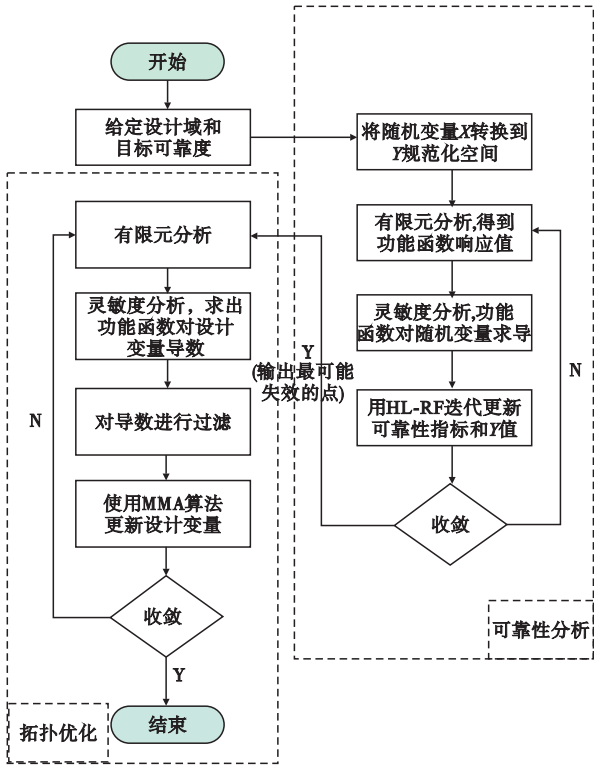


图 3 可靠性拓扑优化流程

Fig. 3 Reliability topology optimization flow chart

### 5 数值算例

通过简支梁、悬臂梁和 L 型梁三个算例验证本文方法可行性,各算例材料属性参数列入表 1。

表 1 设计参数

Tab. 1 Design parameter

名称	数值
弹性模量	1 MPa
泊松比	0.3
过滤半径	1.6
惩罚因子	3
初始单元密度	1
厚度	1mm

### 5.1 简支梁

如图 4 所示,简支梁长为 120 mm,宽取 60 mm,将其离散为 120×60 个单元,左下角固定整体自由度,右下角固定竖直方向自由度,底部中点处施加竖直向下的集中载荷,载荷均值大小和标准差分别取 1 和 0.1,  $c_{max} = 100$ ,其余参数列入表 1。

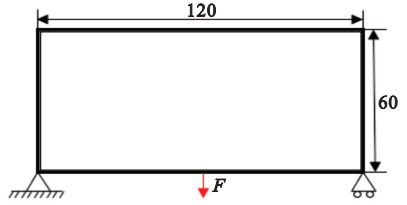


图 4 简支梁结构

Fig. 4 Simple beam structure

简支梁的可靠性指标和响应值迭代如图 5 所示,  $\beta$  值与响应值在第五次迭代之后趋于稳定,响应值最终收敛为  $1.72 \times 10^{-6}$ ,得到极限状态下载荷大小为 3.0804,将载荷的值代入拓扑优化中计算。

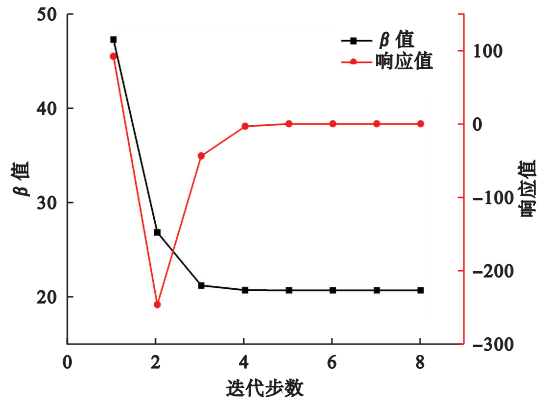


图 5 可靠性指标和响应值迭代

Fig. 5 Reliability index and response value iteration diagram





优化结果列入表 2,由于确定性拓扑优化 DTO (Deterministic topology optimization) 不考虑可靠性,所以其体积分数相对较低,导致可靠性指标为负,使得结构不够稳定。在考虑了可靠性的 RBTO 方法中,随着可靠性指标的增大,其体积分数也增大,构型更加复杂,所用材料更多,杆件也更稳定可靠,因此说明在 DTO 方法中考虑可靠性是十分必要的。

### 5.2 悬臂梁

如图 6 所示,悬臂梁长为 120 mm,宽取 40 mm,将其离散为 4800 个单元,左端完全固定,右下角限制竖直方向自由度,集中载荷作用于左上角,其余参数与表 1 相同。

表2 简支梁优化结果

Tab.2 Optimization results of simply supported beam

	可靠性指标	拓扑构型	体积分数
DTO	-2.9123		26.81%
	3.0044		31.64%
RBTO	4.0047		32.52%
	5.0080		33.49%

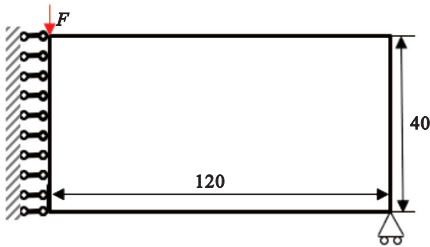


图6 悬臂梁结构  
Fig.6 Cantilever structure

为了研究可靠性指标以及标准差对优化结果的影响,分别选取不同可靠性指标值 5.5, 5.0, 4.5, 4.0, 3.0 以及不同标准差值 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 进行优化计算。

结果列入表 3,在标准差都为 0.10 时,随着目标可靠性指标的增大,结构的拓扑构型变得更加复杂,同时体积分数也在逐步增大,意味着为了达到更高的可靠性要求,结构需要更多材料构建更牢固的构型。同时对比不同标准差的优化结果,在标准差相对较小时,结构构型简单且体积分数较小,而伴随着标准差增大,拓扑构型变得更复杂,体积分数越大。因此可靠性指标与标准差对可靠性分析都有一定影响。











5.3 L 型梁

为了研究多工况的影响,用 L 型梁进行 RBTO 优化计算。如图 7 所示, L 型梁长边为 100 mm,窄边为 40 mm,右上角为弱材料区域,设定其弹性模量大小为  $10^{-9}$ 。将其离散为 6400 个单元,柔度上限设置为  $c_{max} = 750$ ,将上边完全固定,载荷作用位置如图 7 所示,初始载荷大小平均值皆设为 1,标准差为 0.10,其余参数列入表 1。在设定目标可靠度为 2 时,针对单载荷以及多载荷进行优化计算。

L 型梁仅受  $F_1$  或  $F_2$  作用时,其结果分别如图 8 和图 9 所示,同时受  $F_1$  和  $F_2$  两载荷结果如图 10 所示。从最终的优化结果看出,考虑多载荷工况比单载荷的最终优化结构拥有更多支撑杆,其结构更加稳定可靠;从数值结果看,图 10 体积分数为 30.59%,图 8 和图 9 体积分数分别为 26.19% 和 25.30%,这证明考虑多工况比单载荷应用更多材料。

表3 悬臂梁优化结果

Tab.3 Optimization results of cantilever beam

可靠性指标	$\sigma=0.10$		$\beta=4.0$		
	拓扑构型	体积分数	标准差	拓扑构型	体积分数
$\beta=3.0$		21.42%	$\sigma=0.06$		18.22%
$\beta=4.0$		28.15%	$\sigma=0.08$		22.72%
$\beta=4.5$		31.43%	$\sigma=0.10$		28.15%
$\beta=5.0$		35.01%	$\sigma=0.12$		33.84%
$\beta=5.5$		38.77%	$\sigma=0.14$		44.40%

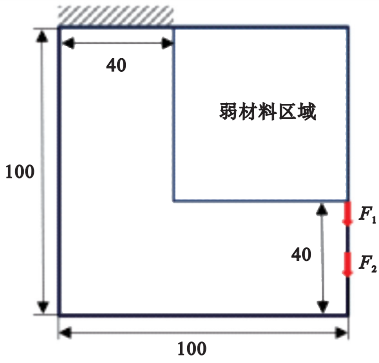


图7 L型梁结构  
Fig. 7 L-beam structure

如图11所示,L型梁长边为200mm,窄边为80mm,离散为25600个单元,载荷大小平均值设置为1,标准差设置为0.10,取载荷与垂直方向的

夹角为 $\theta$ ,大小设置为 $\pi/12$ ,标准差为 $\pi/120$ ,其余参数与上例L型梁相同,柔度限值设为150,设定目标可靠度为2.5。

从最终的优化结果看出考虑多载荷工况比单载荷的最终优化结构拥有更多支撑杆,其结构更加的稳定可靠;从数值结果看,图10体积分数为30.59%,图8和图9体积分数分别为26.19%和25.30%,这证明考虑多工况比单载荷应用更多材料。

为了验证本文方法在不同情况下的稳定性,考虑载荷大小不确定性的同时考虑载荷方向的不确定性。如图12和图13所示,图12为考虑载荷大小不确定性的拓扑优化结果。图13为同时考虑载荷大小和方向不确定性的拓扑优化结果。对比

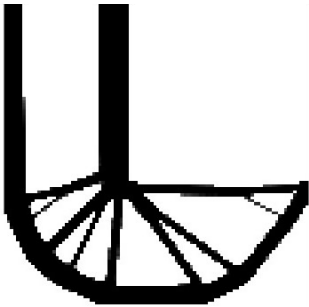


图8 单载荷优化结果( $\beta=2$ , volfrac = 26.19%)  
Fig. 8 Single load optimization results ( $\beta=2$ , volfrac = 26.19%)

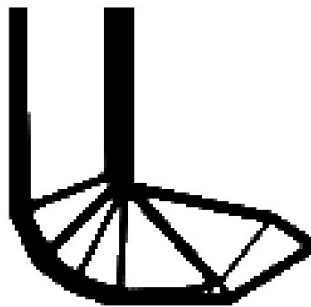


图9 单载荷优化结果( $\beta=2$ , volfrac = 25.30%)  
Fig. 9 Single load optimization results ( $\beta=2$ , volfrac = 25.30%)

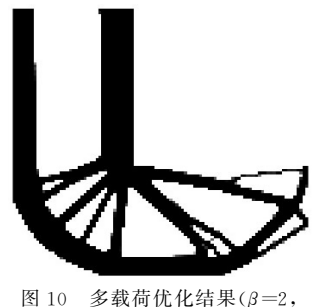


图10 多载荷优化结果( $\beta=2$ , volfrac = 30.59%)  
Fig. 10 Multi-load optimization results ( $\beta=2$ , volfrac = 30.59%)

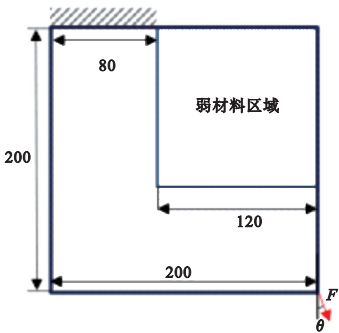


图11 L型梁简图  
Fig. 11 L-beam diagram

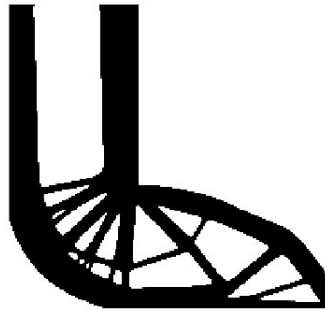


图12 考虑载荷大小不确定性 ( $\beta=2.5$ , volfrac = 33.85%)  
Fig. 12 Considering the uncertainty of load size( $\beta=2.5$ , volfrac = 33.85%)

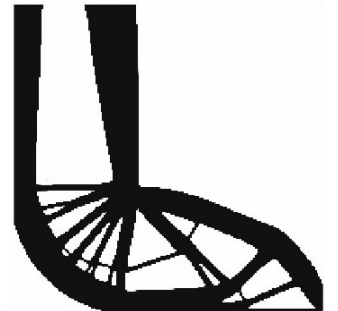


图13 考虑载荷大小和方向不确定性 ( $\beta=2.5$ , volfrac = 34.07%)  
Fig. 13 Considering the uncertainty of load size and direction( $\beta=2.5$ , volfrac = 34.07%)

这两个拓扑优化结果,考虑了载荷方向的拓扑构型更加复杂,结构更加稳定可靠;对比体积分数,只考虑载荷大小的体积分数为33.85%,而考虑了载荷方向的体积分数为34.07%。从可靠性角度思考,更多的体积分数表示结构杆件更多更牢固也更加可靠。因此载荷的方向也对可靠性优化结果有正向的影响。

## 6 结论

本文基于BESO拓扑优化,以载荷为随机变量,用RIA法寻找MPP点,外层则依赖拓扑优化进行计算,最后对简支梁、悬臂梁和L型梁进行可靠性拓扑优化,对比得出以下结论。

(1)RBTO优化结果比DTO优化结果可靠性更高,且RBTO不同目标可靠性指标时拓扑构型

相似,但可靠性指标更大时体积分数越大,意味着需要更多材料满足可靠性需求。

(2)RBTO 针对不同目标可靠度指标构型一般不同,越大可靠性指标对应越复杂的结构,能够获得比 DTO 更优的传力路径;同时针对 RBTO 不同的随机变量标准差,对优化结果也有影响,其与体积分数呈正相关关系。

(3)RBTO 针对多载荷问题和载荷方向不稳定性问题表现出良好稳定性,能获得更优良的结构。

## 参考文献(References):

- [1] Bendsøe M P, Sigmund O. *Topology, Optimization: Theory, Methods, and Applications* [M]. New York: Springer, 2003.
- [2] Bae K R, Wang S. Reliability-based topology optimization[A]. Proceedings of 9<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization [C]. 2002.
- [3] Kharmanda G, Olhoff N, Mohamed A, et al. Reliability-based topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, **26**(5):295-307.
- [4] Silva M, Tortorelli D A, Norato J A, et al. Component and system reliability-based topology optimization using a singleloop method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **41**(1):87-106.
- [5] Kim S R, Lee W G, Park J Y, et al. Reliability-based topology optimization using reliability index approach [A]. Abstract Proceedings of the International Conference on Experimental Mechanics[C]. 2008.
- [6] Nguyen T H, Song J, Paulino G H. Single-loop system reliability based topology optimization considering statistical dependence between limitstates [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **44**(5):593-611.
- [7] Lazarov B S, Schevenels M, Sigmund O. Topology optimization considering material and geometric uncertainties using stochastic collocation methods[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2012, **46**(4):597-612.
- [8] Long K, Wang X, Du Y X. Robust topology optimization formulation including local failure and load uncertainty using sequential quadratic programming[J]. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2019, **15**(2):317-332.
- [9] Cheng C Z, Yang B, Wang X, et al. Reliability based topology optimization using the response surface method for stress-constrained problems considering load uncertainty [J]. *Engineering Optimization*, 2023, **55**(11):1923-1939.
- [10] Gao Y, Liu Y M. Reliability-based topology optimization with stochastic heterogeneous microstructure properties[J]. *Materials & Design*, 2021, **205**:109713.
- [11] 亢 战, 罗阳军. 桁架结构非概率可靠性拓扑优化 [J]. 计算力学学报, 2008, **25**(5):589-594. (KANG Zhan, LUO Yang-jun. Topology optimization of truss structures for non-probabilistic reliability[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(5):589-594. (in Chinese))
- [12] 王 选, 时元昆, 杨 博, 等. 基于响应面方法的破损-安全结构可靠性拓扑优化 [J]. 力学学报, 2023, **55**(5):1206-1216. (WANG Xuan, SHI Yuan-kun, YANG Bo, et al. Reliability-based topology optimization of fail-safe structures using response surface method[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, **55**(5):1206-1216. (in Chinese))
- [13] 易 平, 李 娜, 邢 艳, 等. 基于功能度量法的刚性结构可靠性拓扑优化 [J]. 计算力学学报, 2023, **40**(3):331-338. (YI Ping, LI Na, XING Yan, et al. Reliability-based topology optimization of rigid structures using performance measure approach[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(3):331-338. (in Chinese))
- [14] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Computers & Structures*, 1993, **49**(5):885-896.
- [15] Querin O M, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary structural optimisation(ESO) using a bidirectional algorithm [J]. *Engineering Computations*, 1998, **15**(8):1031-1048.
- [16] Huang X, Xie Y M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials [J]. *Computational Mechanics*, 2009, **43**(3):393-401.
- [17] 张 明, 金 峰. 结构可靠度计算[M]. 北京: 科学出版社, 2015. (ZHANG Ming, JIN Feng. *Structural Reliability Computations* [M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese))
- [18] 高 翔, 王林军, 杜义贤. 采用增广乘子法和模拟退火法的结构可靠性分析 [J]. 西安交通大学学报, 2019, **53**(7):144-152. (GAO Xiang, WANG Lin-jun, DU Yi-xian. Structure reliability analysis by combining augmented multiplier method and simulated annealing algorithm [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2019, **53**(7):144-152. (in Chinese))
- [19] Wang X, Meng Z, Yang B, et al. Reliability-based

design optimization of material orientation and structural topology of fiber-reinforced composite structures under load uncertainty[J]. *Composite Structures*, 2022, **291**:115537.

- [20] Rackwitz R, Flessler B. Structural reliability under combined random load sequences[J]. *Computers & Structures*, 1978, **9**(5):489-494.
- [21] Svanberg K. The method of moving asymptotes: A new method for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineer-*

*ing*, 1987, **24**(2):359-373.

- [22] 吴振雨,罗城升,陈保家,等.基于 Heaviside 投影和进退法的结构拓扑优化方法[J].三峡大学学报(自然科学版),2022,**44**(5):99-103.(WU Zhen-yu, LUO Cheng-sheng, CHEN Bao-jia, et al. Optimization method of structural topology based on Heaviside projection and the method of advance and retreat[J]. *Journal of China Three Gorges University* (Natural Sciences), 2022, **44**(5):99-103. (in Chinese))

## Reliability topology optimization of continuum structure based on reliability index method

WANG Lin-jun<sup>1</sup>, LI Jia-hao<sup>1</sup>, ZHANG Zheng-wei<sup>2</sup>, WU Zhen-yu<sup>1</sup>, WEI You-gui<sup>3</sup>, LIU Hui<sup>\*4</sup>

(1. School of Mechanical and Power Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China;

2. China Ship Scientific Research Center, Wuxi 214082, China;

3. School of Mechatronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China;

4. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** In practical engineering, a structure is faced with the influence of uncertain factors from a variety of complex environments, which leads to the change of structural performance. Traditional topology optimization does not consider the influence of these factors. Therefore, this paper proposes a reliability topology optimization method for continuous structures based on a reliability index method (RIA). The aim is to minimize the volume fraction of the final topological configuration of the structure considering structural reliability. In this paper, the load is considered to be uncertain, and the limit state point is found by the reliability index method. Then, based on the bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) method, the method of moving asymptotes (MMA) is used to optimize the structural volume as the objective function and the reliability index as the constraint condition. Through the analysis of different numerical cases (such as a simply supported beam, a cantilever beam, an L-shaped beam), the influence of the target reliability and the standard deviation on the structural performance is studied, and the uncertainty of multiple working conditions and load direction is also considered. The results show that the proposed method can efficiently find the limit state points, which is more reliable than the topological configuration obtained by the traditional topology optimization method.

**Key words:** reliability index method; method of moving progressive; variable density method; reliability based topology optimization