

DOI: 10.7511/jslx20230910001

# 考虑吸湿老化影响的天然纤维增强截断圆锥壳 屈曲问题的精确分析

张俊霖, 聂雪阳, 王雅静, 苏新, 周震寰\*

(大连理工大学 力学与航空航天学院 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 大连 116024)

**摘要:**天然纤维增强材料(NFRC)在潮湿环境下会不可避免地出现吸湿老化行为,严重影响该类材料和结构的稳定性。为分析该问题,本文引入非线性前屈曲效应,提出了一种适用于 NFRC 截断圆锥壳屈曲问题的精确分析方法。首先,基于 Donnell 壳理论推导了 NFRC 圆锥壳的屈曲控制方程。其次,采用伽辽金法求解非线性轴对称前屈曲变形,并在此基础上进一步求解获得高精度的临界屈曲载荷以及解析的屈曲模态。最后,通过与已有文献和数值仿真对比,验证了本文方法的精确性,并分析了纤维参数和吸湿老化效应参数对 NFRC 截断圆锥壳屈曲行为的影响。本文的研究结果有望为该类 NFRC 截断圆锥壳的抗屈曲设计提供理论基础。

**关键词:**圆锥壳;屈曲;临界荷载;天然纤维增强材料;湿热老化

**中图分类号:** O343.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2025)01-0083-06

## 1 引言

与传统的人造纤维材料相比,天然纤维增强材料 NFRC (Natural fiber reinforced composite) 具有成本低、比强度高、可再生回收等诸多优点,由其制造的梁、板、壳等基础部件已广泛应用于航空航天、轨道交通、汽车、清洁能源等领域<sup>[1-4]</sup>。天然纤维表面具有极高的亲水性,存在吸水膨胀和水解现象,在潮湿环境中会出现吸湿老化行为,严重降低整体结构稳定性,导致其容易发生结构失稳<sup>[5-7]</sup>,从而引发安全事故。因此,研究天然纤维增强板壳结构的稳定性问题具有重要的实际意义。

目前,针对 NFRC 及其结构力学性能的研究工作已经受到了国内外学者的广泛关注。Mejri 等<sup>[8]</sup>基于实验方法测试了吸湿老化过程对 NFRC 板弯曲变形的影响,并利用扫描电镜对材料变化进行了分析。Chaudhary 等<sup>[9]</sup>利用树脂传递模塑技术制备不同尺寸增强纤维,并测试不同尺寸纤维对 NFRC 材料整体力学性能的影响。Pan 等<sup>[10,11]</sup>提出了一种考虑界面损伤和纤维退化影响,能够有效预测吸湿老化过程影响的 NFRC 材料的非线性材

料参数模型。该理论模型与实验结果较为吻合,简明的模型结构给 NFRC 结构稳定性问题的求解提供了可能性。基于该模型,文献[12,13]分别研究了吸湿老化现象对天然纤维增强板结构自由振动与屈曲行为的影响,张俊霖等<sup>[14]</sup>利用辛方法研究了吸湿老化对圆柱壳屈曲行为的影响。

从上述文献可以看出,现有研究仅考虑了 NFRC 板和圆柱壳稳定性问题,并且关于 NFRC 圆锥壳稳定性的研究尚未有文献提及。因此,研究 NFRC 圆锥壳的屈曲问题具有重要的理论意义。本文通过考虑前屈曲效应,建立了 NFRC 截断圆锥壳屈曲分析的精确模型,并利用伽辽金法求解得到临界屈曲载荷和屈曲模态,数值算例验证了本方法的正确性,并分析了吸湿老化效应对 NFRC 截断圆锥壳结构的屈曲行为的影响和作用规律。

## 2 基本方程

考虑如图 1 所示的 NFRC 截断圆锥壳,其长度为  $L$ ,厚度为  $h$ ,上半径为  $R_1$ ,下半径为  $R_2$ ,半顶角为  $\alpha$ ,截断处起始坐标为  $x_0$ ,受到轴向载荷  $P$  作用。在圆锥壳的中平面上建立柱坐标系  $(x, \theta, z)$ ,

收稿日期:2023-09-10;修改稿收到日期:2023-12-16.

基金项目:辽宁省自然科学基金面上项目(2023-MS-118)资助.

作者简介:周震寰\*(1983-),男,博士,教授(E-mail:zhouzh@dut.edu.cn).

引用本文:张俊霖,聂雪阳,王雅静,等.考虑吸湿老化影响的天然纤维增强截断圆锥壳屈曲问题的精确分析[J].计算力学学报,2025,42(1):83-88.

ZHANG Jun-lin, NIE Xue-yang, WANG Ya-jing, et al. Accurate buckling analysis of natural fiber reinforced conical shell under effects of hygroscopic aging[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 83-88.

其中  $x, \theta, z$  分别沿着壳体的轴向、周向和径向, 对应的位移记为  $u, v$  和  $w$ 。

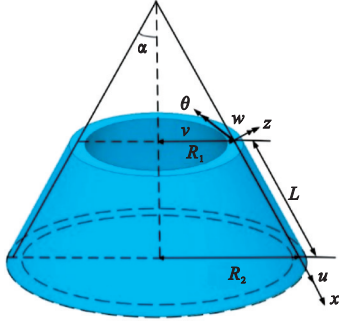


图1 截断圆锥壳模型

Fig. 1 Truncated conical shell

## 2.1 吸湿老化影响下 NFRC 理论模型

天然纤维内含有大量羟基, 具有极强的亲水性, 会在潮湿环境下发生吸湿老化现象, 本文采用考虑界面损伤与纤维退化影响的 NFRC 理论模型, 相关材料参数<sup>[11]</sup> 选取为  $E_{11}=3G\hat{\alpha}+4\eta G\hat{\beta}$ ,  $E_{22}=3G\hat{\alpha}+4\eta G\hat{\beta}/[1+\eta(\hat{\beta}/\hat{\alpha})]$ ,  $G_{12}=G_{21}=G\hat{\alpha}$ ,  $\nu_{21}=\hat{\alpha}/[2(\hat{\alpha}+\eta\hat{\beta})]$ 。式中,  $E_{11}$  与  $E_{22}$  为杨氏模量;  $G_{12}$  与  $G_{21}$  为剪切模量;  $\nu_{21}$  为泊松比;  $\hat{\alpha}=1-f^2\bar{\beta}_s\gamma_s-f^3\bar{\beta}_l\gamma_l$  和  $\hat{\beta}=f(1-\chi_s\gamma_s)$  为描述材料老化过程的函数, 其中  $\gamma_s=1-e^{-\eta/G\lambda}$  与  $\gamma_l=1-e^{-fTt}-fTte^{-fTt}$  为描述时间影响的函数;  $f$  为纤维含量,  $\lambda$  为能量耗散速率,  $t$  为老化时间。

## 2.2 截断圆锥壳的基本方程

由 Donnell 壳体理论可知, 圆锥壳内部任意一点应变分量可以表示为

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\chi} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{e} = \{e_x, e_\theta, e_{x\theta}\}^T$  为应变向量,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{x\theta}\}^T$  为中面上各点应变分量,  $\boldsymbol{\chi} = \{\chi_x, \chi_\theta, \chi_{x\theta}\}^T$  为相应的曲率分量。  $\boldsymbol{\varepsilon}$  与  $\boldsymbol{\chi}$  的非线性几何关系可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} + w_{,x}^2/2 \\ \varepsilon_\theta = v_{,\theta}/(x \sin\alpha) + u/x + w/(x \tan\alpha) + w_{,\theta}^2/2 \\ \varepsilon_{x\theta} = u_{,\theta}/(x \sin\alpha) + v_{,x}/x - v/x + w_{,x}w_{,\theta}/(x \sin\alpha) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $(\ )_{,x} = \partial(\ )/\partial x$ ,  $(\ )_{,\theta} = \partial(\ )/\partial \theta$ ,  $(\ )$  为任意函数。

$$\begin{cases} \chi_x = -w_{,xx} \\ \chi_\theta = -w_{,x\theta}/(x \sin\alpha)^2 - w_{,x}/x \\ \chi_{x\theta} = -w_{,x\theta}/(x \sin\alpha) + w_{,\theta}/(x^2 \sin\alpha) \end{cases} \quad (6)$$

本构关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_\theta \\ e_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中 弹性系数  $Q_{11}=E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21})$ ,  $Q_{12}=Q_{21}=\nu_{21}Q_{11}$ ,  $Q_{66}=E_{22}/[2(1+\nu_{12})]$ 。

壳体内部所受合力向量  $\mathbf{N} = \{N_x, N_\theta, N_{x\theta}\}^T$  与弯矩向量  $\mathbf{M} = \{M_x, M_\theta, M_{x\theta}\}^T$  可以表示为

$$\{\mathbf{N}, \mathbf{M}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} \{1, z\} dz \quad (8)$$

将式(7)代入式(8)可得内力与位移关系为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\chi} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$  分别为拉伸刚度矩阵、耦合刚度矩阵和弯曲刚度矩阵, 其分量可以表示为

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, z^2\} dz \quad (10)$$

由 Donnell 壳体理论可以建立截断圆锥壳的非线性平衡方程为

$$\sin\alpha(xN_x)_{,x} + N_{x\theta,\theta} + \sin\alpha(N_x - N_\theta) = 0 \quad (11)$$

$$N_{\theta,\theta} + x\sin\alpha N_{x\theta,x} + 2\sin\alpha N_\theta = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & x\sin\alpha M_{x,xx} + M_{\theta,\theta\theta}/(x \sin\alpha) - M_{\theta,x} + \\ & 2(\sin\alpha M_{x,x} + M_{x\theta,\theta} + M_{x\theta,\theta}/x) - \\ & \cos\alpha N_\theta + (x\sin\alpha N_x w_{,x} + N_{x\theta} w_{,\theta})_{,x} + \\ & [N_{x\theta} w_{,x} + N_\theta w_{,\theta}/(x \sin\alpha)] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

引入 Airy 应力函数  $F$  简化方程(11,12), 得

$$N_x = F_{,\theta\theta}/(x \sin\alpha)^2 + F_{,x}/x$$

$$N_\theta = F_{,xx}$$

$$N_{x\theta} = -F_{,x\theta}/x \sin\alpha + F_{,\theta}/(x^2 \sin\alpha) \quad (14)$$

为满足 Airy 应力函数, 需补充一个相容条件使得上述等式在没有外力作用的条件下始终满足。通过消除方程(11,12)的位移  $u$  与  $v$ , 可推得

$$\begin{aligned} & \sin\alpha \varepsilon_{x,x} - \varepsilon_{\theta,\theta\theta}/(x \sin\alpha) - x \sin\alpha \varepsilon_{\theta,xx} - 2\sin\alpha \varepsilon_{\theta,x} + \\ & \varepsilon_{x\theta,x\theta} + \varepsilon_{x\theta,\theta}/x = -w_{,\theta}^2/(x^3 \sin\alpha) + 2w_{,\theta}w_{,x\theta}/ \\ & (x^2 \sin\alpha) - w_{,x\theta}^2/(x \sin\alpha) + [-\cos\alpha + \\ & w_{,\theta\theta}/(x \sin\alpha) + \sin\alpha w_{,x}]w_{,xx} \end{aligned} \quad (15)$$

此时控制方程可改写为由  $F$  与  $w$  表示的状态方程

$$\begin{aligned} & \delta_1 F_{,\theta\theta} + \delta_2 w_{,\theta\theta} + \delta_3 F_{,\theta\theta\theta\theta} + \delta_4 w_{,\theta\theta\theta\theta} + \delta_5 F_{,x} + \\ & \delta_6 w_{,x} + \delta_7 F_{,x\theta\theta} + \delta_8 w_{,x\theta\theta} + \delta_9 F_{,xxx} + \delta_{10} w_{,xxx} + \\ & \delta_{11} F_{,xx\theta\theta} + \delta_{12} w_{,xx\theta\theta} + \delta_{13} F_{,xxx} + \delta_{14} w_{,xxx} + \\ & \delta_{15} F_{,xxxx} + \delta_{16} w_{,xxxx} + \delta_{17} w_{,\theta}^2 + \delta_{18} w_{,x\theta}^2 + \\ & \delta_{19} w_{,\theta}w_{,x\theta} + \delta_{20} w_{,x}w_{,xx} + \delta_{21} w_{,\theta\theta}w_{,xx} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{22} F_{,\theta}w_{,\theta} + \delta_{23} F_{,\theta\theta} + \delta_{24} w_{,\theta\theta} + \delta_{25} F_{,\theta\theta\theta\theta} + \\ & \delta_{26} w_{,\theta\theta\theta\theta} + \delta_{27} F_{,x} + \delta_{28} w_{,x} + \delta_{29} F_{,x\theta}w_{,\theta} + \\ & \delta_{30} F_{,\theta}w_{,x\theta} + \delta_{31} F_{,x\theta}w_{,x\theta} + \delta_{32} F_{,x\theta\theta} + \delta_{33} w_{,x\theta\theta} + \\ & \delta_{34} F_{,xxx} + \delta_{35} F_{,xxx}w_{,\theta\theta} + \delta_{36} F_{,xxx}w_{,x} + \delta_{37} w_{,xxx} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{38} F_{, \theta \theta} w_{, x x} + \delta_{39} F_{, x} w_{, x x} + \delta_{40} F_{, x x \theta \theta} + \delta_{41} w_{, x x \theta \theta} + \\ & \delta_{42} F_{, x x x} + \delta_{43} w_{, x x x} + \delta_{44} F_{, x x x x} + \delta_{45} w_{, x x x x} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

式中系数  $\delta_i$  可由平衡方程(13)推得。

### 2.3 前屈曲效应

在经典的弹性本征值屈曲问题中,前屈曲阶段通常采用均匀变形假设,认为壳体在前屈曲过程边界条件是自由的。然而,在实际屈曲过程中,壳体的端部受到约束,均匀变形假设会导致求解临界屈曲载荷的误差较大。因此,本文考虑前屈曲阶段发生满足边界条件的非线性轴对称前屈曲变形,当壳体承受轴向载荷处在临界屈曲失稳状态时,基本变量可以分为两部分,即

$$\{F, w\}^T = \{F_0, w_0\}^T + \{F_1, w_1\}^T \quad (18)$$

式中下角标 0 代表屈曲前发生的变形,1 代表临界屈曲状态时发生的变形。由轴对称变形可知,前屈曲变形阶段挠度函数为只与  $x$  相关的函数,即  $w_0 = w_0(x)$ 。将式(18)代入到状态方程(16, 17)中,消除过小的非线性项,即可得到前屈曲控制方程与屈曲控制方程。考虑壳体所受载荷为轴向载荷  $P$ , 临界屈曲前结构存在内力  $N_{x0}, N_{\theta 0}$  与  $N_{x\theta 0}$ , 则前屈曲阶段控制方程可简化为

$$\begin{aligned} & \xi_1 N_{\theta 0} + \xi_2 w_{0, x} + \xi_3 N_{x0} w_{0, x} + \xi_4 w_{0, x x} + \\ & \xi_5 w_{0, x x x} + \xi_6 w_{0, x x x x} + \xi_7 N_{\theta 0, \theta} + \\ & \xi_8 N_{x\theta 0, \theta} w_{0, x} + \xi_9 N_{x0, \theta \theta} + \\ & \xi_9 N_{x0} w_{0, x x} + \xi_{10} N_{\theta 0, \theta \theta} + \xi_{11} N_{x0, x} + \\ & \xi_{12} N_{x0, x} w_{0, x} + \xi_{13} N_{\theta 0, x} + \xi_{14} N_{x\theta 0, x \theta} + \\ & \xi_{15} N_{x0, x x} + \xi_{16} N_{\theta 0, x x} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

临界屈曲状态时的控制方程为

$$\begin{aligned} & \delta_1 F_{1, \theta \theta} + \delta_2 w_{1, \theta \theta} + \delta_3 F_{1, \theta \theta \theta \theta} + \delta_4 w_{1, \theta \theta \theta \theta} + \\ & \delta_5 F_{1, x} + \delta_6 w_{1, x} + \delta_7 F_{1, x \theta \theta} + \delta_8 w_{1, x \theta \theta} + \\ & \delta_9 F_{1, x x} + \delta_{10} w_{1, x x} + \delta_{11} F_{1, x x \theta \theta} + \delta_{12} w_{1, x x \theta \theta} + \\ & \delta_{13} F_{1, x x x} + \delta_{14} w_{1, x x x} + \delta_{15} F_{1, x x x x} + \delta_{16} w_{1, x x x x} + \\ & \delta_{20} (w_{0, x} w_{1, x x} + w_{1, x} w_{0, x x}) + \delta_{21} w_{1, \theta \theta} w_{0, x x} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{22} N_{x\theta 0} w_{1, \theta} / (x^2 \sin \alpha) + \delta_{23} F_{1, \theta \theta} + \delta_{24} w_{1, \theta \theta} + \\ & \delta_{25} F_{1, \theta \theta \theta \theta} + \delta_{26} w_{1, \theta \theta \theta \theta} + \delta_{27} F_{1, x} + \delta_{28} w_{1, x} + \\ & \delta_{30} N_{x\theta 0} w_{1, x \theta} / (x^2 \sin \alpha) + \delta_{32} F_{1, x \theta \theta} + \delta_{33} w_{1, x \theta \theta} + \\ & \delta_{34} F_{1, x x} + \delta_{36} (N_{\theta 0} w_{1, x} + w_{0, x} F_{1, x x}) + \delta_{37} w_{1, x x} + \\ & \delta_{38} F_{1, \theta \theta} w_{0, x x} + \delta_{39} (F_{1, x x} w_{0, x x} + x N_{x0} w_{1, x x}) + \\ & \delta_{40} F_{1, x x \theta \theta} + \delta_{41} w_{1, x x \theta \theta} + \delta_{42} F_{1, x x x} + \delta_{43} w_{1, x x x} + \\ & \delta_{44} F_{1, x x x x} + \delta_{45} w_{1, x x x x} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

考虑简支边界,因此截断圆锥壳边界条件为

$$v = w = 0, w_{, x x} = 0 \quad (x = x_0, x_0 + L) \quad (22)$$

## 3 基于伽辽金法的求解过程

### 3.1 前屈曲变形求解

在本文采用的轴对称前屈曲变形中,挠度函数为只与  $x$  相关的函数,结合简支边界条件可假设前屈曲变形挠度试函数为

$$w_0 = \sum_p a_p \sin[p\pi(x - x_0)/L] \quad (23)$$

式中  $p = 1, 3, 5, \dots$ ,  $a_p$  为待定系数。

采用伽辽金法将  $w_0$  代入控制方程(19),可得

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \Theta(w_0) \sin[p\pi(x - x_0)/L] dx = 0 \quad (24)$$

其中  $\Theta(w_0)$  为前屈曲阶段控制方程(19)的表达式,积分后得到一组非齐次线性方程

$$\mathbf{A}_0 \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\zeta}_0 = 0 \quad (25)$$

式中  $\mathbf{A}_0, \boldsymbol{\zeta}_0$  分别为积分所得的常系数矩阵和向量,  $\boldsymbol{\eta} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_p\}^T$  为待求系数向量。求解该齐次线性方程组可以得到给定轴向载荷  $P$  作用下前屈曲变形的挠度表达式。

### 3.2 屈曲变形求解

假设屈曲模态的周向波数为  $n$ , 由简支边界条件可知,屈曲阶段挠度试函数可以展开为

$$w_1 = \cos(n\theta/2\pi) \sum_q b_q \sin[q\pi(x - x_0)/L] \quad (26)$$

式中  $q = 1, 3, 5, \dots, a_q$  为待定系数。将试函数(26)代入到临界屈曲状态控制方程(20)中,可推得 Airy 应力函数  $F$  应满足的关系式

$$\begin{aligned} & \delta_1 F_{1, \theta \theta} + \delta_3 F_{1, \theta \theta \theta \theta} + \delta_5 F_{1, x} + \delta_7 F_{1, x \theta \theta} + \delta_9 F_{1, x x} + \\ & \delta_{11} F_{1, x x \theta \theta} + \delta_{13} F_{1, x x x} + \delta_{15} F_{1, x x x x} = \\ & - [\delta_2 w_{1, \theta \theta} + \delta_4 w_{1, \theta \theta \theta \theta} + \delta_6 w_{1, x} + \delta_8 w_{1, x \theta \theta} + \\ & \delta_{10} w_{1, x x} + \delta_{12} w_{1, x x \theta \theta} + \delta_{14} w_{1, x x x} + \delta_{16} w_{1, x x x x} + \\ & \delta_{20} (w_{0, x} w_{1, x x} + w_{1, x} w_{0, x x}) + \delta_{21} w_{1, \theta \theta} w_{0, x x}] \end{aligned} \quad (29)$$

整理可得

$$\begin{aligned} F_1 = & \sum_{p+q} f_s \sin[(p+q)\pi(x - x_0)/L] + \\ & \sum_{p+q} f_c \cos[(p+q)\pi(x - x_0)/L] \end{aligned} \quad (30)$$

式中  $f_s$  和  $f_c$  是由前屈曲变形过程中求出的系数  $a_p$  与屈曲变形过程待求系数  $b_q$  构成的系数。采用伽辽金法将  $w_0$  与  $F_1$  代入临界屈曲状态时的控制方程(23)求解,可得

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \int_0^{2\pi} \Gamma(\omega_1, F_1) \sin[q\pi(x-x_0)/L] \times \cos(n\theta/2\pi) dx d\theta = 0 \quad (31)$$

式中  $\Gamma(\omega_1, F_1)$  代表临界屈曲状态时控制方程(23)的表达式,积分后可以得到齐次线性方程

$$\mathbf{\Lambda}_1 \boldsymbol{\kappa} = 0 \quad (32)$$

式中  $\mathbf{\Lambda}_1$  为包含轴向载荷  $P$  的系数矩阵,  $\boldsymbol{\kappa} = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_q\}$  为待定系数向量。在给定周向波数  $n$  的条件下,轴向载荷  $P$  存在非平凡解的条件为

$$|\mathbf{\Lambda}_1| = 0 \quad (33)$$

利用式(33)可以确定临界屈曲载荷  $P_{cl}$ 。

## 4 算例分析

### 4.1 对比例例

在现有文献中,尚未有关于考虑轴对称前屈曲变形的截断圆锥壳屈曲问题结果,因此本文首先与考虑前屈曲变形圆柱壳的屈曲结果<sup>[15]</sup>进行对比。材料参数和几何参数选取为  $E = 200 \times 10^3$  MPa,  $\nu = 0.3$  和  $R_1/h = 100$ 。图2给出了  $z = 10$  与  $z = 20$ , 半顶角从  $10^\circ$  到  $1^\circ$  的截断圆锥壳和圆柱壳的临界载荷的变化曲线,其中  $z = \sqrt{1-\nu^2} L^2 / \bar{R} h$  为 Batdorf 参数。可以发现,半顶角度数减少时,圆锥壳的临界载荷逐渐靠近圆柱壳临界屈曲载荷值,在半顶角为  $1^\circ$  时相差小于  $0.1\%$ 。此外,为验证屈曲模态的正确性,将本方法获得屈曲模态与有限元结果进行对比验证。其中有限元分析通过 Abaqus 6.14 获得(采用 S4R 壳单元,选取显示动力学分析步进行缓慢位移加载)。考虑一个半顶角为  $30^\circ$  的截断圆锥壳,材料参数同上。临界载荷对比列入表1,表中 FEM 代表有限元计算结果,Present 代表本方法计算结果。当几何参数为  $L/R_1 = 0.5$ ,  $h/R_1 = 0.01$  时,前屈曲变形与临界屈曲模态对比如图3所示。可以看到,本文获得的前屈曲变形、屈曲模态皆与有限元分析结果一致,临界屈曲载荷对比较好,证明本文可以准确预测截断圆锥壳的屈曲模态。

表1 截断圆锥壳临界载荷对比

Tab.1 Comparison table of critical loads for truncated conical shells

$F_{\sigma}/\text{MPa}$		$L/R_1 = 0.5$	$L/R_1 = 1.0$	$L/R_1 = 2.0$
$h/R_1 = 0.01$	FEM	55.558	51.608	52.525
	Present	52.540	48.468	50.580
$h/R_1 = 0.02$	FEM	222.930	192.927	213.149
	Present	208.481	180.928	199.110

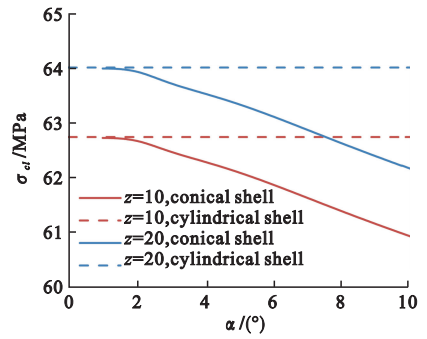


图2 截断圆锥壳与圆柱壳的临界轴压屈曲载荷对比  
Fig.2 Comparison of critical axial buckling loads between truncated conical shell and cylindrical shell

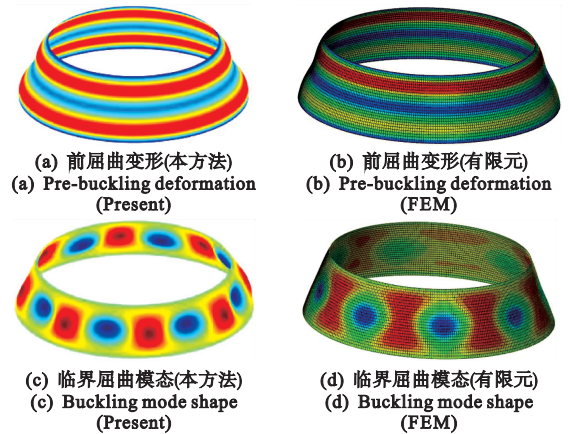


图3 截断圆锥壳前屈曲变形和屈曲模态对比

Fig.3 Comparison of pre-buckling deformations and buckling mode shapes for truncated conical shell

### 4.2 吸湿老化影响参数分析

分析不同情况下吸湿老化对于 NFRC 截断圆锥壳临界屈曲载荷的影响。考虑一个单向剑麻纤维增强苜蓿基木材复合材料截断圆锥壳,在水浴加热条件下,其相关材料参数为  $\eta = 90.87$ ,  $\bar{\beta}_s = 7.3459$ ,  $\bar{\beta}_i = 200.0104$ ,  $\chi_s = 0.6171$ ,  $T = 0.1 \text{ h}^{-1}$ ,  $\lambda = 4.944 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1} \text{ s}^{-1}$  和  $G = 104 \text{ MPa}$ <sup>[9]</sup>。

图4给出了不同纤维含量下 NFRC 截断圆锥壳临界载荷随老化时间的变化曲线,计算参数选取为  $L/R_1 = 1$ ,  $h/R_1 = 0.01$ ,  $\alpha = 30^\circ$ 。可以看出,纤维含量是影响吸湿老化过程的关键因素,并且纤维含量越高,临界载荷受吸湿老化影响越严重。在  $f = 0.15$  时,临界屈曲载荷在老化后仅为初始的  $25\%$  左右,低于基体本身构成结构的屈曲载荷。此外还可以发现,临界屈曲载荷在老化初始阶段随时间增加而快速降低,在一定时间后下降速度逐渐减缓,最后趋于稳定。 $t = 300 \text{ h}$  时对应的临界屈曲载荷曲线趋于平缓,说明此时吸湿老化过程基本完成,材料参数趋于稳定。



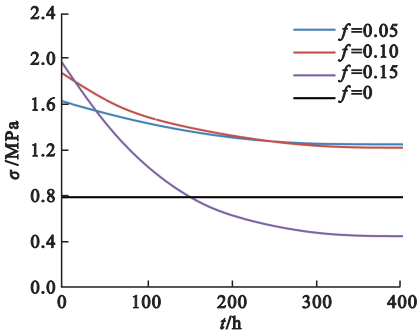


图4 不同纤维含量下临界载荷随老化时间的变化曲线  
Fig. 4 Variations of critical loads versus aging time for various  $f$

针对临界载荷变化最大的情况( $f=0.15$ )进行结构变形分析,图5给出了 $t=0$  h与 $t=400$  h时老化前后的前屈曲变形。通过对比可以发现,前屈曲纵向波数在老化过程中发生了改变,前屈曲变形产生了明显的变化。相比 $t=0$  h时的前屈曲变形, $t=400$  h时的前屈曲变形挠度位移更大。该现象表明,吸湿老化导致材料力学性能变化不仅仅直接造成了临界载荷下降,同时也导致了前屈曲变形的改变,更大的前屈曲变形位移加快了结构整体屈曲的发生,共同导致了临界载荷的快速下降。

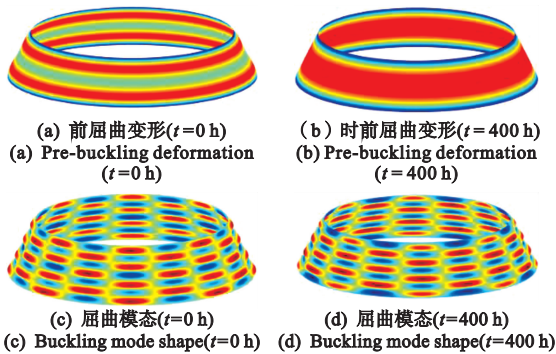


图5 老化前后 NFRC 截断圆锥壳屈曲模态对比  
( $f=0.15$ )

Fig. 5 Comparison of buckling modes for NFRC truncated conical shells before and after aging ( $f=0.15$ )

图6给出了不同几何参数下 NFRC 截断圆锥壳临界载荷随老化时间的变化情况。当 $h/R_1=0.01$ 和 $L/R_1=1$ 时,不同半顶角情况下截断圆锥壳临界载荷随老化时间变化情况如图6(a)所示。可以看到,半顶角越大时,临界屈曲模态越小;不同半顶角下吸湿老化对圆锥壳临界载荷影响的差异可以忽略不计。当 $R_2/h=200$ 固定时,不同截断位置对应截断圆锥壳临界载荷随老化时间变化情况如图6(b)所示。图中临界载荷最大的曲线为红色,此时 $L/h=200, R_1/h=100$ 。该现象表明,截断所留结构越长,其平均半径越小,因此截断圆锥壳存在临界屈曲载荷上的最优截断长度。

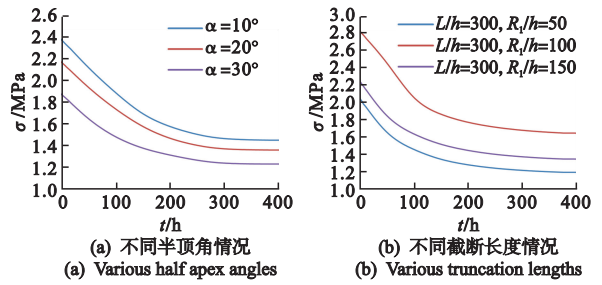


图6 不同几何参数下临界载荷随老化时间的变化曲线  
Fig. 6 Variations of critical loads for various geometric parameters

## 5 结论

本文在 NFRC 截断圆锥壳的屈曲分析中引入非线性轴对称的前屈曲变形,提出一种精确的理论求解方法,获得高精度的临界载荷和对应解析的屈曲模态。数值算例分析了主要参数对 NFRC 截断圆锥壳屈曲行为的影响,主要结论如下,(1)提高天然纤维含量可以增加 NFRC 截断圆锥壳初始临界屈曲载荷大小,但也会加重材料吸湿老化的影响,过高纤维含量可能会导致壳体抗屈曲能力低于基体自身结构;(2)老化过程不仅仅通过材料力学性能的下降影响壳体结构的临界屈曲载荷,还会改变前屈曲阶段的变形情况,导致结构临界屈曲载荷下降;(3)壳体几何变化不会对吸湿老化过程产生影响,但是合理选取壳体截断长度可以提高结构的抗屈曲性能。

## 参考文献(References):

- [1] Faruk O, Bledzki A K, Fink H P, et al. Progress report on natural fiber reinforced composites[J]. *Macromolecular Materials and Engineering*, 2014, **299** (1): 9-26.
- [2] 唐平,曹红锦,李佳蒙,等.天然植物纤维增强复合材料抗弹性研究[J]. *兵器装备工程学报*, 2020, **41** (8): 222-227. (TANG Ping, CAO Hong-jin, LI Jia-meng, et al. Study on elastic resistance of natural plant fiber reinforced composites[J]. *Journal of Ordnance Equipment Engineering*, 2020, **41** (8): 222-227. (in Chinese))
- [3] Waddar S, Pitchaimani J, Doddamani M, et al. Buckling and vibration behaviour of syntactic foam core sandwich beam with natural fiber composite facings under axial compressive loads[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2019, **175**: 107133.
- [4] 张峻铭,杨伟东,李岩.人工智能在复合材料研究中的应用. *力学进展*, 2021, **51**(4): 865-900. (Zhang Jun-

- ming, Yang Wei-dong, Li Yan. Application of artificial intelligence in composite materials [J]. *Advances in Mechanics*, 2021, **51**(4): 865-900. (in Chinese))
- [5] Chow C P L, Xing X S, Li R K Y. Moisture absorption studies of sisal fibre reinforced polypropylene composites [J]. *Composites Science and Technology*, 2007, **67**(2): 306-313.
- [6] Fuqua M A, Huo S S, Ulven C A. Natural fiber reinforced composites [J]. *Polymer Reviews*, 2012, **52**(3): 259-320.
- [7] 边佳燕, 刘 钧, 鲍 铮. 聚合物基复合材料吸湿研究进展 [J]. 材料导报, 2016, **30**(S2): 340-344. (BIAN Jia-yan, LIU Jun, BAO Zheng. Research progress in moisture absorption of polymer matrix composites [J]. *Materials Reports*, 2016, **30**(S2): 340-344. (in Chinese))
- [8] Mejri M, Toubal L, Cuillière J C, et al. Hygrothermal aging effects on mechanical and fatigue behaviors of a short-natural-fiber-reinforced composite [J]. *International Journal of Fatigue*, 2018, **108**: 96-108.
- [9] Chaudhary V, Bajpai P K, Maheshwari S. Effect of moisture absorption on the mechanical performance of natural fiber reinforced woven hybrid bio-composites [J]. *Journal of Natural Fibers*, 2020, **17**(1): 84-100.
- [10] Pan Y H, Zhong Z. A nonlinear constitutive model of unidirectional natural fiber reinforced composites considering moisture absorption [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, **69**: 132-142.
- [11] Pan Y H, Zhong Z. Modeling of the mechanical degradation induced by moisture absorption in short natural fiber reinforced composites [J]. *Composites Science and Technology*, 2014, **103**: 22-27.
- [12] Wang K F, Wang B L. A mechanical degradation model for bidirectional natural fiber reinforced composites under hydrothermal ageing and applying in buckling and vibration analysis [J]. *Composite Structures*, 2018, **206**: 594-600.
- [13] Xu C H, Rong D L, Zhou Z H, et al. Vibration and buckling characteristics of cracked natural fiber reinforced composite plates with corner point-supports [J]. *Engineering Structures*, 2020, **214**: 110614.
- [14] 张俊霖, 倪一文, 李庆东, 等. 吸湿老化影响下天然纤维增强复合圆柱壳屈曲分析的辛方法 [J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(12): 1238-1247 (ZHANG Jun-lin, NI Yi-wen, LI Qing-dong, et al. A symplectic approach for buckling analysis of natural fiber reinforced composite shells under hygrothermal aging [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(12): 1238-1247. (in Chinese))
- [15] Yamaki N, Simitses G J. Elastic stability of circular cylindrical shells [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, **52**(2): 501-502.

## Accurate buckling analysis of natural fiber reinforced conical shell under effects of hygroscopic aging

ZHANG Jun-lin, NIE Xue-yang, WANG Ya-jing, SU Xin, ZHOU Zhen-huan\*

(State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** Natural fiber-reinforced materials (NFRC) will inevitably show hygroscopic aging behavior in a humid environment, which seriously affects the stability of such materials and structures. To solve this issue, an accurate method for buckling of NFRC truncated conical shells is proposed in this paper by introducing the nonlinear pre-buckling effect. Firstly, the buckling governing equations of NFRC conical shells are derived based on Donnell shell theory. Secondly, the Galerkin method is employed to determine the nonlinear axisymmetric pre-buckling deformation. On this basis, accurate critical buckling loads and analytical buckling modes are obtained. Finally, the accuracy of the proposed method is verified by comparing with reference solutions and numerical simulations. The effects of hygroscopic aging effects on buckling behaviors of NFRC truncated conical shells are discussed. The presented results provide a theoretical basis for the anti-buckling design of NFRC truncated conical shells.

**Key words:** conical shell; buckling; natural fiber reinforced material; hygrothermal aging