

DOI: 10.7511/jslx20231116001

含唇形延伸裂缝的磁电弹性体的反平面问题

郭宗华¹, 郭怀民^{*2}

(1. 山东大学, 数学科学学院, 济南 250000; 2. 包头师范学院, 数学科学学院, 包头 014030)

摘要:磁电弹性材料是一种新型智能材料,广泛应用于智能器件和设备的制造和安装。本文基于 Muskhelishvili 理论,构建了唇形延伸裂缝的缺陷模型。利用保角变换技术和 Stroh 型公式,研究了含唇形延伸裂缝的磁电弹性材料的力学行为,得出了部分磁电渗透边界条件下裂缝端点处场强度因子和能量释放率的解析表达式。数值算例描述了缺陷的几何尺寸、耦合系数对磁、电、弹性场 SIF 和 SERR 的影响规律。结果表明,增加裂缝的长度会促进扩展,增加唇口的高度会抑制裂缝的扩展。当唇口两边的延伸裂缝长度变为零时,所得结果可退化为经典的唇口裂纹问题,当唇口的高度变为零时,结果可退化为 Griffith 裂纹问题,进一步检验了结论的正确性和有效性。

关键词:磁电弹性体;唇形延伸裂缝;场强度因子;能量释放率;保角变换

中图分类号:TB330.1;O346.1

文献标志码:A

文章编号:1007-4708(2025)01-0068-07

1 引言

磁电弹性(MEE)材料具有磁电耦合效应,常作为智能材料以实现力、电、磁之间的转换。在制造磁场探测、电包装、声学、医疗传感器和制动器等智能电子产品时常用到该材料。有些晶体在磁场中可能会定向极化, Landau 等^[1]指出磁有序晶体存在磁电效应。MEE 材料的独特优势在于力、电和磁的耦合特性,即能够在弹性、电场和磁场之间进行能量转化^[2],在微机电系统、传感技术等领域应用广泛。然而,在制造电子设备时,由于结构设计的需要,往往出现一些孔洞,同时材料本身也可能会有微裂纹、位错、夹杂等缺陷。Yang 等^[3]研究了具有表面效应的 MEE 材料中含有磁电渗透型三角形纳米孔次生三个纳米裂纹的断裂问题。Zhong 等^[4]讨论了 MEE 体中含有币型裂纹问题,文献^[5]解决了 MEE 材料中正 $4n$ 边形纳米孔次生 4 条裂纹问题。这些缺陷在受到磁、电和力载荷时,器件会因应力集中而受损甚至失去功能。MEE 材料的断裂问题^[6-10]不仅要考虑力与电的耦合效应,还要考虑力和磁、磁与电的耦合效应,因而研究起来较压电等单向材料要复杂得多。常见的

边界条件有磁电全渗透型和磁电全非渗透型^[11], Rogowski^[12]探讨了 MEE 材料中椭圆孔边裂纹问题,给出了磁电全非渗透型边界条件和磁电全渗透型边界条件下的裂尖处应力强度因子(SIF)和能量释放率(SERR)的封闭形式解。为了讨论 MEE 材料的断裂问题,还要考虑其边界条件和断裂准则。

比较常用的断裂准则是场强度因子^[13,14]、能量密度因子^[15-18]和能量释放率^[19-21]。文献^[22]研究了压电材料中椭圆孔次生两条不对称裂纹问题,而对于更加贴近实际缺陷的唇形延伸裂缝的断裂模型至今未见报道。图 1 描述了包头市稀土研究院所属企业生产的磁电材料中存在的唇形裂缝缺陷,为了进行无损探测,用数学方法和力学理论对含唇形裂缝缺陷的磁电弹性材料的断裂过程作理论分析和定量描述,具有重要意义。

本文在文献^[22]的启发下,推出了唇形裂缝的外部区域到单位圆外部区域的拱形变换函数,计算出了 SIF 和 SERR 的解析表达式。通过数值计算描述了缺陷的几何形状对磁、电和弹性场 SIF 和 SERR 的影响规律。

收稿日期:2023-11-16;修改稿收到日期:2024-12-20.

基金项目:国家自然科学基金(12162027;12361076);内蒙古自然科学基金(2021MS01001)资助项目.

作者简介:郭怀民^{*}(1969-),男,博士,教授(E-mail:ghmin@163.com).

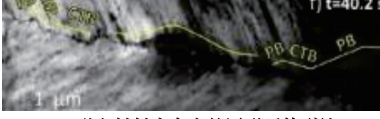
引用本文:郭宗华,郭怀民.含唇形延伸裂缝的磁电弹性体的反平面问题[J].计算力学学报,2025,42(1):68-74.

GUO Zong-hua, GUO Huai-min. Antiplane problem of magnetoelectric elastomers with lip shaped extended cracks [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2025, 42(1): 68-74.

2 基本方程

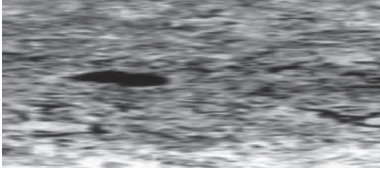
2.1 理论模型

将 MEE 材料中含有的图 1 所示的缺陷模拟成图 2 所示的缺陷模型。



(a) 磁电材料中存在的唇形延伸裂缝

(a) Lip shaped extension cracks in magnetolectric materials



(b) 显微镜下铁电复合材料中存在的唇口

(b) Lip opening in ferroelectric composite materials under a microscope

图 1 磁电材料中存在的唇形裂缝缺陷

Fig. 1 Pore and crack defects in magnetolectric materials

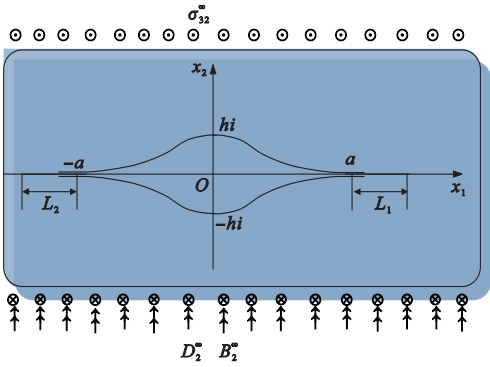


图 2 唇形延伸裂缝缺陷模型

Fig. 2 Lip shaped orifice with two asymmetric secondary cracks

为了方便研究问题,建立空间直角坐标系,并将电磁极化方向记为 x_3 轴方向,在 x_1Ox_2 平面上各向同性,本构方程可表示为

$$[\sigma_{3j} \quad D_j \quad B_j]^T = C_0 [u_{3,j} \quad \varphi_{,j} \quad \Psi_{,j}]^T \quad (1)$$

其中

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} \\ e_{15} & -\kappa_{11} & -d_{11} \\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix} \text{ 且为非奇异矩阵,}$$

u, φ, Ψ 分别表示位移、电势和磁势; σ_{3j}, D_j, B_j 分别表示应力、电位移和磁感强度; q_{15}, e_{15}, d_{11} 分别表示压磁、压电和磁电耦合常数; $\mu_{11}, \kappa_{11}, c_{44}$ 分别表示压磁率、介电常数和弹性常数。

在不考虑体电荷密度、体电流和体力的作用时,平衡方程可表示为

$$\sigma_{3j,j} = 0, \quad D_{j,j} = 0, \quad B_{j,j} = 0 \quad (j=1,2) \quad (2)$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3)$$

其中 $u = [u_3, \varphi, \Psi]^T$, ∇^2 表示拉普拉斯算子。

式(3)的解可表示为

$$u = F(z) + \overline{F(z)} \quad (z = x_1 + ix_2) \quad (4)$$

其中 $F(z)$ 是解析函数向量。用字母 ϕ 表示广义应力函数向量,可得

$$-\phi_{,2} = C_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} + C_0 \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_1} \quad (5)$$

$$\phi_{,1} = C_0 \frac{\partial F}{\partial x_2} + C_0 \frac{\partial \overline{F}}{\partial x_2} \quad (6)$$

从式(5)或式(6)可得

$$\phi = iC_0 F(z) - iC_0 \overline{F(z)} \quad (7)$$

式(4)和式(7)分别可表示为如下的 Stroh 型公式

$$u = BF(z) + \overline{B F(z)} = 2\text{Re}[BF(z)] \quad (8)$$

$$\phi = CF(z) + \overline{C F(z)} = 2\text{Re}[CF(z)] \quad (9)$$

其中 $B = E, C = iC_0$, E 为 3 阶单位矩阵。

2.2 磁电全非渗透型边界情况

MEE 的势函数向量 $F(z)$ 可表示为^[23]

$$F(z) = c^\infty z + F_0(z) \quad (10)$$

其中 c^∞ 是远场载荷条件下的复常数向量, $F_0(z)$ 是待定的复函数向量, $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$ 。对于式(8,9)两边关于 x_1 求偏导,得到

$$u_{,1} = Bf(z) + \overline{B f(z)} \quad (11)$$

$$\phi_{,1} = Cf(z) + \overline{C f(z)} \quad (12)$$

其中 $f(z) = F'(z)$, 将式(10)代入式(11,12),并令 $z \rightarrow \infty$ 取极限可得

$$u_{,1}^\infty = Bc^\infty + \overline{B c^\infty} \quad (13)$$

$$\phi_{,1}^\infty = Cc^\infty + \overline{C c^\infty} \quad (14)$$

其中

$$\phi_{,1}^\infty = [\sigma_{32}^\infty, D_2^\infty, B_2^\infty]^T, u_{,1}^\infty = [\epsilon_{31}^\infty, -E_1^\infty, -H_1^\infty]^T \quad (15)$$

孔边与裂纹面的力、电磁边界条件可表示为

$$CF(z) + \overline{C F(z)} = \int_s t_s ds, \quad t_s = [t_3, -D_n, -B_n]^T \quad (16)$$

其中 t_3, D_n 和 B_n 分别代表沿内边界所受反平面剪切应力、法向电位移以及磁感应强度。假设孔内部的电场和磁场很小,采用磁、电全非渗透型边界条件,式(16)转化为

$$CF(z) + \overline{C F(z)} = 0 \quad (17)$$

由式(10,17)可得

$$CF_0(z) + \overline{C F_0(z)} = -(Cc^\infty z + \overline{C c^\infty z}) \quad (18)$$

3 解析解

3.1 拱形变换函数

为了求解式(18)的复函数向量,利用保角变换技术构建变换函数为

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ \eta(\zeta) - \frac{m}{\eta(\zeta)} + \frac{\eta(\zeta)}{\rho^2 [\eta^2(\zeta) - m]} \right\} \quad (19)$$

其中

$$\frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}, \rho = \frac{1}{1-m} (0 \leq m < 1), m = \frac{b-1}{b+1}$$

$$\eta(\zeta) = \{ \epsilon_1(\zeta+1)^2 + \epsilon_2(\zeta-1)^2 + [(\epsilon_1^2-1)(\zeta+1)^4 + 2(\epsilon_1\epsilon_2+1)(\zeta^2-1)^2 + (\epsilon_2^2-1)(\zeta-1)^4]^{1/2} \} / 4\zeta \quad (20)$$

其中

$$\epsilon_i = \frac{(1+l_i)^2 + b^2 + b + (1+l_i)\sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2}}{(1+b)(1+l_i + \sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2})} \quad (i=1,2)$$

$$\omega(1) = a + L_1 = \frac{a}{2} \left(1 + l_1 + \frac{1}{1+l_1} \right)$$

$$\omega(-1) = -(a + L_2) = -\frac{a}{2} \left(1 + l_2 + \frac{1}{1+l_2} \right)$$

式(19)将含有唇形裂缝的无限大物理平面变

$$\mu_1 = (\epsilon_1^2 - 1)(1 + \zeta)^2 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 + 1)(\zeta^2 + 1) + (\epsilon_2^2 - 1)(1 - \zeta)^2$$

$$\mu_2 = \sqrt{(\epsilon_1^2 - 1)(1 + \zeta)^4 + 2(\epsilon_1\epsilon_2 + 1)(1 - \zeta^2)^2 + (\epsilon_2^2 - 1)(1 - \zeta)^4}$$

$\omega'(\zeta)$ 在单位圆 $|\zeta| > 1$ 外解析,在闭域 $|\zeta| \geq 1$ 上连续,应用柯西积分公式得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \omega'(\infty) = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \quad (25)$$

由式(24)得到

$$\mathbf{BF}_0 = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4\zeta^2}$$

3.2 场强度因子

SIF 定义为

$$\mathbf{k} = [\kappa_\sigma, \kappa_D, \kappa_B]^T = \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{2\pi(z - z_1)} \phi_{,1}^\infty \quad (26)$$

其中 $z_1 = a + L_1$, 而 κ_σ , κ_D 和 κ_B 分别表示应力、位移和磁感应强度因子。将式(12)代入式(26)得

$$\mathbf{k} = [\kappa_\sigma, \kappa_D, \kappa_B]^T = 2 \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{2\pi(z - z_1)} \mathbf{Cf}_0(z) \quad (27)$$

其中 $\mathbf{Cf}_0(z)$ 是沿 x_1 轴实函数向量。

在 ζ 平面上,式(27)变为

$$\mathbf{k} = [\kappa_\sigma, \kappa_D, \kappa_B]^T = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow \sqrt{\omega(\zeta)} - \omega(1)} \omega(\zeta) \times \frac{\mathbf{Cf}_0(z)}{\omega'(\zeta)} \quad (28)$$

换到数学平面上的单位圆外部区域。利用复变函数理论,由式(18,19)可得

$$\mathbf{CF}_0(\sigma) + \bar{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{F}_0(\sigma)} = -(\mathbf{C}c^\infty + \bar{\mathbf{C}} \overline{c^\infty})\omega(\sigma) \quad (21)$$

由式(14,21)得

$$\mathbf{CF}_0(\sigma) + \bar{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{F}_0(\sigma)} = -\phi_{,1}^\infty \omega(\sigma) \quad (22)$$

式(22)的两边分别乘以 $d\sigma/[2\pi i(\sigma - \zeta)]$ 然后进行积分,其中 ζ 为单位圆外任一点,沿单位圆 γ 进行 Cauchy 积分得

$$\overline{\mathbf{CF}_0(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{F}_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\phi_{,1}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

在上式两边对 ζ 求导得

$$\frac{1}{\zeta^2} \overline{\mathbf{BF}_0(\zeta)} = \sum_{,1}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \quad (23)$$

其中 $f_0(\zeta) = d\mathbf{F}_0(\zeta)/d\zeta$, $\omega'(\zeta)$ 可以由式(19)求得

$$\omega'(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ 1 + \frac{m}{\eta^2(\zeta)} - \frac{\eta^2(\zeta) + m}{\rho^2 [\eta^2(\zeta) - m]^2} \right\} \eta'(\zeta) \quad (24)$$

$$\text{对式(20)求导得 } \eta'(\zeta) = \frac{\zeta^2 - 1}{4\zeta^2} \left\{ \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}$$

其中

将式(23,24)代入式(28),利用洛必达法则可得

$$\mathbf{k} = \frac{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega''(1)}} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{pmatrix} \quad (29)$$

由式(24)可得

$$\omega''(1) = \frac{a\rho}{4} \left[1 + \frac{m}{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2} - \right.$$

$$\left. \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right] \cdot \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}}$$

式(29)可进一步表示为

$$\mathbf{k} = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \sigma_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{pmatrix} K \quad (30)$$

其中 K 称为应力强度因子系数,可计算为

$$K = \frac{\sqrt{a\rho(\epsilon_1 + \epsilon_2)}}{\sqrt{\left[1 + \frac{m}{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right] \cdot \frac{(\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1^2 - 1})}{\sqrt{\epsilon_1^2 - 1}}}} \quad (31)$$

如果唇口的高度趋近于零,即 $h \rightarrow 0$, $m \rightarrow 0$, 式(31)可以化简为

$$K = \sqrt{\frac{2a + L_1 + L_2}{2}}$$

其中 $\beta = \frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}$, 与文献[24]的结果完全一致。

3.3 能量释放率

对于磁电全非渗透型裂纹,能量释放率计算公式为

$$G = \frac{1}{4} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\kappa} \quad (32)$$

其中

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{C}_0^{-1} = \frac{2}{\det \mathbf{C}_0}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11}\mu_{11} - d_{11}^2 & e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15} & \kappa_{11}q_{15} - d_{11}e_{15} \\ e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15} & -q_{15}^2 - c_{44}\mu_{11} & c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15} \\ \kappa_{11}q_{15} - d_{11}e_{15} & c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15} & -e_{15}^2 - c_{44}\kappa_{11} \end{bmatrix}$$

将式(31)代入式(32)得

$$G = \frac{\pi K^2}{2\det \mathbf{C}_0} \Pi \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} \det \mathbf{C}_0 &= c_{44}\kappa_{11}\mu_{11} - c_{44}d_{11}^2 + e_{15}^2\mu_{11} - 2e_{15}q_{15}d_{11} + \kappa_{11}q_{15}^2 \\ \Pi &= (\kappa_{11}\mu_{11} - d_{11}^2)(\sigma_{32}^\infty)^2 - (q_{15}^2 + c_{44}\mu_{11})(D_2^\infty)^2 - (e_{15}^2 + c_{44}\kappa_{11})(B_2^\infty)^2 + 2(e_{15}\mu_{11} - d_{11}q_{15})\sigma_{32}^\infty D_2^\infty \cdot (B_2^\infty)^2 + 2(\kappa_{11}q_{15} - d_{11}e_{15})\sigma_{32}^\infty B_2^\infty + 2(c_{44}d_{11} + e_{15}q_{15}) \cdot D_2^\infty B_2^\infty \end{aligned}$$

3.4 问题扩展

磁电部分渗透边界条件可表示为

$$[\sigma_{32} \quad D_2 \quad B_2]^T = [0 \quad \lambda_d D_2^0, \quad \lambda_b B_2^0]^T =$$

$$\left[0, \lambda_d (D_2^\infty - \frac{e_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty), \lambda_b (B_2^\infty) - \frac{q_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty \right]^T$$

其中 D_2^0 , B_2^0 分别表示全渗透边界条件下唇口裂纹内部的电位移分量, λ_b 和 λ_d 是表征渗透程度的参数, $0 \leq \lambda_b, \lambda_d \leq 1$ 。

磁电部分渗透边界条件下场强度因子的解析表达式为

$$k = (k^\sigma, k^D, k^B) = \sqrt{\pi} (\sigma_{32}^\infty, \Delta D_2^\infty, \Delta B_2^\infty)^T K$$

其中

$$\Delta D_2^\infty = \lambda_d D_2^\infty - D_2^0 = \frac{\lambda_d e_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty$$

$$\Delta B_2^\infty = \lambda_b (B_2^\infty - B_2^0) = \frac{\lambda_b q_{15}}{c_{44}} \sigma_{32}^\infty$$

上式可化简为

$$k = (k^\sigma, k^D, k^B) = \sqrt{\pi} \left(1, \frac{\lambda_d e_{15}}{c_{44}}, \frac{\lambda_b q_{15}}{c_{44}} \right)^T \sigma_{32}^\infty K \quad (34)$$

其中 k^σ, k^D 和 k^B 分别表示磁电部分渗透边界条件下裂尖处的 SIF、电位移 SIF 和磁感应 SIF。

当 $\lambda_b = \lambda_d = 0$ 时,磁电部分渗透边界条件就退化为全非渗透边界条件;当 $\lambda_b = \lambda_d = 1$ 时,磁电部分渗透边界条件就变成了全渗透边界条件,式(33)可化简为

$$G = \frac{\pi K^2 (\sigma_{32}^\infty)^2}{2c_{44}} \quad (35)$$

由此可见,磁电全渗透型裂纹,场强度因子只与机械载荷有关。SERR 对 SIF、机械载荷和材料常数都具有较强的依赖性。

4 数值算例

为了讨论 MEE 复合材料的断裂行为,选取复合材料 BaTiO₃-CoFe₂O₄, 其中压电相为 BaTiO₃, 压磁相为 CoFe₂O₄, 其材料常数^[25]列入表 1。

表 1 磁电弹性复合材料 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 的材料常数

Tab. 1 Material constants of magneto electro elastic composites BaTiO₃-CoFe₂O₄

c_{44} /GPa	$e_{15}/$ C · m ⁻²	$\kappa_{11}/$ C ² · N · m ⁻²	$q_{15}/$ N · A · m ⁻¹
44	5.8	56.4×10^{-10}	275
$\mu_{11}/$ N · s ² · C ⁻²	$d_{11}/$ Ns · (VC) ⁻¹	$G_{cr}/$ N · m ⁻¹	
297×10^{-6}	5.2×10^{-12}	5.0	

其中 G_{cr} 表示临界 SERR。

假设 MEE 复合材料 BaTiO₃-CoFe₂O₄ 遵循混合率^[15], 即

$$\kappa^c = \kappa^f V_f + \kappa^m (1 - V_f)$$

其中上角标 c, f 和 m 的 κ 分别表示复合材料、纤维和基体中对应的材料常数, V_f 表示压电相 BaTiO₃ 的体积分数。讨论几何形状对 SIF 和 SERR 的影响,如图 3-图 7 所示。

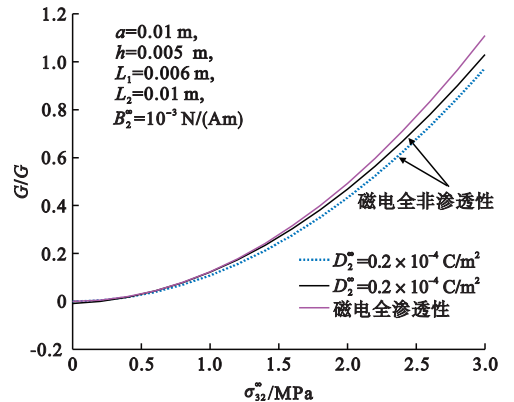


图 3 两种边界条件下机械载荷对 SERR G/G_{cr} 的影响
Fig. 3 Effects of applied mechanical loads on SERR G/G_{cr} under two boundary condition

图3描述了两种边界条件下 SERR 随机机械载荷的增大而不断增大,从而可以看出,机械载荷始终促进裂纹的扩展,与文献[22]的结论基本一致。由图4可以看出,在磁电全渗透边界条件下, SERR 随电载荷的变化可以忽略不计;在磁电全非渗透边界条件下, SERR 随电载荷的增加呈抛物型分布,先变大再减小。

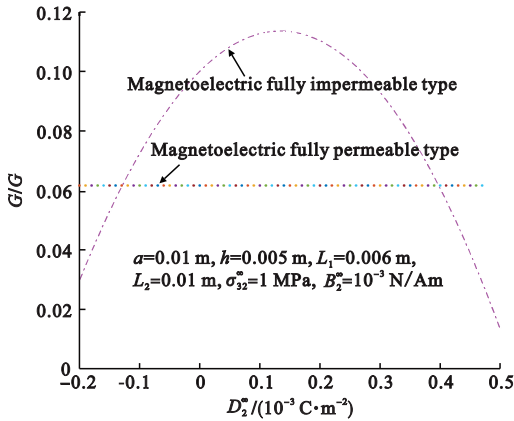


图4 两种边界条件下电载荷对 SERR G/G_{cr} 的影响
Fig. 4 Effects of applied electric loads on SERR G/G_{cr} under two boundary condition

图5描述了两种边界条件下磁载荷对 SERR 的影响规律,可知磁载荷对磁电全渗透型裂缝几乎没有影响,在磁电全非渗透型边界条件下, SERR 随电载荷的增加呈抛物型分布,因此,磁载荷对裂缝的扩展具有抑制作用。MEE 材料的介电常数表征了材料的物理性质,表示了材料对电场的响应能力,是介质中电场强度与介质中电位移密度之比。介质的极化程度越高,介电常数越大。图6为介电常数对 SERR 的影响规律,可知, SERR 随介电常数的增加而缓慢增加,从而介质的极化会促进裂缝的扩展。

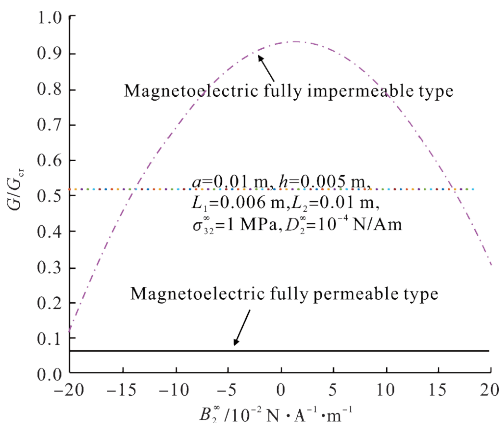


图5 两种边界条件下磁载荷对 SERR G/G_{cr} 的影响
Fig. 5 Effects of applied magnetic loads on SERR G/G_{cr} under two boundary condition

磁电耦合系数是表征固体中磁性和电性相互作用强度的物理量,用以研究材料的磁电性质和应用于磁电器件的设计和制造。图7描述了 SERR 随磁电耦合系数的变化规律,可知随着磁电耦合系数的变大, SERR 增加非常微弱,对 SERR 的影响可以忽略。图8给出了唇形左边延伸裂缝长度 L_2 不同时,右边延伸裂缝长度 L_1 对 SERR 的影响规律。可知 SERR 随唇形两边延伸裂缝长度的增加而增加。这些结果表明,唇形两端延伸裂缝的变长都会导致裂纹扩展。当唇形裂缝的长度固定时,图9给出了唇口的形状对 SERR 的影响。可知在一般情况下, SERR 随唇口高度 h 的增加而逐渐降低,最终趋近于常数,当左边延伸裂缝长度 $L_2 = 0$ 时, SERR 随右边延伸裂缝长度的增大先增大,在 $h/a = 1$ 时达到最大然后逐渐减小,最后趋近于常数。当裂缝足够长时,特别是 $h/a > 6$ 时,唇形裂缝的长度对 SERR 的影响可以忽略不计。

当 $L_1 = L_2 = 0$, 唇口模型可退化为 V 型切口, 图9结果与文献[26]的分析是完全一致的。

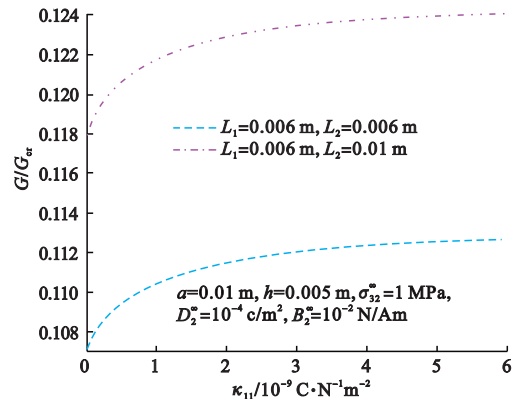


图6 介电常数 κ_{11} 对 SERR G/G_{cr} 的影响
Fig. 6 Effects of dielectric constant κ_{11} on SERR G/G_{cr} under two boundary condition

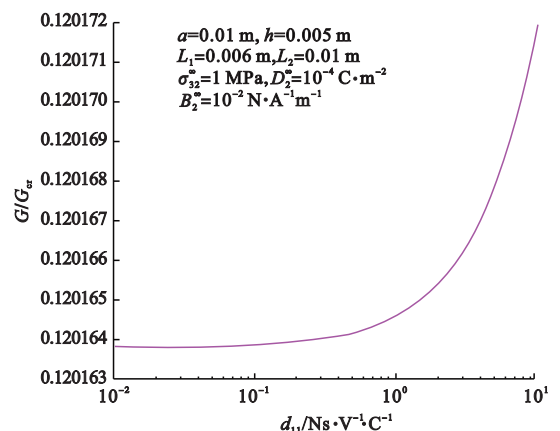
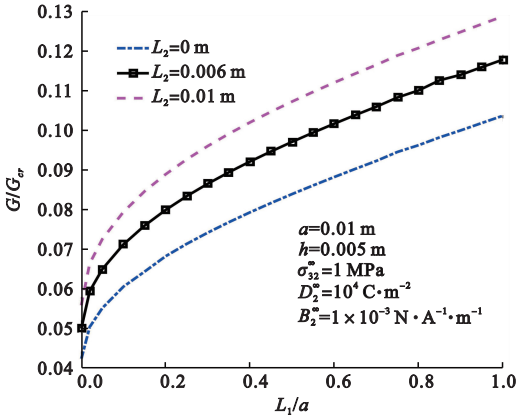
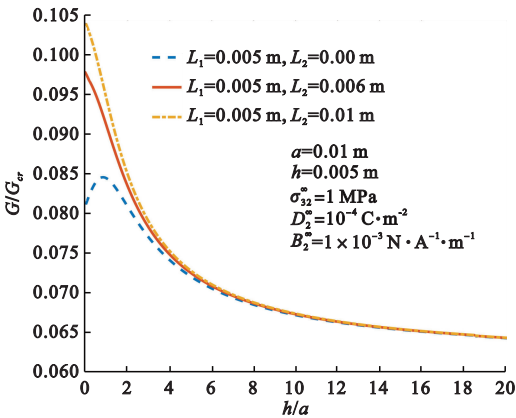


图7 磁电耦合系数 d_{11} 对 SERR G/G_{cr} 的影响
Fig. 7 Effects of magnetolectric coupling coefficient d_{11} on SERR G/G_{cr}

图8 裂纹长度对 SERR G/G_{cr} 的影响Fig. 8 Effects of crack length on SERR G/G_{cr} 图9 唇口高度对 SERR G/G_{cr} 的影响Fig. 9 Effects of lip height on SERR G/G_{cr}

5 结论

本文应用复变函数方法,结合 Muskhelishvili 理论,构建了唇形延伸裂缝模型,讨论了 MEE 材料中该缺陷模型的反平面剪切问题。得到了部分磁电渗透边界条件下裂缝端点处 SIF 和 SERR 的解析表达式。在特殊条件下,这些结果还可以退化成已有的结果,如经典的 Griffith 裂纹解和无延伸部分唇形裂缝解。得到结论如下。

(1) 当唇形裂缝不断延长时,裂纹端点处的 SERR 会不断变大,从而促进裂纹的扩展;由剪应力对称性可知,当唇形一侧的延伸裂缝长度为零时,随着唇形高度的增加,另一侧裂尖处的 SERR 都会先变大到达极值点后渐渐变小,慢慢趋向于一个稳定的常数;当唇形一边的裂缝长度较大且唇口变高时,另一侧延伸裂缝尖端处 SERR 也都会逐渐变小,从而抑制裂纹的扩展。当唇形缺陷的高度变得足够大时,裂缝两边的延伸部分对 SERR 的影响可以忽略不计。

(2) 在磁电全渗透边界条件和磁电全非渗透边

界条件下,随着机械载荷的增加,SERR 都是增加的,从而促进裂纹的扩展;在磁电全渗透边界条件下,电载荷与磁载荷对 SERR 几乎没有影响;在磁电全非渗透边界条件下,随着电载荷或磁载荷的变化,SERR 呈抛物线变化,先增大后减小。

(3) SERR 随介电常数的增加而缓慢增加,从而介质的极化会促进裂纹的扩展;随着磁电耦合系数的变大,SERR 也变大,也会促进裂纹的扩展。

本文的研究可为 MEE 材料在电子信息、交通运输、国防军工的器件制造提供数值模拟方法和性能预测,还可以应用该数学模型研究其他材料中存在的类似缺陷问题。

参考文献(References):

- [1] Landau L D, Lifshitz E M, Sykes J B, et al. Electrodynamics of continuous media [J]. *Physics Today*, 1961, **14**(10): 48-50.
- [2] Li M, Liu M R, Zhou L M. The static behaviors study of magneto-electro-elastic materials under hygrothermal environment with multi-physical cell-based smoothed finite element method[J]. *Composites Science and Technology*, 2020, **193**: 108130.
- [3] Yang D S, Liu G T. Anti-plane fracture problem of three nano-cracks emanating from a magnetoelectrically permeable regular triangle nano-hole in magneto-electroelastic materials[J]. *Modern Physics Letters B*, 2021, **35**(7): 2150127.
- [4] Zhong X C, Li X F. T-stress analysis for a Griffith crack in a magneto-electroelastic solid[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, **78**(2): 117-125.
- [5] 杨东升, 刘官厅. 磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 4 n 边形纳米孔的反平面断裂问题[J]. *物理学报*, 2020, **69**(24): 181-190. (YANG Deng-sheng, LIU Guan-ting. Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular 4n-polygon nano-hole in magneto-electroelastic materials[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(24): 181-190. (in Chinese))
- [6] Wang B L, Mai Y W. Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(2): 387-398.
- [7] Wu T L, Huang J H. Closed-form solutions for the magneto-electric coupling coefficients in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(21): 2981-3009.
- [8] Guo J H, Lu Z X. Anti-plane analysis of multiple cracks-originating from a circular hole in a magneto-electroelastic solid [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(14-15): 1847-1856
- [9] Gao C F, Kessler H, Balke H. Crack problems in magneto-electroelastic solids. Part I: Exact solution of a crack [J]. *International Journal of Engineering*

- Science*, 2003, **41**(9):969-981.
- [10] Wang B L, Mai Y W. Fracture of piezoelectromagnetic materials[J]. *Mechanics Research Communications*, 2004, **31**(1):65-73.
- [11] Tian W Y, Rajapakse R K N D. Field intensity factors of a penny-shaped crack in a magneto-electroelastic layer[J]. *Journal of Alloys and Compounds*, 2008, **449**(1-2):161-171.
- [12] Rogowski B. The mode III cracks emanating from an elliptical hole in the piezo-electro-magneto-elastic materials[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, **81**(11):1607-1620.
- [13] Spyropoulos C P. Energy release rate and path independent integral study for piezoelectric material with crack[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(3-4):907-921
- [14] Sih G C, Jones R, Song Z F. Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magneto-electroelastic materials[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, **40**(2):161-186.
- [15] Song Z F, Sih G C. Crack initiation behavior in magneto-electroelastic composite under in-plane deformation[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, **39**(3):189-207
- [16] Sih G C, Song Z F. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO₃-CoFe₂O₄ composite [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, **39**(3):209-227.
- [17] Gao C F, Zhao M H, Tong P, et al. The energy release rate and the J-integral of an electrically insulated crack in a piezoelectric material [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(19-20):2175-2192.
- [18] Singh B M, Rokne J, Dhaliwal R S. Closed-form solutions for two anti-plane collinear cracks in a magneto-electroelastic layer[J]. *European Journal of Mechanics-A/ Solids*, 2009, **28**(3):599-609.
- [19] Zhong X C, Li X F. Fracture analysis of a magneto-electroelastic solid with a penny-shaped crack by considering the effects of the opening crack interior[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2008, **46**(4):374-390.
- [20] Feng W J, Li Y S, Xu Z H. Transient response of an interfacial crack between dissimilar magneto-electroelastic layers under magneto-electromechanical impact loadings: Mode-I problem [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(18-19):3346-3356.
- [21] Fan S W, Guo J H, Yu J. Anti-plane problem of four edge cracks emanating from a square hole in piezoelectric solids [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, **30**(1):461-468.
- [22] Guo J H, Lu Z X, Han H T, et al. Exact solutions for anti-plane problem of two asymmetrical edge cracks emanating from an elliptical hole in a piezoelectric material [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(21):3799-3809.
- [23] Gao C F, Tong P, Zhang T Y. Fracture mechanics for a mode III crack in a magneto-electroelastic solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(24-25):6613-6629.
- [24] 刘鑫, 郭俊宏, 于静. 磁电弹性材料中唇形裂纹反平面问题[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2016, **47**(1):38-45. (LIU Xin, GUO Jun-hong, YU Jing. Anti-plane problem of a lip-shaped crack in a magneto-electro-elastic material [J]. *Journal of Inner Mongolia University* (Natural Science Edition), 2016, **47**(1):37-45. (in Chinese))
- [25] Sih G C, Chen E P. Dilatational and distortional behavior of cracks in magneto-electroelastic materials [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2003, **40**(1):1-21.

Antiplane problem of magnetoelectric elastomers with lip shaped extended cracks

GUO Zong-hua¹, GUO Huai-min^{*2}

(1. College of Mathematics Science, Shandong University, Jinan 250000, China;

2. College of Mathematics Science, Baotou Teacher's College, Baotou 014030, China)

Abstract: Magneto-electroelastic materials are a new type of intelligent material widely used in the manufacturing and installation of intelligent devices and equipment. Based on Muskhelishvili theory, this paper constructs a defect model for secondary cracks. By using conformal transformation technology and Stroh type formulas, the mechanical behavior of magneto-electroelastic material containing lip-type extended cracks is studied, and the analytical expressions of the field intensity factors and energy release rate at the crack tip under the partial magnetoelectric permeability boundary condition are obtained. The numerical examples describe the influence of the geometric size of defects on the SIF and SERR of magnetic, electrical, and elastic fields. The results indicate that increasing the length of the crack will promote its expansion, while increasing the height of the lip will suppress its expansion. When the length of the extended crack on both sides of the lip becomes zero, the obtained results can degenerate into the classic lip crack results. The results can degenerate into the Griffith crack results as the height of the lip becomes zero, which further verifies the correctness and effectiveness of the model.

Key words: magnetoelectric elastomer; lip shaped extended crack; field intensity factor; energy release rate; conformal mapping