

DOI: 10.7511/jslx20230911002

# 面向复杂 CAD 模型的嵌入域等几何单元 几何属性快速界定方法

谢晴天, 谢贤达, 罗年猛, 杨奥迪, 王书亭\*

(华中科技大学 机械科学与工程学院, 武汉 430074)

**摘要:** 嵌入域等几何分析方法可以综合嵌入域法网格划分和等几何分析高阶单元求解效率的双重优势, 是复杂 CAD 模型进行等几何分析的主要实现方式之一。嵌入域网格单元几何属性的界定是构建嵌入域等几何分析模型的关键环节之一。针对基于射线法对嵌入域网格单元进行几何属性界定过程中存在的界定效率与准确度相矛盾的问题, 本文将分离轴理论与射线法结合, 建立了一种混合型网格单元几何属性界定策略, 将点与体的相对位置关系判断问题转化为了面与体的相交判断问题, 从而在保证单元几何属性界定效率的同时, 提高单元界定准确度。数值算例表明, 本文提出的混合型网格单元几何属性界定策略可有效提升界定效率及鲁棒性, 为复杂模型嵌入域等几何分析奠定基础。

**关键词:** CAD; 等几何分析; 嵌入域法; 单元几何属性; 分离轴理论; 射线法

**中图分类号:** TH122; O302

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1007-4708(2025)01-0061-07

## 1 引言

在有限元分析过程中, 为了解决网格生成效率低的问题, 大量研究人员进行了许多尝试以降低计算域进行精确网格划分的必要性。Rank 等<sup>[1]</sup>首先提出了一种将计算域嵌入到一个更大的计算网格中的方法, 这是早期的嵌入域思想。Parvizian 等<sup>[2]</sup>提出有限胞元法 FCM (Finite Cell Method), 系统地介绍了嵌入域有限元分析的全套流程。Düster 等<sup>[3]</sup>将有限胞元法推广到三维情况, 详细讨论了 B-rep 模型和体素模型的嵌入域网格生成过程。Parvizian 等<sup>[4]</sup>提出将有限胞元法应用于结构拓扑优化领域, 从而实现使用高阶单元进行有限元拓扑优化, 提高优化结果的质量。嵌入域网格技术能够有效解决有限元网格生成效率低的问题, 但其离散基函数需满足高阶特性以保证非规则裁剪单元的积分精度, 进而导致有限胞元法的求解效率过低。

为实现 CAD/CAE 的无缝融合, Hughes 等<sup>[5]</sup>提出了基于样条基函数等离散的等几何分析方法,

可有效提高高阶单元的求解效率问题<sup>[6,7]</sup>。借助样条基函数的跨单元特性, 等几何分析线性系统的自由度远小于同阶次有限胞元法的自由度。综合有限胞元法网格划分的优势和等几何分析高阶单元求解性能, Rank 等<sup>[8]</sup>提出了嵌入域等几何分析方法, 规整的六面体(长方体)构型虚拟域使其天然地满足 NURBS 张量积结构带来的参数体拓扑与几何两个方面的约束, 能快速实现复杂三维模型等几何分析模型的构建, 解决了基于 CSG (构造实体几何) 表达的一类几何体因 NURBS 曲面裁剪而无法适用等几何分析的问题。Zander 等<sup>[9]</sup>开发了适用于简单模型嵌入域等几何分析的工具包 FCMLab, 其模型边界具有解析表达式, 网格单元几何属性可通过几何解析表达式进行界定。

在将 CAD 模型转化为适用于嵌入域等几何分析的分析模型过程中, 嵌入域网格单元的嵌入域几何属性界定是其研究的重点。对于边界拥有解析表达式的简单模型, 可以通过代数的方法快速精确地获得嵌入域网格单元与模型的相对位置关系<sup>[2,4]</sup>; 而对于复杂的边界不存在解析表达式的模

收稿日期: 2023-09-11; 修改稿收到日期: 2023-10-14.

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFB1708300); 国家自然科学基金(52205267)资助项目.

作者简介: 王书亭\* (1968-), 男, 博士, 教授(E-mail: wangst@hust.edu.cn).

引用本文: 谢晴天, 谢贤达, 罗年猛, 等. 面向复杂 CAD 模型的嵌入域等几何单元几何属性快速界定方法[J]. 计算力学学报, 2025, 42(1): 61-67.

XIE Qing-tian, XIE Xian-da, LUO Nian-meng, et al. An efficient method determining cell geometric attribute of immersed isogeometric analysis for complex CAD models[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 61-67.

型,则需借助离散化模型代替原始模型,进行嵌入域网格单元几何属性识别。复杂三维模型嵌入域单元几何属性界定的主要方法有,(1)通过计算机断层扫描(CT-scan)技术或三维模型体素化算法将模型体素化,判断嵌入域网格单元节点是否位于体素模型内,进而界定嵌入域单元与实体模型的几何相对位置关系<sup>[3,10-12]</sup>; (2)将 B-Rep 格式 CAD 模型转化为表面三角离散的 STL 格式 CAD 模型,利用射线法判断空间中任意一点与 STL 模型的相对位置关系,从而实现嵌入域单元几何属性的界定<sup>[8,13-16]</sup>。

然而,模型体素化算法的前提是要将模型表面三角化,且为了保证体素模型与原始模型的边界相似精度,会选择大规模的体素网格,这使得其相较于射线法更加费时。此外,射线法通过统计单元内采样点与模型的位置关系来确定嵌入域单元属性,在采样点较多时会大大延长单元属性识别的时间,采样点较少时又无法保证识别的准确性,而且容易丢失 CAD 模型上的关键几何特征。因此,本文提出了一种混合型嵌入域单元几何属性界定策略,通过对模型表面进行三角离散,利用分离轴投影方法判断嵌入域单元与表面三角形的相交关系进行裁剪单元识别,再对非裁剪单元中心点使用一次射线法来区分嵌入域单元的虚实属性。最后,通过数值算例证明了本文方法的有效性。

## 2 嵌入域等几何分析基础理论

给定三维几何实体物理域  $\Omega$ , 获取其长方体嵌入域  $\Omega_e$ , 线弹性问题的嵌入域网格等几何分析方法由虚功原理导出:

$$\begin{aligned} \delta W(u, \delta u) &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\delta \varepsilon} \, dv - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{p}_\alpha \, dv - \\ &\int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\delta u} \cdot \boldsymbol{t}_0 \, da = 0 \\ u &= u_0 \quad (\forall x \in \Gamma_u) \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ ,  $\boldsymbol{p}_\alpha$ ,  $\boldsymbol{t}_0$  分别表示柯西应力张量、体积力和给定的表面牵引力,  $\boldsymbol{\delta \varepsilon}$  和  $\boldsymbol{\delta u}$  分别表示应变张量和位移向量的变化量。

物理域和虚拟扩展域(嵌入域中物理域以外的区域)的柯西应力张量不同,需引入比例系数  $\alpha$  进行统一表达,即

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} = \alpha \cdot \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

式中  $\boldsymbol{C}$  表示实体材料的弹性张量。虚拟域材料的弹性模量应远小于物理域材料的弹性模量,以保证原始域和嵌入域分析结果的应变能基本不变。此外,为确保刚度矩阵的非奇异性,虚拟拓展域的  $\alpha$

不能设置太小,即

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1.0 & (\forall x \in \Omega) \\ 10^{-q} & (\forall x \in \Omega_e \setminus \Omega) \end{cases} \quad (3)$$

与式(2)类似,虚拟域的体积力可表达为

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \alpha \cdot \boldsymbol{p} \quad (4)$$

根据等几何分析,位移场可以由 NURBS 基函数近似表示为

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n R_i \cdot \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{R} \boldsymbol{U} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\delta u} = \sum_{i=1}^n R_i \cdot \boldsymbol{\delta U}_i = \boldsymbol{R} \boldsymbol{\delta U} \quad (6)$$

因此,式(2)的应变可以近似表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{U} \quad (7)$$

式中  $\boldsymbol{B}$  表示应变位移矩阵,由式(5)相对于空间坐标的偏导数构成。根据标准 Bubnov-Galerkin 方法<sup>[17]</sup>,将式(5~7)代入式(1)的线弹性偏微分方程弱形式,可推导出嵌入域等几何分析离散平衡方程

$$\hat{\boldsymbol{K}} \hat{\boldsymbol{U}} = \hat{\boldsymbol{F}} \quad (8)$$

其中  $\hat{\boldsymbol{K}}$  是嵌入域全局刚度矩阵,  $\hat{\boldsymbol{U}}$  是待求的未知位移向量,  $\hat{\boldsymbol{F}}$  为外力载荷向量。

## 3 嵌入域等几何分析网格单元几何属性界定策略

针对复杂 CAD 模型嵌入域单元几何属性界定效率问题,本文构建了混合型嵌入域几何属性界定策略,主要包括,(1)利用 Gmsh 将复杂结构 CAD 模型离散为表面三角网格;(2)基于分离轴理论判断嵌入域网格单元与表面三角网格是否相交,若相交则该单元为裁剪单元,否则该单元为非裁剪单元;(3)采用射线法判断非裁剪单元的虚实属性。

### 3.1 基于分离轴理论的裁剪单元识别

空间中任意多边形与长方体的相交检测是计算机图形学研究的基本问题之一。Voorhies<sup>[18]</sup>提出一种判断三角形与长方体是否相交的算法,后来由 Green 等<sup>[19]</sup>对算法进行拓展,使得该算法能判断任意多边形与长方体之间是否重叠。Akenine-Möller<sup>[20]</sup>提出一种基于分离轴理论的相交检测判断算法,用以实现判断效率的提升。

分离轴理论是一种通过判断任意两个凸多边形在任意角度下的投影是否均存在重叠,来判断多边界之间是否发生碰撞的方法。如图 1 所示,将矩形和三角形同时向其中任意一个形状中的任意一条边的垂线上投影,若存在某次投影中两形状的投影

段不相交,则可判断两形状没有重叠部分;若5次(矩形2个垂线方向+三角形3个垂线方向)投影中两形状投影段均存在相交,则说明两形状有重叠部分。上述相交检测过程可推广至三维形体的几何位置关系界定。

此外,相较于射线法,对于三维几何形体,分离轴相交检测判断方法不仅能够提高判断的效率,也能提高相交检测判断的鲁棒性,避免出现图2所示形体尖锐特征导致的射线法相交检测判断失效的问题。

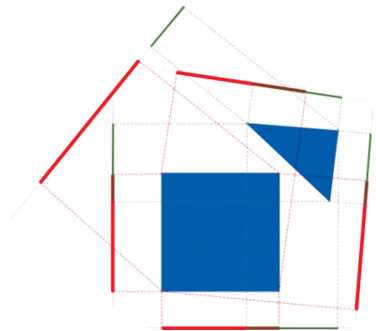


图1 基于分离轴理论的矩形与三角形相交检测  
Fig. 1 Illustration of intersection detection between rectangle and triangle using the separation axis theory

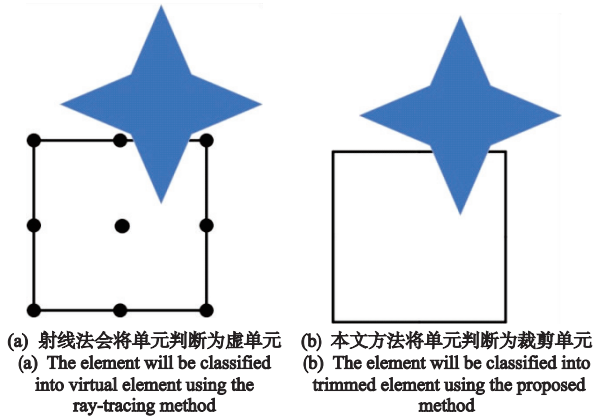


图2 采用射线法无法保证识别的准确性  
Fig. 2 Accuracy of identification cannot be guaranteed by the ray-tracing method

### 3.2 基于射线法的非裁剪单元虚实属性判断

空间中点与模型位置关系的判断也是计算机图形学研究的基本问题之一,较为流行的判断方法有体素空间法、八叉树法<sup>[21]</sup>、BSP(binary space partitioning)法<sup>[22]</sup>、基于Jordan曲线的射线法<sup>[14,23]</sup>和Feito-2Torres法<sup>[24]</sup>等,文献[25]对这些方法进行了详细的说明与分析。其中,基于Jordan曲线的射线法因为原理简单易于实现,以及应用领域广泛而受到了众多学者的欢迎。

Jordan曲线理论指出,任何简单的闭合曲线 $C$ 都将平面内不在 $C$ 上的点分成两个不同的域(没

有公共点),其中 $C$ 是公共边界。因此,给定平面上一条闭合的边界曲线,取平面上任意一点向任意方向发射一条射线,统计射线与边界曲线的交点个数,若为奇数,则点在边界曲线围成的区域内;若为偶数,则点在边界曲线围成的区域外。上述过程可推广至三维情况,用于判断空间中任意一点与模型的几何位置关系,如图3所示。

对于大多数复杂CAD模型,其边界无法解析表达,因此需要借助模型表面三角化方法,将射线与模型边界的相交判断问题转化为与模型表面三角形的相交判断问题。本文使用的算法是基于文献[14]给出的交点统计原则进行设计,取非裁剪单元的中心点使用射线法判断其与模型的相对位置关系,若中心点在模型内,则单元为实单元;若中心点在模型外,则单元为虚单元。

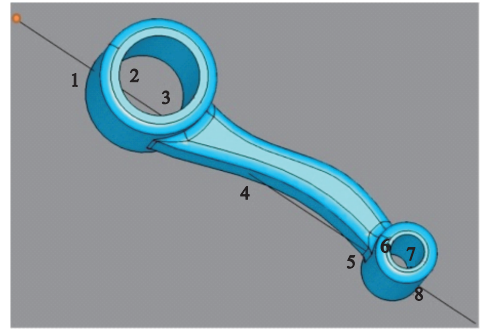


图3 射线法判断空间点与模型位置关系  
Fig. 3 Using the ray-tracing method to judge whether a 3D point intersects with the CAD model

## 4 数值算例

通过对两个模型进行嵌入域等几何分析来验证本文方法的有效性。软件测试环境为Windows10 64位操作系统和自主研发的嵌入域等几何分析工业软件原型系统。运行软件的计算机配置为Intel(R)Core(TM)i7-8550U @ 1.80 GHz 1.99 GHz的CPU和8GB RAM内存。两个算例中,实体材料的弹性模量 $E_0 = 200 \text{ GPa}$ ,非实体部分的虚材料弹性模量 $E_{\min} = E_0 \times 10^{-10}$ ,泊松比统一取 $\mu = 0.3$ 。

### 4.1 连杆模型

如图4(a)所示,将连杆模型大端的内圆柱面固定(图中白色部分),在其小端的内圆柱面上施加指向 $z$ 轴正方向且大小为 $F = 2.54 \text{ N}$ 的均布力(图中红色部分)。通过Gmsh将连杆模型表面三角化,如图4(b)所示。

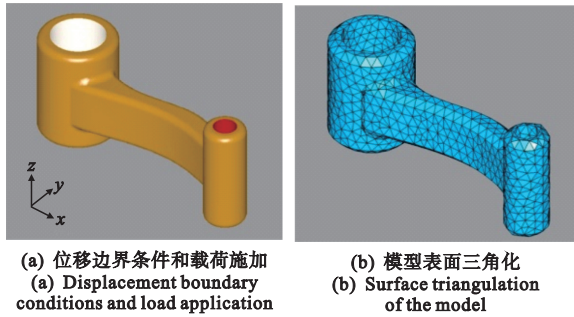


图4 连杆模型分析参数和表面三角化  
Fig. 4 Analysis parameters and surface triangulation of link rod model

根据模型的 B-Rep 表达,可获得模型在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴三个轴线方向上物理坐标的最大值和最小值,给定合适的几何容差阈值,构建模型的初始嵌入域。由此,可获得如图 5(a)所示的嵌入域网格。图 5(b)和图 5(c)分别显示了通过本文提出的混合型嵌入域单元几何属性界定方法和本文基于文献[14]给出的具体实现方式的射线法(采样点数  $3 \times 3 \times 3$ )得到的裁剪单元模型。

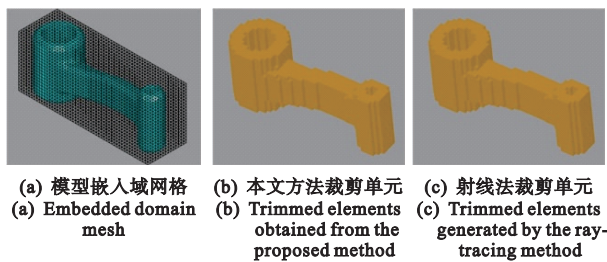


图5 连杆模型嵌入域网格和裁剪单元模型  
Fig. 5 Embedded domain mesh and its trimmed elements models for link rod

在不同网格尺寸下,连杆模型使用本文方法和射线法进行嵌入域网格单元属性判断的时间对比如图 6 所示。由于模型表面三角形划分数量太多,导致单元嵌入域属性判断时间过长,因此,本文需对模型进行预处理,(1)射线法的射线方向取为  $x$  轴正方向;(2)将所有三角面片和单元向  $yz$  平面投影;(3)根据单元所在的区间将可能与该单元相交的三角形提取进而完成分组。本文的算例均采用上述预处理过程,减少嵌入域单元几何属性界定过程需要遍历的表面三角形数量,从而提高了单元几何属性界定的效率。由图 6 可知,使用射线法进行嵌入域网格单元属性界定的准确度和耗时随单元采样点数的增加而增加,本文提出的混合型方法与射线法相比,能在较少时间内达到较高的判断准确度。

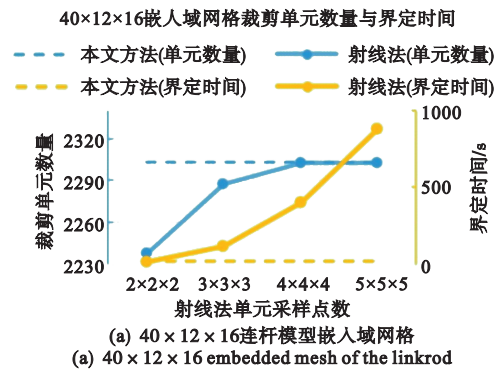
图 7 为嵌入域等几何分析工业软件原型系统和 Ansys Workbench 得到的位移仿真云图。其中,自主研发的嵌入域等几何分析系统最大位移为

$6.03e^{-6} \text{ m}$ , Ansys Workbench 仿真计算得到的最大变形量为  $6.3246e^{-6} \text{ m}$ ,相对偏差为 4.6%。由图 7 可知,嵌入域等几何分析所得的位移仿真云图与实际情况下的趋势大致接近,验证了本文方法在连杆模型嵌入域等几何分析建模过程中的有效性。

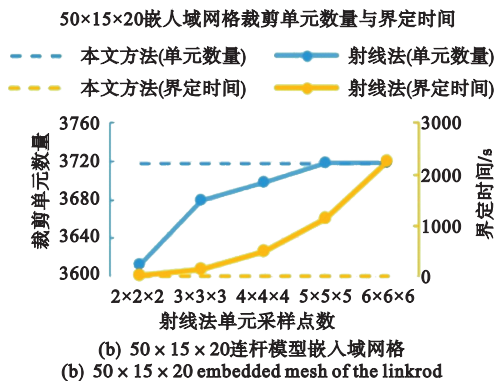
## 4.2 齿轮泵泵体

如图 8(a)所示,将齿轮泵泵体底座四个螺栓孔固定(图中白色部分),在轴孔上施加指向  $z$  轴正方向且大小为  $F = 2111.2 \text{ N}$  的均布力(图中红色部分)。通过 Gmsh 将弯曲管道模型表面三角化,如图 8(b)所示。

对于齿轮泵泵体模型,建立的嵌入域网格如图 9(a)所示。基于本文提出的混合型嵌入域单元几



(a)  $40 \times 12 \times 16$  连杆模型嵌入域网格  
(a)  $40 \times 12 \times 16$  embedded mesh of the link rod



(b)  $50 \times 15 \times 20$  连杆模型嵌入域网格  
(b)  $50 \times 15 \times 20$  embedded mesh of the link rod

图6 不同嵌入域网格单元几何属性判断方法的裁剪单元数量与界定时间对比  
Fig. 6 Comparisons between different geometric attribute determination methods in the number of trimmed elements and determining time

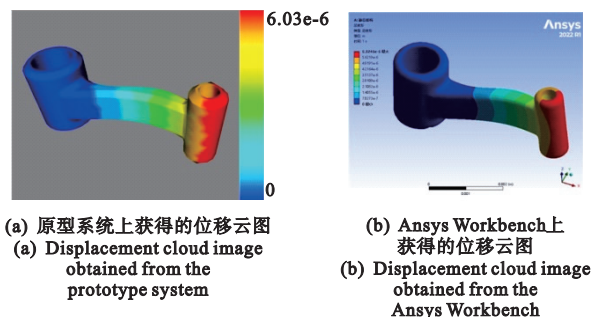


图7 位移云图  
Fig. 7 Displacement cloud image

何属性界定方法和本文基于文献[14]给出的具体实现方式的射线法(采样点数  $3 \times 3 \times 3$ )进行单元识别后得到的裁剪单元模型分别如图 9(b)和图 9(c)所示。

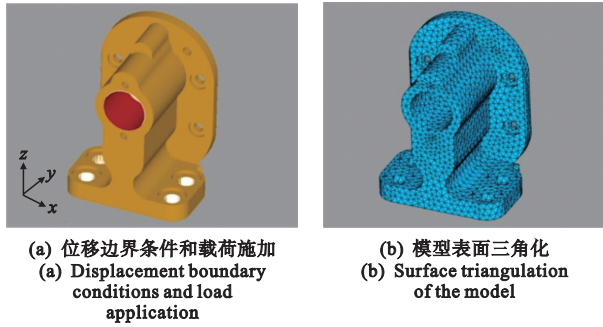


图 8 齿轮泵泵体模型分析参数和表面三角化  
Fig. 8 Analysis parameters and surface triangulation of gear pump

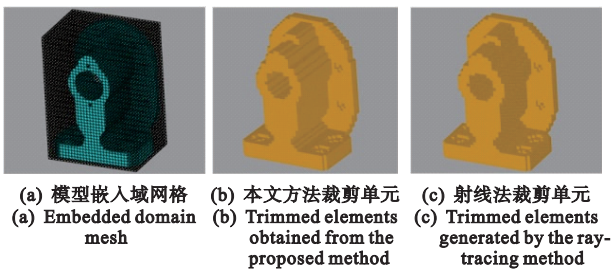


图 9 齿轮泵泵体模型嵌入域网格和裁剪单元模型  
Fig. 9 Embedded domain mesh and trimmed elements models for gear pump

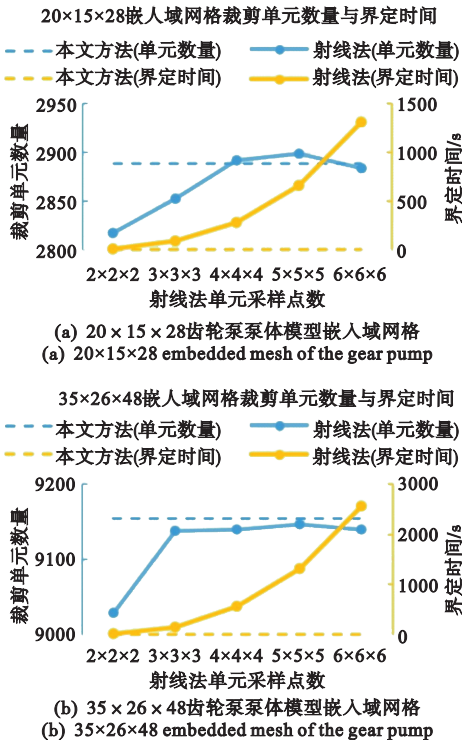


图 10 不同嵌入域网格单元几何属性判断方法的裁剪单元数量与界定时间对比

Fig. 10 Comparisons between different geometric attribute determination methods in the number of trimmed elements and determining time

与之前的算例相同,在不同网格尺寸下,齿轮泵泵体使用本文方法和射线法进行嵌入域网格单元属性判断的时间对比如图 10 所示。可以看出,相较于传统射线法,本文使用的嵌入域单元混合型几何属性界定策略可在较少时间内达到较高的判断准确度。

图 11 为嵌入域等几何分析工业软件原型系统和 Ansys Workbench 得到的位移仿真云图。其中,自主研发的嵌入域等几何分析系统最大位移为  $8.10 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,Ansys Workbench 仿真计算得到的最大变形量为  $8.5778 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,相对偏差为 5.6%。可以看出,嵌入域等几何分析所得的位移仿真云图与实际情况趋势大致接近,验证了本文方法在齿轮泵泵体模型嵌入域等几何分析建模过程中的有效性。

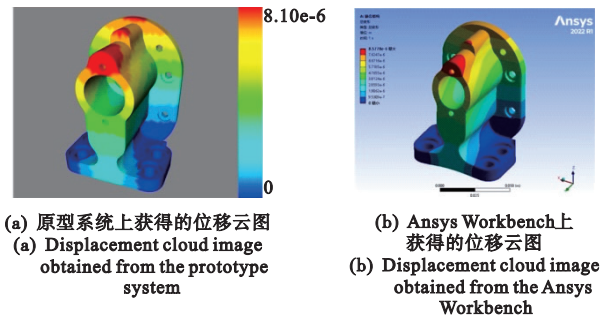


图 11 位移云图  
Fig. 11 Displacement cloud image

## 5 结 语

本文研究了面向复杂 CAD 模型的嵌入域等几何分析建模方法,提出了一种高效混合型嵌入域单元几何属性界定策略,解决了基于射线法的嵌入域网格单元几何属性判断方法存在的效率过低的问题。最后,在自主开发的嵌入域等几何分析工业软件原型系统中进行了复杂结构静力学分析仿真,验证了本文提出的嵌入域等几何分析网格单元几何属性界定方法在实际工程问题仿真过程中的有效性。

## 参考文献(References):

[1] Rank E, Werner H. An adaptive finite element approach for the free surface seepage problem[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, **23**(7):1217-1228.

[2] Parvizian J, Düster A, Rank E. Finite cell method[J]. *Computational Mechanics*, 2007, **41**(1):121-133.

[3] Düster A, Parvizian J, Yang Z, et al. The finite cell method for three-dimensional problems of solid me-

- chanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**(45-48):3768-3782.
- [4] Parvizia J, Düster A, Rank E. Topology optimization using the finite cell method[J]. *Optimization and Engineering*, 2012, **13**(1):57-78.
- [5] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis; CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41):4135-4195.
- [6] 胡清元, 沈莞菁, 蒋芳芳. 基于 Nitsche 方法与拟牛顿求解的二维接触问题等几何分析[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(5):619-624. (HU Qing-yuan, SHEN Wan-qiang, JIANG Fang-fang. Isogeometric analysis of 2D contact problems based on the Nitsche's method and quasi-Newton solver[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(5):619-624. (in Chinese))
- [7] 韩少燕, 姜人伟, 高汝鑫, 等. 基于等几何分析的边界元法求解二维 Laplace 方程[J]. *计算力学学报*, 2023, **40**(1):105-110. (HAN Shao-yan, JIANG Ren-wei, GAO Ru-xin, et al. Isogeometric boundary element analysis for 2D Laplace equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, **40**(1):105-110. (in Chinese))
- [8] Rank E, Ruess M, Kollmannsberger S, et al. Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, **249**:104-115.
- [9] Zander N, Bog T, Elhaddad M, et al. FCMLab: A finite cell research toolbox for MATLAB[J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, **74**:49-63.
- [10] Schillinger D, Ruess M. The finite cell method: A review in the context of higher-order structural analysis of CAD and image-based geometric models[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2015, **22**(3):391-455.
- [11] Korshunova N, Alaimo G, Hosseini S B, et al. Bending behavior of octet-truss lattice structures: Modelling options, numerical characterization and experimental validation [J]. *Materials & Design*, 2021, **205**:109693.
- [12] Divi S C, Verhoosel C V, Auricchio F, et al. Topology-preserving scan-based immersed isogeometric analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, **392**:114648.
- [13] Wassermann B, Kollmannsberger S, Bog T, et al. From geometric design to numerical analysis: A direct approach using the finite cell method on constructive solid geometry[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2017, **74**(7):1703-1726.
- [14] 李心耀, 张卫红, 陈亮. 固定网格中基于边界描述的 CAD 模型快速分析方法[J]. *航空学报*, 2019, **40**(6):178-191. (LI Xin-yao, ZHANG Wei-hong, CHEN Li-ang. A fast analytic method for CAD model based on boundary representation in fixed grid[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, **40**(6):173-186. (in Chinese))
- [15] Torre M, Morganti S, Pasqualini F S, et al. Immersed isogeometric analysis based on a hybrid collocation/finite cell method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, **405**:115856.
- [16] Qiu W K, Wang Q F, Gao L, et al. Evolutionary topology optimization for continuum structures using isogeometric analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, **65**(4):121.
- [17] Galerkin B G. On electrical circuits for the approximate solution of the laplace equation[J]. *Vestn. Inzhenerov I Tekhnikovi*, 1915, **19**:897-908.
- [18] Voorhies D. *Triangle-Cube Intersection* [M]. New York: Academic Press Professional, Inc, 1992.
- [19] Green D, Hatch D. *Fast Polygon-Cube Intersection Testing* [M]. Amsterdam: Elsevier, 1995.
- [20] Akenine-Möller T. Fast 3D triangle-box overlap testing[A]. ACM, 2005.
- [21] Revelles J, Ureña C, Lastra M, et al. An efficient parametric algorithm for octree traversal[J]. *Journal of WSCG*, 2000, **8**:212-219.
- [22] Gordon D, Chen S. Front-to-back display of BSP trees [J]. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1991, **11**(5):79-85.
- [23] Möller T, Trumbore B. Fast minimum storage ray-triangle intersection [J]. *Journal of Graphics Tools*, 1997, **2**(1):21-28.
- [24] Feito F R, Torres J C. Inclusion test for general polyhedra[J]. *Computers & Graphics*, 1997, **21**(1):23-30.
- [25] Ogayar C J, Segura R J, Feito F R. Point in solid strategies[J]. *Computers & Graphics*, 2005, **29**(4):616-624.

## An efficient method determining cell geometric attribute of immersed isogeometric analysis for complex CAD models

XIE Qing-tian, XIE Xian-da, LUO Nian-meng, YANG Ao-di, WANG Shu-ting\*

(School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** As one of the main approaches to implementing isogeometric analysis (IGA) for complex CAD models, immersed isogeometric analysis integrates the advantage of the embedded domain method in mesh generation and the merit of IGA in solution efficiency for higher-order elements. Determining the cell's geometric attributes is one of the key aspects in immersed isogeometric analysis method. In this paper, we combine the separation axis theory with the ray-tracing method to present a hybrid cell's geometric attributes determining strategy, aiming at the contradiction between the efficiency and accuracy in the cell's geometric attributes existing in the traditional ray-tracing method. The proposed method transforms the problem of the relative position relationship determination between points and solid into the intersection determination between solid and surfaces, which enables a faster and more accurate determination of the cell geometric attributes. The numerical examples show that the proposed hybrid strategy can effectively improve the efficiency and robustness of the determination, laying the foundation of immersed isogeometric analysis for complex models.

**Key words:** complex CAD models; isogeometric analysis; embedded domain method; cell geometric attribute; separation axis theory; ray-tracing method