

DOI: 10.7511/jslx20230913005

Reissner 板断裂问题的半解析等几何分析方法

官高菲, 张滢睿, 余雄, 徐新生*

(大连理工大学力学与航空航天学院工业装备结构分析优化与CAE软件全国重点实验室,大连116024)

摘要:板结构是工程中一类重要的基本构件,但是由于材料或者工艺的影响,其在制造过程中难免会产生不同程度的缺陷,从而在服役环境下逐渐演变成宏观裂纹,导致断裂事故。现阶段板结构断裂分析的方法主要分为解析和数值方法两类。解析方法大多仅适用于无限大或半无限大结构以及简单边界条件情况,数值方法需在裂尖附近区域划分高密度的网格,并且无法准确给出结构的断裂参数,需要复杂的后处理程序。为解决上述问题,本文针对含裂纹 Reissner 板的弯曲断裂问题,提出一种高精度的半解析等几何分析方法。首先,求解含裂纹 Reissner 板裂纹尖端附近的广义位移(挠度和转角)和广义应力(弯矩和剪力)的级数展开解。其次,将整板的等几何模型划分为两类区域,即裂尖附近的奇异区和不包含裂尖的非奇异区。在奇异区内,利用获得的级数解进行节点未知量变换,将该区域内大量的节点未知量转换为少量的级数解待定系数,而在非奇异区内保持节点未知量不变,从而获得含裂纹 Reissner 板弯曲断裂分析的半解析等几何分析方法计算列式,直接获得裂纹尖端附近奇异应力场和对应的应力强度因子的显式表达式。数值算例验证了该方法的精确性,并分析了相关影响参数对应力强度因子的作用规律。

关键词:含裂纹 Reissner 板;弯曲断裂;半解析等几何方法;应力强度因子;解析解

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2025)01-0053-08

1 引言

板结构是工程中一类重要的基本结构,因其具有良好的空间承载能力,广泛应用于航空航天、船舶工程、车辆工程等领域^[1,2]。板结构在实际使用中一般需要进行拼接,不同材料的板和不同联结工艺难免会在整体结构上留下不同程度的缺陷,而在使用过程中,这些缺陷会在服役环境和外加载荷的作用下逐渐演变成宏观裂纹,从而为结构的后续使用埋下安全隐患,如欧洲空客 A380 的机翼和美国独立级战斗舰的舰体都在长时间使用后出现了裂纹。因此,研究板结构的断裂问题有助于防范断裂事故的发生,具有重要的实际意义。

现有平板弯曲断裂研究多采用 Kirchhoff 理论,该理论无法严格满足自由边界条件,会造成分析误差^[3,4]。Reissner 理论能够严格满足自由边界上所有独立边界,可以准确预测裂纹尖端附近的奇异应力场分布和对应的强度因子。Knowles 等^[5]

首次基于 Reissner 板弯曲理论研究了在无穷远处弯曲荷载作用下的含裂纹板断裂问题,得到厚度相对于裂纹长度趋近于无穷小情况下含裂纹板的裂尖应力场分布。此后,国内外学者对板结构弯曲断裂问题开展了广泛研究^[3,6,7]。Kim 等^[8]针对有限宽板中孔边裂纹问题发展了一种精确的权函数。Leung 等^[9]针对 Reissner 板的断裂问题提出一种分形有限元方法。张兆军等^[10,11]构造了一种奇异单元,分析了含裂纹或切口 Reissner 板的弯曲断裂问题。Zhang 等^[12]基于 Reissner 板理论研究了终止于两种材料界面的任意倾斜半无限裂纹尖端的应力奇异性。Dolbow 等^[13]提出了 Mindlin-Reissner 断裂分析的扩展有限元方法(XFEM)。Xing 等^[14]采用 XFEM 求解了含裂纹平板的线弹性近场解和应力强度因子。此后,其进一步在 XFEM 中构造包围裂尖的板单元,并将其用于板结构裂纹扩展的模拟^[15]。

Reissner 板断裂问题的理论分析虽然能直接

收稿日期:2023-09-13;修改稿收到日期:2024-02-29.

基金项目:航空科学基金(2018ZC63003)资助项目.

作者简介:徐新生*(1957-),男,博士,教授(E-mail:xsxu@dlut.edu.cn).

引用本文:官高菲,张滢睿,余雄,等. Reissner 板断裂问题的半解析等几何分析方法[J]. 计算力学学报,2025,42(1):53-60.

GUAN Gao-fei, ZHANG Ying-rui, YU Xiong, et al. A semi-analytical isogeometric analysis for fracture of reissner plates[J].

Chinese Journal of Computational Mechanics, 2025, 42(1): 53-60.

获得奇异应力场表达式和对应的强度因子,但是仅限于规则形状和简单边界情况。对于具有任意形状和边界的板结构往往还要依赖于数值方法进行分析。然而,数值方法在预测应力强度因子时,往往面临网格和路径敏感性两个主要矛盾,即需要非常密集的网格划分和设置合理的计算路径。

为解决上述问题, Yu 等^[16,17]将解析解和基于 T 样条基函数的等几何分析方法相结合,提出一种适用于板弯曲断裂分析的耦合分析方法。该方法兼具解析和数值方法的优势,可以直接获得裂尖附近奇异应力场和应力强度因子的显式表达式,并且不需要网格加密和后处理程序^[18]。在上述研究基础上,本文将解析解和基于 NURBS 基函数的等几何分析方法相结合,分析了含裂纹单材料 Reissner 板的弯曲断裂问题。相较于 T 样条基函数, NURBS 基函数是 CAD 设计中最常用的样条函数,并且目前已集成至 Matlab, LS-DYNA 和 ABAQUS 等商业软件中^[19],能够使该耦合方法具有更易推广的特性。

2 含裂纹 Reissner 板模型与方程

考虑如图 1 所示的含裂纹各向同性 Reissner 板,直角坐标系 (x, y, z) 和柱坐标系 (r, θ, z) 以裂纹尖端 O 为坐标原点,其中 Oxy 平面与 Reissner 板中面(虚线)重合, x 轴位于裂纹的反向延长线上,板的厚度为 t 。

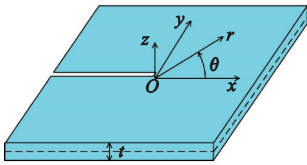


图 1 含裂纹各向同性 Reissner 板

Fig. 1 A cracked homogenous Reissner plate

在柱坐标中, Reissner 板的变形可以由三个独立的广义位移分量描述,即中面挠度 w 、变形前垂直于中面的直线段在 Orz 面内的转角 ψ_r 和在 $O\theta z$ 面内的转角 ψ_θ 。因此,板内任意一点位移可以表示为 $w = w(r, \theta)$, $u_r = -z\psi_r(r, \theta)$, $u_\theta = -z\psi_\theta(r, \theta)$ 。

应力和广义位移之间的关系为

$$\sigma_r = -Ez[\partial_r \psi_r + v(\partial_\theta \psi_\theta / r + \psi_r / r)] / (1 - \nu^2) \quad (1a)$$

$$\sigma_\theta = -Ez(\partial_\theta \psi_\theta / r + \psi_r / r + v\partial_r \psi_r) / (1 - \nu^2) \quad (1b)$$

$$\tau_{rz} = 3C(t^2 - 4z^2)(\partial_r w - \psi_r) / (2t^3) \quad (1c)$$

$$\tau_{r\theta} = -Ez(\partial_\theta \psi_r / r + \partial_r \psi_\theta - \psi_\theta / r) / [2(1 + \nu)] \quad (1d)$$

$$\tau_{\theta z} = 3C(t^2 - 4z^2)(\partial_\theta w / r - \psi_\theta) / (2t^3) \quad (1e)$$

式中 $C = 5Et / [12(1 + \nu)]$, $\partial_r = \partial f / \partial r$, $\partial_\theta = \partial f / \partial \theta$, f 为任意函数。

由式(1),弯矩和剪力可以表示为

$$M_r = -D[\partial_r \psi_r + v(\partial_\theta \psi_\theta / r + \psi_r / r)] \quad (2a)$$

$$M_\theta = -D(\partial_\theta \psi_\theta / r + \psi_r / r + v\partial_r \psi_r) \quad (2b)$$

$$M_{r\theta} = -D(1 - \nu)(\partial_\theta \psi_r / r + \partial_r \psi_\theta - \psi_\theta / r) / 2 \quad (2c)$$

$$Q_r = C(\partial_r w - \psi_r) \quad (2d)$$

$$Q_\theta = C(\partial_\theta w / r - \psi_\theta) \quad (2e)$$

式中 $D = Et^3 / [12(1 - \nu^2)]$ 。

在不考虑垂直于板面的荷载情况下,广义位移表示的平衡方程可以表示为

$$D[\partial_r^2 \psi_r + \partial_r \psi_r / r - \psi_r / r^2 + (1 - \nu)\partial_\theta^2 \psi_r / (2r^2) + (1 + \nu)\partial_r \partial_\theta \psi_\theta / (2r) - (3 - \nu)\partial_\theta \psi_\theta / (2r^2)] + C(\partial_r w - \psi_r) = 0 \quad (3a)$$

$$D[(1 + \nu)\partial_r \partial_\theta \psi_r / (2r) + (3 - \nu)\partial_\theta \psi_r / (2r^2) + (1 - \nu)\partial_r^2 \psi_\theta / 2 + (1 - \nu)\partial_r \psi_\theta / (2r) + \partial_\theta^2 \psi_\theta / r^2 - (1 - \nu)\psi_\theta / (2r^2)] + C(\partial_\theta w / r - \psi_\theta) = 0 \quad (3b)$$

$$C(\partial_r^2 w + \partial_r w / r + \partial_\theta^2 w / r^2 - \partial_r \psi_r - \psi_r / r - \partial_\theta \psi_\theta / r) = 0 \quad (3c)$$

式中 $\partial_r^2 = \partial^2 f / \partial r^2$, $\partial_\theta^2 = \partial^2 f / \partial \theta^2$ 。

裂纹面条件为

$$M_{r\theta} |_{\theta=\pm\pi} = 0, M_\theta |_{\theta=\pm\pi} = 0, Q_\theta |_{\theta=\pm\pi} = 0 \quad (4)$$

3 裂纹尖端附近区域的级数解

定义广义位移向量为 $\mathbf{q} = \{\psi_r, \psi_\theta, w\}^T$, 根据广义分离变量法,裂纹尖端附近广义位移可以表示为

$$\mathbf{q} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{\Gamma}_m(\theta, \lambda) r^{\lambda+m} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{\Gamma}_m(\theta, \lambda) = \{\Gamma_m^r, \Gamma_m^\theta, \Gamma_m^w\}^T$ 。将式(5)代入平衡方程(3),可以进一步整理为

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{F}_m(\theta, \lambda) r^{\lambda+m-2} = 0 \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{F}_0 = \{(\lambda^2 - 1)\Gamma_0^r + \kappa_0^1 \partial_\theta \Gamma_0^\theta + (1 - \nu)\partial_\theta^2 \Gamma_0^r / 2, \kappa_0^2 \partial_\theta \Gamma_0^r + \partial_\theta^2 \Gamma_0^\theta + (1 - \nu)(\lambda^2 - 1)\Gamma_0^\theta / 2, \lambda^2 \Gamma_0^w + \partial_\theta^2 \Gamma_0^w\}^T$$

$$\mathbf{F}_1 = \{D[\lambda(\lambda + 2)\Gamma_1^r + \kappa_1^1 \partial_\theta \Gamma_1^\theta + (1 - \nu)\partial_\theta^2 \Gamma_1^r / 2] + C\lambda \Gamma_1^w, D[\kappa_1^2 \partial_\theta \Gamma_1^r + \partial_\theta^2 \Gamma_1^\theta + (1 - \nu)\lambda(\lambda + 2)\Gamma_1^\theta / 2] + C\partial_\theta \Gamma_1^w, (\lambda + 1)^2 \Gamma_1^r + \partial_\theta^2 \Gamma_1^r - (\lambda + 1)\Gamma_1^r - \partial_\theta \Gamma_1^\theta\}^T$$

$$\kappa_m^1 = [(1 + \nu)(\lambda + m) - 3 + \nu] / 2$$

$$\kappa_m^2 = [(1 + \nu)(\lambda + m) + 3 - \nu]/2$$

需要指出的是,当 $m \geq 2$ 时,也可根据式(6)依次推导出 F_m 的表达式。然而,本文研究对象为断裂问题,应力强度因子仅与裂纹尖端附近奇异应力级数解的前几项相关。因此,对于各向同性 Reissner 裂纹板,后续推导和计算均只取前两阶 ($m=0,1$),后续数值算例也验证了这种取法的精确性。

当对于任意 m ,均有 $F_m(\theta, \lambda)=0$ 时,可使式(6)成立,进而可以得到 $\Gamma_0(\theta, \lambda)$ 和 $\Gamma_1(\theta, \lambda)$ 的表达式

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\theta, \lambda) &= \chi_0 \cos\lambda\theta + \chi_1 \sin\lambda\theta \\ \Gamma_1(\theta, \lambda) &= \chi_2 \cos\lambda\theta + \chi_3 \sin\lambda\theta \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $\chi_k = \{\chi_k^1, \chi_k^2, \chi_k^3\}^T$ ($k=0\sim 3$)

$$\begin{aligned} \chi_0^1 &= \delta_{20} \sin\theta - \delta_{10} \cos\theta - K_0(\delta_{30} \cos\theta + \delta_{40} \sin\theta) \\ \chi_1^1 &= \delta_{20} \cos\theta + \delta_{10} \sin\theta + K_0(\delta_{40} \cos\theta - \delta_{30} \sin\theta) \\ \chi_0^2 &= \delta_{20} \cos\theta + \delta_{40} \cos\theta + \delta_{10} \sin\theta - \delta_{30} \sin\theta \\ \chi_1^2 &= \delta_{10} \cos\theta + \delta_{30} \cos\theta - \delta_{20} \sin\theta + \delta_{40} \sin\theta \\ \chi_3^1 &= \delta_{60}, \chi_2^1 = \delta_{21} \sin 2\theta - \delta_{11} \cos 2\theta - K_1 \delta_{31} - \delta_{50} \eta_1 \\ \chi_3^1 &= \delta_{21} \cos 2\theta + \delta_{11} \sin 2\theta + K_1 \delta_{41} - \delta_{60} \eta_1, \chi_0^3 = \delta_{50} \\ \chi_2^2 &= \delta_{21} \cos 2\theta + \delta_{41} + \delta_{11} \sin 2\theta \\ \chi_3^2 &= \delta_{11} \cos 2\theta + \delta_{31} - \delta_{21} \sin 2\theta \\ \chi_2^3 &= \delta_{51} \cos\theta + \delta_{61} \sin\theta + (\delta_{30} \cos\theta + \delta_{40} \sin\theta) \eta_2 \\ \chi_3^3 &= \delta_{61} \cos\theta - \delta_{51} \sin\theta - (\delta_{30} \sin\theta + \delta_{40} \cos\theta) \eta_2 \\ \eta_1 &= 2C/[D(\nu\lambda + \lambda + 4)] \\ \eta_2 &= (1 - \nu)/(\nu\lambda + \lambda + 3 - \nu) \\ K_0 &= (\nu\lambda + \lambda - 3 + \nu)/(\nu\lambda + \lambda + 3 - \nu) \\ K_1 &= (\nu\lambda + \lambda + 4)/(\nu\lambda + 2\nu + \lambda - 2), \delta_{i0} \text{ 和 } \delta_{i1} \end{aligned}$$

为待定系数($i=1\sim 6$)。

将式(5)代入边界条件(4),得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{G}_m(\theta, \lambda) r^{\lambda+m-1} = 0 \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0 &= \{(1 + \nu\lambda)\Gamma_0^r + \partial_\theta \Gamma_0^\theta, \partial_\theta \Gamma_0^r + (\lambda - 1)\Gamma_0^\theta, \\ &\quad \partial_\theta \Gamma_0^w\}^T \\ \mathbf{G}_1 &= \{[1 + \nu(\lambda + 1)]\Gamma_1^r + \partial_\theta \Gamma_1^\theta, \partial_\theta \Gamma_1^r + \lambda \Gamma_1^\theta, \\ &\quad \partial_\theta \Gamma_1^w - \Gamma_1^\theta\}^T \end{aligned}$$

类似地,当对于任意 m ,均有 $\mathbf{G}_m=0$ 时,可使式(8)成立,将式(7)代入 $\mathbf{G}_0=0$,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9)$$

式中

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & p_3 & -p_5 \\ p_2 & p_1 & p_6 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_5 \\ -p_2 & p_1 & -p_6 & p_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} p_2 & -p_1 \\ p_2 & p_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_1 = [\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30}, \delta_{40}]^T, \mathbf{Z}_2 = [\delta_{50}, \delta_{60}]^T$$

$$p_1 = \cos\lambda\pi, p_2 = \sin\lambda\pi, p_3 = (\lambda + 1)\Delta_{01} \cos\lambda\pi$$

$$p_4 = (\lambda - 1)\Delta_{01} \cos\lambda\pi, p_5 = (\lambda + 1)\Delta_{01} \sin\lambda\pi$$

$$p_6 = (\lambda - 1)\Delta_{01} \sin\lambda\pi$$

$$\Delta_{01} = (1 + \nu)/(\lambda + \nu\lambda + 3 - \nu)$$

$\delta_{10} - \delta_{60}$ 为待定系数,要使得上述方程组有非零解,需要满足 $\det(\mathbf{P}_1)=0$ 或 $\det(\mathbf{P}_2)=0$,即

$$\sin(2\lambda\pi)^3 = 0 \quad (10)$$

对应解为

$$\lambda_n = n/2 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (11)$$

由于裂纹尖端处应变能有限的原则,式(11)均已舍去零和负数解。根据特征方程的特点,对应的特征值可以分为两类, α 类特征值, $\lambda_n^{(\alpha)} = (2n - 1)/2$; β 类特征值, $\lambda_n^{(\beta)} = n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)。将求解得到的本征值代入式(9),可以得到 $\Gamma_{0j}^r(\theta, \lambda_n^{(j)})$, $\Gamma_{0j}^\theta(\theta, \lambda_n^{(j)})$ 和 $\Gamma_{0j}^w(\theta, \lambda_n^{(j)})$ 的显式表达式,这里 $j = \alpha, \beta$ 。类似地,将式(7)代入 $\mathbf{G}_1=0$,也可获得相应 $\Gamma_{1j}^r(\theta, \lambda_n^{(j)})$, $\Gamma_{1j}^\theta(\theta, \lambda_n^{(j)})$ 和 $\Gamma_{1j}^w(\theta, \lambda_n^{(j)})$ 的显式表达式。最终,可以得到裂纹尖端附近区域的广义位移表达式

$$\psi_r = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N_j} (\Gamma_{0j}^r r^{\lambda_n^{(j)}} + \Gamma_{1j}^r r^{\lambda_n^{(j)}+1}) \quad (12a)$$

$$\psi_\theta = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N_j} (\Gamma_{0j}^\theta r^{\lambda_n^{(j)}} + \Gamma_{1j}^\theta r^{\lambda_n^{(j)}+1}) \quad (12b)$$

$$\psi_w = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{N_j} (\Gamma_{0j}^w r^{\lambda_n^{(j)}} + \Gamma_{1j}^w r^{\lambda_n^{(j)}+1}) \quad (12c)$$

式中 N_j 为 ($j=\alpha, \beta$) α 和 β 类的特征值个数,式中的待定系数需要通过第五节确定。

4 Reissner 板的等几何分析方法

各向同性 Reissner 板中应力与应变关系可以表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{Q}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b, \quad \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (13)$$

式中 弯曲应力 $\boldsymbol{\sigma}_b = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$, 横向剪切应力 $\boldsymbol{\sigma}_s = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$, 弯曲应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$, 横向剪切应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$, $\mathbf{Q}_s = E/[2(1 + \nu)]\mathbf{I}_{2 \times 2}$,

$$\mathbf{Q}_b = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{2 \times 2} \text{ 为 } 2 \times 2 \text{ 单位阵。}$$

当不考虑体力时,Reissner 板的总势能为

$$E_R = \int_V [(\sigma_b^T \varepsilon_b + k \sigma_s^T \varepsilon_s) / 2] dV - \int_\Gamma (Qw + M_x \psi_y + M_y \psi_x) d\Gamma \quad (14)$$

式中 $k = 5/6$ 为剪切修正系数。

定义控制点位移向量为 $\delta_i = \{\omega_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}\}^T$, Reissner 板内任一点的广义位移可采用 NURBS 基函数插值表示为

$$\{\omega, \psi_x, \psi_y\}^T = \mathbf{R} \delta^e \quad (15)$$

式中 $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_M]$, $\mathbf{R}_i = R_i(\xi, \eta) \mathbf{I}_{3 \times 3}$, $\delta^e = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M]$, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为 3×3 单位阵, $R_i(\xi, \eta)$ 为双变量 NURBS 基函数, (ξ, η) 为参数坐标, $M = (p+1)(q+1)$ 为各个单元的控制点数量, p 和 q 分别为 NURBS 基函数在 ξ 和 η 方向的阶次, i 为控制点的编号。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \delta^e \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{B}_b = [\mathbf{B}_b^{(1)}, \dots, \mathbf{B}_b^{(i)}, \dots, \mathbf{B}_b^{(M)}]$$

$$\mathbf{B}_s = [\mathbf{B}_s^{(1)}, \dots, \mathbf{B}_s^{(i)}, \dots, \mathbf{B}_s^{(M)}]$$

$$\mathbf{B}_b^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x R_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y R_i \\ 0 & \partial_y R_i & \partial_x R_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s^{(i)} = \begin{bmatrix} \partial_x R_i & -R_i & 0 \\ \partial_y R_i & 0 & -R_i \end{bmatrix}$$

将式(13,16)代入式(14),可以得到单元刚度阵和载荷向量为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega^e \quad (17)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{R}^T \mathbf{f} d\Omega^e$$

式中 $\mathbf{D}_b = \mathbf{Q}_b t^3 / 12$, $\mathbf{D}_s = 5t \mathbf{Q}_s / 6$ 。

将单元刚度阵和载荷向量组装后可得到 Reissner 板的等几何分析计算列式为

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (18)$$

5 含裂纹 Reissner 板的半解析等几何分析方法

如图 2 所示,将整体板结构划分为两类区域,即裂纹尖端附近的区域为奇异区 Ω_N (黄色)和不含裂纹尖端的非奇异区 Ω_F (蓝色)。本文 Ω_N 选取为以裂纹尖端为圆心,半径为 d 的圆形区域。

根据控制点的分布,等几何列式可以写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NF} \\ \mathbf{K}_{FN} & \mathbf{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N \\ \mathbf{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_F \end{Bmatrix} \quad (19)$$

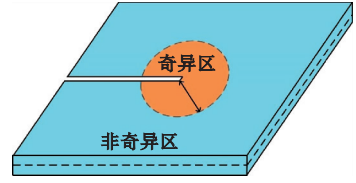


图 2 含裂纹 Reissner 板中的区域划分

Fig. 2 Region division in a cracked Reissner plate

式中下标 N 和 F 分别代表奇异区和非奇异区。奇异区内广义位移在柱坐标和直角坐标中满足

$$\begin{aligned} \psi_x &= \psi_r \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta \\ \psi_y &= \psi_r \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

因此,奇异区内的广义位移向量可以表示为

$$\mathbf{u}_N = \Phi \mathbf{c} \quad (21)$$

式中 Φ 是转换矩阵, \mathbf{c} 为待定系数向量, $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_\alpha, \mathbf{c}_\beta]$, $\mathbf{c}_j = [c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jn}]$, $j = \alpha, \beta$, $\mathbf{c}_{\alpha i} = [\delta_{30\alpha}, \delta_{40\alpha}, \delta_{60\alpha}]$, $\mathbf{c}_{\beta i} = [\delta_{30\beta}, \delta_{40\beta}, \delta_{50\beta}]$ 。

将式(21)代入式(19),得到含裂纹 Reissner 板弯曲断裂分析的半解析等几何分析方法计算列式为

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{K}_{NN} \Phi & \Phi^T \mathbf{K}_{NF} \\ \mathbf{K}_{FN} \Phi & \mathbf{K}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi^T \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_F \end{Bmatrix} \quad (22)$$

从式(22)可知,奇异区内大量的未知控制点位移转换成少量的特征解待定系数,大幅降低计算成本。求解上述等几何耦合列式,即可得到待定系数向量 \mathbf{c} ,从而得到裂纹尖端奇异场的显式表达式。

6 应力强度因子

含裂纹 Reissner 板的应力强度因子定义为

$$\begin{aligned} K_1(z) &= \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_\theta |_{\theta=0}(r, z) \\ K_2(z) &= \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{r\theta} |_{\theta=0}(r, z) \\ K_3(z) &= \sqrt{2\pi r} \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\theta z} |_{\theta=0}(r, z) \end{aligned} \quad (23)$$

式中各应力的表达式可由式(1,12)获得。从式(23)可以看出,含裂纹均质 Reissner 板的应力强度因子随板厚变化, K_1 和 K_2 的最大值发生于板的表面处 ($z = \pm t/2$); K_3 的最大值发生于板的中面 ($z = 0$)。由于实际应用中主要关心应力强度因子的最大值,后续计算出现的 K_1, K_2 和 K_3 均为对应强度因子的最大值。此外, $\tau_{\theta z} |_{\theta=0}$ 可能取负值,即应力反向,因此这里规定 $K_3 = |K_3|$ 。

7 数值算例

在数值算例中,考虑三种工况,(1)工况 1,四

边自由板,上下边界处承受均布弯矩 M_0 ; (2) 工况 2,上下边界简支板,其余两边为自由,板面承受均布剪力 q_0 ; (3) 工况 3,四边自由板,上下边界处承受均布扭矩 T_0 。此外,算例均采用无量纲的应力强度因子,即 $K_n^* = K_{n,t}^2 / (6M_0 \sqrt{\pi a})$, $K_n^* = K_{n,t}^2 / (6T_0 \sqrt{\pi a})$, $n=1,2,3$ 。

7.1 含中心裂纹矩形板

考虑如图 3 所示的含中心裂纹矩形板,板的尺寸为 $2W \times 2H$,裂纹长度为 $2a$ 。图 3a 和 3b 分别对应工况 1 和工况 2。由于结构和载荷的对称性,两种工况的计算过程均只取板的右半部分。

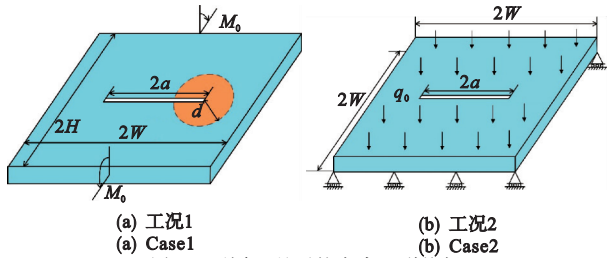


图 3 A center-cracked rectangular plate under different loads

为了验证本方法的精确性,表 1 给出了工况 1 下不同板厚和板宽的无量纲应力强度因子与解析解的比值 K_1^* / K_1^{ref} ,其中 K_1^{ref} 为文献[4]给出的有限宽度无限长板的应力强度因子的解析解,为了模拟文献[4]有限宽度的无限长条板,计算参数选取为 $H=10a, \nu=0.3$ 。由表 1 可以发现,扩展有限元方法的计算误差随着板的厚度变小而逐渐变大,最大误差 9.4%,而本方法在不同的厚度下均保持了良好的计算精度,最大误差 0.9%。此外,扩展有限元方法采用 1424 个 MITC4 单元,计算自由度约为 4272,而本方法采用了 1024 个三次 NURBS 单元,计算自由度为 4161,但本方法无需网格划分,因此本方法的计算效率相比扩展有限元方法有所提高。

图 4 给出了工况 2 下不同裂纹长度和厚度下的应力强度因子 K_1 ,计算参数为 $\nu=0.3, W=H=1$,可以发现本方法的计算结果与参考文献[9]的结果吻合良好,当裂纹长度变大时,应力强度因子随之增大;当板厚度变大时,应力强度因子也随之变大。

为了研究本方法的收敛性,图 5(a)给出工况 1 下不同特征解项数 N 对应的无量纲强度因子 K_1^* ,计算参数为 $d/a=0.1, W=H=10a, W=4t$ 。可以发现,当特征解项数 N 大于 15,曲线趋于稳定值。图 5b 给出工况 1 下不同奇异区半径 d/a

表 1 工况 1 下不同厚度和宽度对应的 K_1^* / K_1^{ref}
Tab. 1 K_1^* / K_1^{ref} for various thicknesses and widths under case 1 load

		W/t=2					
		W/a=20	10	5	2.5	2	1.5
本方法		0.998	0.998	0.999	1.001	1.001	1.000
XFEM ^[13]		0.988	0.992	0.997	1.000	0.999	1.013
		W/t=4					
		W/a=20	10	6.66	5	4	2
本方法		0.995	0.998	0.999	0.999	0.999	0.998
XFEM ^[13]		0.989	0.993	0.995	0.996	0.997	0.998
		W/t=6					
		W/a=15	10	7.5	6	3	1.5
本方法		0.995	0.998	0.998	0.998	0.994	0.992
XFEM ^[13]		1.067	1.052	1.069	1.070	1.054	1.057
		W/t=8					
		W/a=20	13.33	10	8	4	2
本方法		0.995	0.997	0.998	0.998	0.995	0.992
XFEM ^[13]		1.077	1.090	1.094	1.092	1.072	1.062

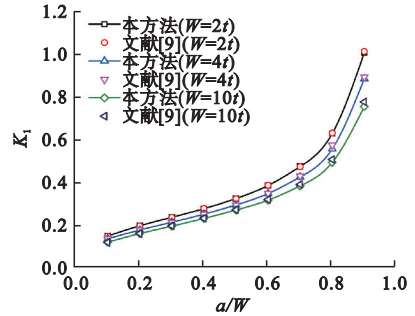


图 4 工况 2 下不同裂纹长度和厚度下的应力强度因子 K_1
Fig. 4 K_1 for different crack lengths and thicknesses under case 2

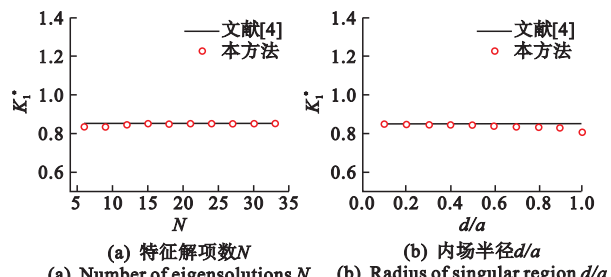


图 5 参数对无量纲应力强度因子 K_1^* 的影响(工况 1)
Fig. 5 Effect of parameters on non-dimensional K_1^* (case 1)

对应的无量纲强度因子 K_1^* ,计算参数取为 $N=33, W=H=10a, W=4t$,奇异区的半径应该选取在 $0.1 \leq d/a \leq 0.5$ 范围内。因此,后续计算均采用 $N=33$ 和 $d/a=0.1$ 以保证计算结果的精确性。

7.2 含边裂纹矩形板

为了进一步验证本文方法的正确性,考虑如图6所示的含边裂纹矩形板,其宽度为 $L/2$,长度为 L ,裂纹长度为 a ,裂纹距离上下边界的距离均为 $L/2$ 。图6a和6b分别对应工况1和工况3。其他计算参数为 $L=20a, \nu=0.3$ 。

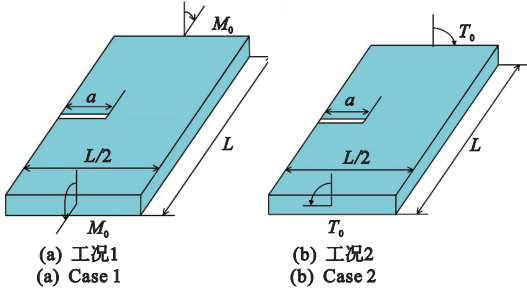


图6 不同工况下的含边裂纹板

Fig. 6 An edge-cracked plate under different loads

表2给出了工况1不同厚度下含单边裂纹板的无量纲应力强度因子 K_1^* ,此时为纯I型断裂问题,有 $K_2^*=K_3^*=0$ 。从表2可以发现,本方法的计算结果与参考文献[11]的结果吻合良好,最大误差为0.63%。表3给出了工况3不同厚度下含单边裂纹的无量纲应力强度因子 K_2^* 和 K_3^* ,此时 $K_1^*=0$ 。本方法的计算结果与参考文献[11]的结果同样具有良好的吻合度,最大误差为2.38%。

表2 工况1不同厚度下含单边裂纹板的 K_1^*
Tab. 2 K_1^* for various thicknesses under case 1

	t/a				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
奇异元法 ^[11]	0.69991	0.74844	0.78451	0.81542	—
外推法 ^[11]	0.70372	0.74917	0.78484	0.81554	—
本方法	0.70256	0.75273	0.78946	0.82070	0.84850

表3 工况3不同厚度下含单边裂纹板 K_2^* 和 K_3^*
Tab. 3 K_2^* and K_3^* with various thicknesses under case 3

	K_2^*				
	$t/a=0.5$	1.0	1.5	2.0	2.5
奇异元法 ^[11]	0.5212	0.4909	0.4565	0.4227	—
外推法 ^[11]	0.5138	0.4862	0.4529	0.4195	—
本方法	0.5073	0.4846	0.4526	0.4197	0.3899
	K_3^*				
	$t/a=0.5$	1.0	1.5	2.0	2.5
奇异元法 ^[11]	0.2522	0.2690	0.2902	0.3134	—
外推法 ^[11]	0.2534	0.2694	0.2910	0.3138	—
本方法	0.2576	0.2758	0.2971	0.3205	0.3450

此外,为了研究泊松比 ν 对应力强度因子的影响,图7给出了不同泊松比对应无量纲应力强度因子的变化曲线。发现随着泊松比增大, K_1^* 和 K_2^* 同时增大,而 K_3^* 变小,但是泊松比对应力强度因子的数值影响较小,泊松比从0.05增大至0.45,无量纲强度因子的增大幅度不超过8.4%。

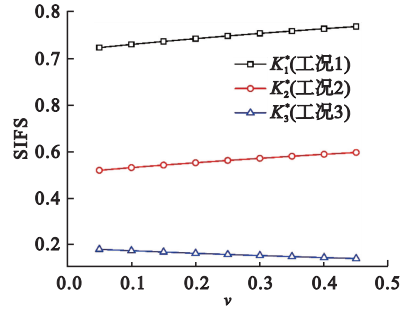


图7 泊松比 ν 对无量纲应力强度因子的影响

Fig. 7 Effect of Poisson's ratios ν on non-dimensional SIFs

7.3 含折线裂纹方形板

考虑内部含折线裂纹的方形板,如图8所示。图8a和8b分别对应工况1和工况3,板的尺寸为 $2W \times 2W$,AC段裂纹长度为 a ,方向平行于 x 轴,CB段裂纹长度为 b ,与 x 轴的夹角为 α 。

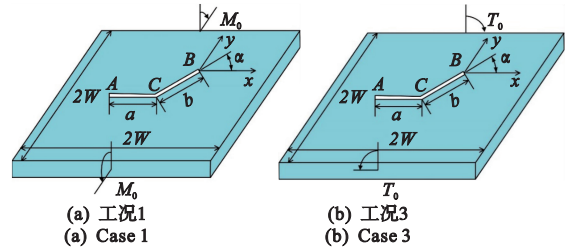


图8 不同工况下的含折线裂纹方形板

Fig. 8 A square plate with a broken line sharp crack under different loads

考虑裂纹倾斜角度 α 对无量纲强度因子的影响,图9给出两种工况下不同角度 α 对应的应力强度因子,计算参数为 $a=b=0.25W, t/a=2, \nu=0.25$ 。可以看到,随着倾斜角度 α 增大,各应力强度因子变化不同,工况1下裂纹尖端A处 K_1^* 减小, K_2^* 先增大后减小,而 K_3^* 增大;裂纹尖

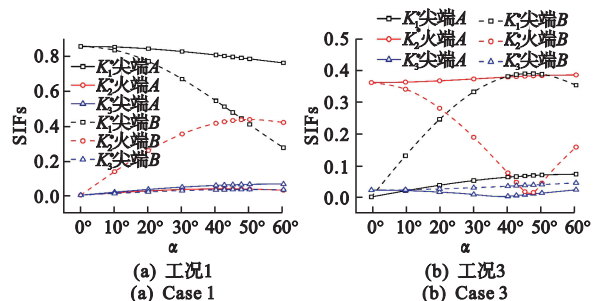


图9 裂纹倾斜角度 α 对无量纲应力强度因子的影响

Fig. 9 Effect of crack inclined angle α on non-dimensional SIFs

端 B 处 K_1^* 减小, K_2^* 先增大后减小, K_3^* 先增大后减小; 工况 3 下裂纹尖端 A 处 K_1^* 增大, K_2^* 增大, K_3^* 先减小后增大; 裂纹尖端 B 处 K_1^* 先增大后减小, K_2^* 先减小后增大, K_3^* 增大。从上述现象可以看出, 折线裂纹的应力强度因子与偏折角度高度相关。此外, 本方法预测的变化曲线较为平滑, 再次说明本方法对于含任意形状裂纹的 Reissner 板断裂问题都有较好的适用性。最后, 图 10 和 11 分别给出了工况 1 和工况 3 下 $\alpha=45^\circ$ 时奇异区的应力分布, 图中应力分布光滑, 并且可以看到明显的应力集中现象。

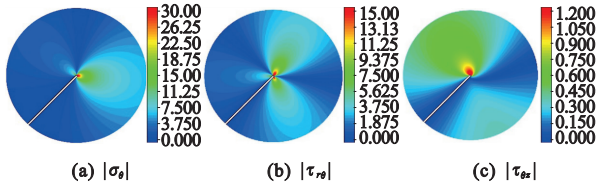


图 10 尖端 B 奇异区各应力分布 ($\alpha=45^\circ$, 工况 1)

Fig. 10 Stresses in singular region at crack tip B ($\alpha=45^\circ$, case 1)

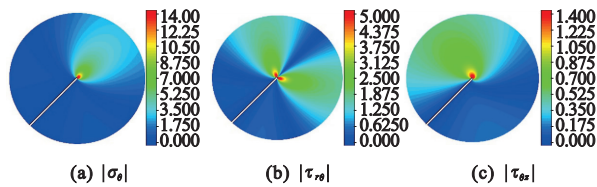


图 11 尖端 B 奇异区各应力分布 ($\alpha=45^\circ$, 工况 3)

Fig. 11 Stresses in singular region at crack tip B ($\alpha=45^\circ$, case 3)

8 结 论

本文将解析方法和等几何方法相结合, 提出一种适用于 Reissner 板断裂分析的高精度耦合方法, 即半解析等几何分析方法。该方法可以直接获得裂尖附近的奇异应力场及其应力强度因子的显式表达式。数值算例验证了本方法的精确性和收敛性, 并分析了含不同裂纹板的弯曲断裂问题, 参数分析结果表明, 泊松比对应力强度因子的影响较小; 裂纹的倾斜角度则会显著影响应力强度因子的数值。

参考文献(References):

[1] 韩国庆, 张先锋, 谈梦婷, 等. 透明陶瓷材料冲击响应特性及损伤演化规律研究进展[J]. 力学进展, 2023, **53**(3): 497-560. (HAN Guo-qing, ZHANG Xian-feng, TAN Meng-ting, et al. Research progress on impact response characteristics and damage evolution law of transparent ceramics[J]. *Advances in Mechan-*

ics, 2023, **53**(3): 497-560. (in Chinese))

[2] 张 恒, 张 雄, 乔丕忠. 近场动力学在断裂力学领域的研究进展[J]. 力学进展, 2022, **52**(4): 852-873. (ZHANG Heng, ZHANG Xiong, QIAO Pi-zhong. Advances of peridynamics in fracture mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 2022, **52**(4): 852-873. (in Chinese))

[3] 柳春图, 李英治. 平板弯曲断裂问题研究的进展[J]. 力学进展, 1982, **12**(4): 346-359. (LIU Chun-tu, LI Ying-zhi. Research progress on bending fracture of flat plate[J]. *Advances in Mechanics*, 1982, **12**(4): 346-359. (in Chinese))

[4] Boduroglu H, Erdogan F. Internal and edge cracks in a plate of finite width under bending[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, **50**(3): 621-629.

[5] Knowles J K, Wang N M. On the bending of an elastic plate containing a crack[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1960, **39**(1-4): 223-236.

[6] Sinclair G B. Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2004, **57**(5): 385-439.

[7] Malavika V A, Asraff A K, Kumar M, et al. Fracture analysis of plates and shells using FEM and XFEM [J]. *Innovative Infrastructure Solutions*, 2021, **6**(1): 43.

[8] Kim J, Hill M R. Weight functions for a finite width plate with single or double radial cracks at a circular hole[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, **168**: 112-130.

[9] Leung A Y T, Su R K L. Fractal two-level finite element analysis of cracked Reissner's plate[J]. *Thin-Walled Structures*, 1996, **24**(4): 315-334.

[10] 张兆军, 王 珊, 姚伟岸. 含界面裂纹 Reissner 板弯曲问题分析的奇异单元[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(5): 608-614. (ZHANG Zhao-jun, WANG Shan, YAO Wei-an. A singular element for Reissner plate bending problem with interface cracks[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(5): 608-614. (in Chinese))

[11] Yao W A, Zhang Z J, Hu X F. A singular element for reissner plate bending problem with V-shaped notches[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2014, **74**: 143-156.

[12] Zhang Z J, Gao H Y, Yao W A. Singularities of an inclined crack terminating at the bi-material interface in a Reissner plate[J]. *International Journal of Fracture*, 2017, **205**(1): 23-36.

[13] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite el-

- ement method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(48-50):7161-7183.
- [14] Xing C, Wang Y X, Waisman H. Fracture analysis of cracked thin-walled structures using a high-order XFEM and Irwin's integral[J]. *Computers & Structures*, 2019, **212**:1-19.
- [15] Xing C, Zhou C W, Sun Y L. A singular crack tip element based on sub-partition and XFEM for modeling crack growth in plates and shells[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2023, **215**:103890.
- [16] Yu X, Yang Z T, Zhang Q Q, et al. A novel coupling approach for determination of stress intensity factor for bi-material Reissner plates under bending or twisting[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, **122**:103568.
- [17] Yu X, Yang Z T, Zhang Q L, et al. Accurate fracture analysis of multi-material V-notched Reissner plates under bending or twisting[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2023, **28**(5):1190-1215.
- [18] Zhou Z H, Yu X, Yang Z T, et al. An isogeometric-symplectic coupling approach for fracture analysis of magneto-electroelastic bimetals with crack terminating at the interface[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **216**:106510.
- [19] Gupta V, Jameel A, Verma S K, et al. An insight on NURBS based isogeometric analysis, its current status and involvement in mechanical applications[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2023, **30**(2):1187-1230.

A semi-analytical isogeometric analysis for fracture of Reissner plates

GUAN Gao-fei, ZHANG Ying-rui, YU Xiong, XU Xin-sheng*

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A plate is an important fundamental component in engineering. Due to the influence of materials or manufacturing techniques, some defects are inevitable during the manufacturing process, which gradually develop into macroscopic cracks in service, leading to fracture. At present, the methods for fracture analysis of plates are mainly divided into two categories: analytical and numerical methods. Most analytical methods are only applicable to infinite or semi-infinite structures and simple boundary conditions. Numerical methods require high-density grids in the vicinity of the crack tip, and cannot accurately predict fracture parameters of the structure, requiring complex post-processing procedures. To solve the above issues, this paper proposes a high-precision semi-analytical isogeometric analysis (IGA) for bending fracture problems of cracked Reissner plates. Firstly, the series expansions solutions of generalized displacements (deflections and rotation angles) and generalized stresses (bending moments and shear forces) near the crack tip of a cracked Reissner plate are obtained. Secondly, the isogeometric model of the overall plate is divided into two regions: singular regions near the crack tip and non-singular region without the crack tip. In the singular region, the obtained series solutions are employed to change the large number of nodal unknowns into a small number of undetermined coefficients. However, in the non-singular region, the nodal unknowns remain unchanged. Thus, the formulation of the semi-analytical IGA for bending fracture problems of cracked Reissner plates is obtained, and explicit expressions of singular stress fields and corresponding stress intensity factors (SIFs) are derived simultaneously. Numerical examples verify the accuracy of the present approach and effects of influencing parameters on SIFs are discussed too.

Key words: cracked Reissner plate; bending fracture; semi-analytical IGA; SIFs; analytical solution