

DOI: 10.7511/jslx20230705003

# 6次 Serendipity 单元 Q32 的实现

胡圣荣\*, 张巍, 许静静, 刘新红

(华南农业大学 水利与土木工程学院, 广州 510642)

**摘要:** 高次 Serendipity 单元有内部节点, 不便于网格划分及实际使用, 文献较少涉及其实现和实际性能。本文给出了 32 节点 6 次单元 Q32 的形函数, 探讨了单元刚度矩阵的两类积分方案, 即高斯积分和完全多项式积分。后者的积分点数少于前者。以悬臂梁的横力弯曲为例, 测试表明,  $6 \times 6$  (36 点) 高斯积分或 11 阶的各种完全多项式积分都可作为 Q32 的积分方案。实用中可取 25 点对称积分, 其精度与  $6 \times 6$  高斯积分相当, 但计算量约只有后者的 69%。对三次位移场问题, 即使网格严重畸变, Q32 也能较准确地模拟。

**关键词:** Serendipity 单元; 6 次元 Q32; 四边形单元; 高阶单元; 完全多项式积分

**中图分类号:** O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-4708(2024)06-1138-05

## 1 引言

在二维问题的有限元分析时通常采用三角形和四边形单元, 后者又可分为 Lagrangian (L 型) 和 Serendipity (S 型) 两种单元类型。如 2~4 次 L 型单元有 Q9, Q16, Q25; 2~4 次 S 型单元有 Q8, Q12, Q17。S 型单元比 L 型单元内部节点少, 节点总数也少; 且单元阶次越高, 节点数的这种优势也越大。

Lee 等<sup>[1]</sup>研究了网格畸变对这两类单元性能的影响, 发现 L 型单元不受角度畸变的影响, S 型单元则非常敏感, 随着单元畸变的增加, 精度明显下降。其原因在于, 当单元畸变后, 单元位移场在全局坐标  $(x, y)$  和局部坐标  $(\xi, \eta)$  下的完备性不再一致, 前者的完备阶次会降低。

以二次元 Q8 和三次元 Q12 为例, 虽然其插值函数在局部坐标  $(\xi, \eta)$  下分别是 2 次和 3 次完备的, 但缺少  $\xi^2 \eta^2$  项, 使得在全局坐标  $(x, y)$  下, 对畸变单元只能完备到 1 次。

对 L 型单元, 插值函数在局部坐标下除了完备项外, 还有大量高次项。这些项看似多余, 却保证了全局坐标下的高次完备性。文献<sup>[1, 2]</sup>的算例都表明, 当单元形状不规则时, Q9 单元比 Q8 和

Q12 的结果好。

为获得抗畸变的四边形单元, 文献<sup>[3-5]</sup>构造了 2~4 次样条元, 取得了很好的结果。对于更高次单元的实现和实际性能, 文献鲜少报道。本文探讨了 6 次 Serendipity 单元的实现, 特别是单元刚度矩阵的积分; 以横力弯曲问题为例, 该单元显示出良好的性能。

## 2 形函数

Serendipity 单元族如图 1 所示, 其中 4 次元开始有内部节点。内部节点也可按三角形分布<sup>[6, 7]</sup> (内节点数最少), 但节点对四边形区域不对称, 会使单元性能具有方向性。

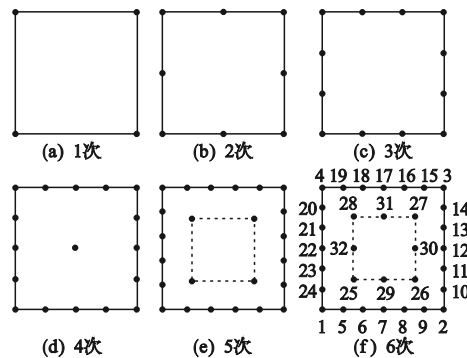


图 1 Serendipity 单元族  
Fig. 1 Serendipity element family

收稿日期: 2023-07-05; 修改稿收到日期: 2023-09-24.

基金项目: 华南农业大学质量工程 (K20262); 华南农业大学在线开放课程 (224358) 资助项目.

作者简介: 胡圣荣\* (1967-), 男, 博士, 教授 (E-mail: hsrzz@scau.edu.cn).

引用本文: 胡圣荣, 张巍, 许静静, 等. 6 次 Serendipity 单元 Q32 的实现 [J]. 计算力学学报, 2024, 41(6): 1138-1142.

HU Sheng-rong, ZHANG Wei, XU Jing-jing, et al. Implementation of sextic serendipity element Q32 [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(6): 1138-1142.

高阶 Serendipity 单元的构造有一定的技巧和难度<sup>[7-10]</sup>。文献[7]介绍了高阶形函数的构造,并给出了6阶形函数;文献[10]则给出了4~10阶的

形函数。对32节点6次 Serendipity 单元 Q32,如图1(f),将有关结果整理和改写,得其形函数如下。

$$\begin{cases}
 a_i = \xi_i \xi, b_i = \eta_i \eta \\
 N_i^0 = \left(\frac{1}{160}\right)(1+a_i)(1+b_i)[81(a_i^5+b_i^5)-45(a_i^3+b_i^3)+4(a_i+b_i)-40] \quad (i=1\sim 4) \\
 N_i^0 = \left(\frac{27}{80}\right)(1-\xi^2)(1+b_i)(9\xi^2-1)(\xi^2+a_i) \quad (i=5,9,15,19) \\
 N_i^0 = \left(\frac{-27}{32}\right)(1-\xi^2)(1+b_i)(9\xi^2-4)(\xi^2+a_i) \quad (i=6,8,16,18) \\
 N_i^0 = \left(\frac{27}{80}\right)(1-\eta^2)(1+a_i)(9\eta^2-1)(\eta^2+b_i) \quad (i=10,14,20,24) \\
 N_i^0 = \left(\frac{-27}{32}\right)(1-\eta^2)(1+a_i)(9\eta^2-4)(\eta^2+b_i) \quad (i=11,13,21,23) \\
 N_i^0 = \left(\frac{1}{8}\right)(1-\xi^2)(1+b_i)(9\xi^2-4)(9\xi^2-1) \quad (i=7,17) \\
 N_i^0 = \left(\frac{1}{8}\right)(1-\eta^2)(1+a_i)(9\eta^2-4)(9\eta^2-1) \quad (i=2,22) \\
 N_i^0 = \left(\frac{4}{9}\right)(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1+4a_i)(1+4b_i)[4(a_i+b_i)-1] \quad (i=25\sim 28) \\
 N_i^0 = \left(\frac{2}{3}\right)(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-4\xi^2)(1+4b_i) \quad (i=29,31) \\
 N_i^0 = \left(\frac{2}{3}\right)(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-4\eta^2)(1+4a_i) \quad (i=30,32) \\
 N_i = N_i^0 - \sum_{k=25}^{32} N_i^0(\xi_k, \eta_k) N_k \quad (i=1\sim 24)
 \end{cases}$$

上面将有些节点的形函数写成通式,以简化编程。另外,为了简化表达式,将形函数的生成分三步进行,(1)生成边界节点的形函数(无内部节点);(2)生成内部节点的形函数(在边界上为0);(3)用内部节点的形函数修改边界节点的形函数(使其在内部节点上为0)。

### 3 积分方法

四边形单元的刚度矩阵为

$$[K]^e = \int_{A^e} [B]^T [D] [B] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (1)$$

式中  $B$  矩阵由形函数  $N_i$  对全局坐标  $x, y$  的一阶偏导数组成,  $|J|$  为坐标变换引起的雅克比行列式。

当单元形状不规则时,式(1)的被积函数是一个复杂的有理分式,解析积分繁琐<sup>[11]</sup>,常用数值积分。

假设被积函数为多项式(一般函数可设想为泰勒展开式),基为  $\{1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \dots, \xi^i \eta^j, \dots\}$ , 最

高次项为  $\xi^r \eta^s$ 。

若需对整个多项式精确积分,则最高次项  $\xi^r \eta^s$  也需精确积分。设函数对  $\xi$  和  $\eta$  对称,  $r \leq p, s \leq p$ 。这时可采用高斯积分

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (2)$$

式中  $\xi_i, w_i$  和  $\eta_j, w_j$  分别是  $\xi$  和  $\eta$  方向的一维积分点坐标和权。由于一维  $n$  点高斯积分的精度  $p=2n-1$ ,故对二维  $n \times n$  高斯积分,多项式中可以精确积分的最高次项  $\xi^r \eta^s = \xi^{2n-1} \eta^{2n-1}$ 。

若只对被积函数中的完全多项式部分精确积分(不考虑非完全高次项的积分准确性),则可采用针对完全多项式的积分<sup>[12-17]</sup>。设完全多项式的次数为  $p, r+s \leq p$ 。积分格式如下

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i w_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (3)$$

式中  $(\xi_i, \eta_i)$  和  $w_i$  分别是(二维)积分点的坐标和权。该方案下多项式中可以精确积分的最高次项  $\xi^r \eta^s$  的次数  $r+s = p$ 。文献[14]给出了9~15阶的对称积分方案,文献[15]给出了新的1~21阶的对称积分方案。采用旋转对称的积分方案,可获得

最少的积分点数<sup>[16,17]</sup>。其中旋转对称的积分点可能对称,也可能不对称,如图2所示。

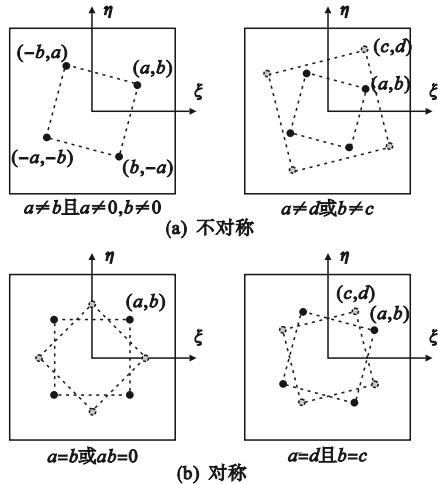


图2 旋转对称的积分点

Fig. 2 Integration points in rotation-symmetry

对L型单元,插值函数以及单元刚度矩阵中有大量非完全高次项,考虑这些项的积分,需要高斯积分。对S型单元,这些非完全高次项较少,高斯积分和完全多项式积分都可采用。后者积分点数较少,若可获得与前者相当的有限元精度,则是非常经济实用的。

### 4 算例

为简洁起见,这里仅以矩形悬臂梁的横力弯曲问题为例进行测试,如图3所示。

该模型有不同的理论解<sup>[18-21]</sup>,即理论解不唯一,相应的端点挠度值也不唯一。这是因为所用数学模型的控制方程和边界条件有差异(主要是固定端约束的处理),导致了理论解的差异;但位移场中占主导的是坐标 $(x,y)$ 的3次式。

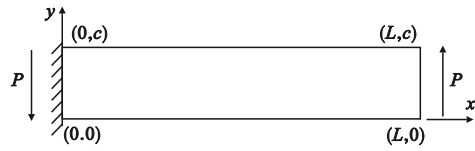


图3 悬臂梁的横力弯曲

Fig. 3 Transverse bending of cantilever beam

有限元中对固定端的处理也不唯一,图4为常见的两种。若改变观察者位置,从背面来看该模型,则得图5。其相当于将图4绕y轴旋转180°。计算A点的挠度,结果列入表1。

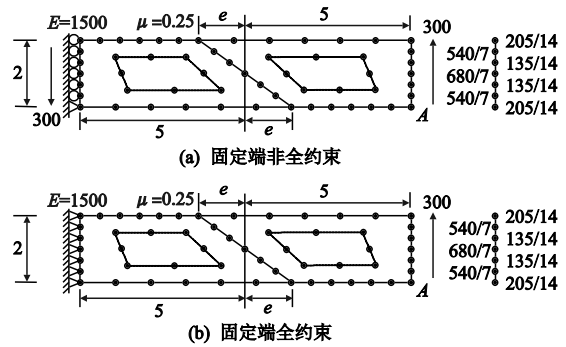


图4 有限元正面模型

Fig. 4 FE front model

表1 A点的挠度

Tab. 1 Deflection of point A

	积分	$e=0$	$e=1$	$e=2$	$e=3$	$e=4$	$e=4.99$	$e=5$
图4(a)和图5(a)	6×6	102.69	102.70	102.70	102.71	102.72	102.74	102.74
	28S	102.70	102.70	102.70	102.70	102.71	102.70	102.69
	25S	102.69	102.70	102.70	102.71	102.71	102.69*	102.69*
	25R	102.73	102.72	102.77	102.50	102.74	102.78	102.78
图4(a)	24R	102.70	102.71	102.73	102.75	102.75	102.72	102.72
图5(a)	24R	102.69	102.69	102.69	102.70	102.71	102.78	102.79
Q8 <sup>[4]</sup>	2×2	100.00	99.33	89.15	59.27	31.75	23.32 <sup>#</sup>	
Q12 <sup>[4]</sup>	3×3	102.60	99.95	93.32	78.13	53.24	42.37 <sup>#</sup>	
Q17 <sup>[4]</sup>	4×4	102.61	102.61	102.29	101.20	97.96	95.46 <sup>#</sup>	
参考解					102.75			
图4(b)和图5(b)	6×6	102.53	102.54	102.55	102.55	102.55	102.51	102.51
	28S	102.54	102.55	102.58	102.59	102.59	102.55	102.53
	25S	102.52	102.54	102.55	102.56	102.56	102.49*	102.49*
	25R	102.64	102.70	102.79	102.87	103.17	104.44	104.49
图4(b)	24R	102.55	102.57	102.61	102.65	102.64	102.51	102.50
图5(b)	24R	102.54	102.56	102.57	102.54	102.53	102.60	102.60
参考解					102.80			

<sup>#</sup>  $e=4.5$ ; \* 出现 $|J|<0$

表 1 也列出了 2~4 次 Serendipity 单元 Q8, Q12, Q17 的计算结果。可见, Q8 和 Q12 的抗畸变性较差,这与文献[1]结论一致。Q17 的结果有较大改观,但本文 Q32 的结果更加稳定。

表 1 除了 6×6(36 点)高斯积分外,还对比了积分阶次  $p=11$  的几种完全多项式积分。

28S:28 点对称积分<sup>[14]</sup>,积分点在积分区域内;对称分布;权值为正。

25S:25 点对称积分<sup>[15]</sup>,有积分点在积分区域外;对称分布;权值为正。

25R:25 点旋转对称积分<sup>[22]</sup>,积分点在积分区域内;旋转分布,对称;有权值为负。

24R:24 点旋转对称积分<sup>[16]</sup>,积分点在积分区域内;旋转分布,非对称;权值为正。

对四边形区域,理想的积分方案是积分点尽量少,位于积分区域内,对称分布,权值为正。上面四种方案对此都有所欠缺(难以兼顾)。

前文已指出,图 3 的模型没有统一的理论解,如以文献[20]的公式和文献[21]的 3 个公式可得到右端面各点(包括点 A)的挠度分别为 102.625, 103.750, 102.950, 103.075。表中两种约束下的参考解是文献[23],分别采用低次元 Q4, Qm6, Q8 不断细分网格,以及高次 L 型单元和三角形单元不断提高单元阶次的有限元逼近的结果。

先看总体情况。由表 1 可见,(1)当积分点对称时(6×6 高斯积分,28S,25S,25R),图 4 和图 5 的计算结果相同。积分点不对称时(24R)则结果不同(虽然差异不大)。(2)高斯积分和完全多项式积分的精度相当,但后者的计算效率较高,如 25 点方案的计算量只有前者的 25/36≈69%,约节省 31%。(3)各种积分方案的结果相互间差异不大,且随畸变加剧,变动较平缓,表明对 3 次位移场的问题,单元有很好的抗畸变性。

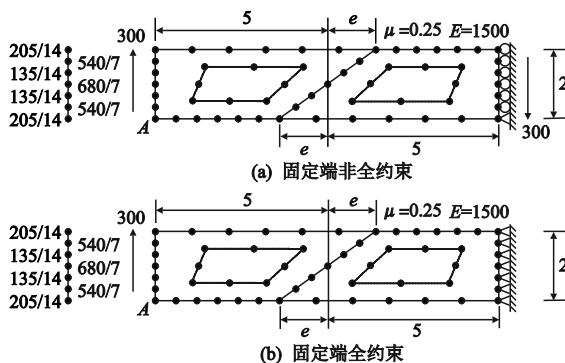


图 5 有限元背面模型  
Fig. 5 FE back model

再看细致差异。由表 1 可知,(1)对称积分中,

28 点积分和 25 点积分的结果基本相同(4 位有效数字时)。虽然 25 点积分中有域外积分点,在严重畸变时局部出现  $|J| < 0$  (坐标变换异常),但并未影响全局,该积分方案还是可接受的。(2)旋转对称积分中,25 点积分的结果没有其他几种方案稳定(下划线的数据为波动中偏小或偏大),而 24 点积分对正面模型和背面模型给出不同结果,使模型具有方向性,这种方案需要审慎采用。

需要指出,表 1 中的积分方案对应 Q32 单元所需的最少积分阶次。若采用更低阶次的积分,如 5×5(25 点)高斯积分或  $p=9$  的完全多项式积分,有限元结果是奇异或异常的。

### 5 结 论

(1)6 次 Serendipity 单元 Q32 的单元刚度矩阵可采用 6×6(36 点)高斯积分或 11 阶完全多项式积分。二者总体精度相当,但后者较经济。

(2)旋转对称积分方案可获得积分点最少的 24 点积分,但其积分点不对称会使有限元结果具有轻微的方向性。实用中可取 25 点对称积分。

(3)对三次位移场问题,即使网格严重畸变, Q32 也能给出比较稳定而准确的结果。

### 参考文献(References):

[1] Lee N S, Bathe K J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, **36**(20): 3553-3576.

[2] 吴永礼. 九节点四边形等参数单元[J]. *航空学报*, 1982, **3**(4): 36-40. (WU Yong-li. 9-node quadrilateral isoparametric element[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1982, **3**(4): 36-40. (in Chinese))

[3] Chen J, Li C J, Chen W J. A 17-node quadrilateral spline finite element using the triangular area coordinates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(1): 125-134.

[4] Chen J, Li C J, Chen W J. A family of spline finite elements[J]. *Computers & Structures*, 2010, **88**(11-12): 718-727.

[5] 陈娟, 李崇君, 陈万吉. 基于面积坐标与 B 网方法的四边形样条单元[J]. *力学学报*, 2010, **42**(1): 83-92. (CHEN Juan, LI Chong-jun, CHEN Wan-ji. Area coordinates and B-net method for quadrilateral spline elements [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, **42**(1): 83-92. (in Chinese))

[6] Masayuki O, Yoshiaki Y, Isoharu N. Reconsideration of rectangular Lagrange families with hierarchy-ranking bases[J]. *Computer Methods in Applied Me-*

- chanics and Engineering*, 1980, **23**(3):369-390.
- [7] Okabe M. Complete Lagrange family for the cube in finite element interpolations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, **29**(1):51-66.
- [8] Taylor R L. On completeness of shape functions for finite element analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972, **4**(1):17-22.
- [9] Çitipitiöglu E. Universal serendipity elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, **19**(6):803-810.
- [10] Rathod H T, Kilari S. General complete Lagrange family for the cube in finite element interpolations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **181**(1-3):295-344.
- [11] Rathod H T, Karim M S. An explicit integration scheme based on recursion and matrix multiplication for the linear convex quadrilateral elements[J]. *International Journal of Computational Engineering Science*, 2001, **2**(1):95-135.
- [12] Tyler G W. Numerical integration of functions of several variables[J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1953, **5**:393-412.
- [13] Franke R. Obtaining cubatures for rectangles and other planar regions by using orthogonal polynomials [J]. *Mathematics of Computation*, 1971, **25**(116):803-817.
- [14] Rabinowitz P, Richter N. Perfectly symmetric two-dimensional integration formulas with minimal numbers of points[J]. *Mathematics of Computation*, 1969, **23**(108):765-779.
- [15] Dunavant D A. Economical symmetrical quadrature rules for complete polynomials over a square domain [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985, **21**(10):1777-1784.
- [16] Cools R, Haegemans A. Another step forward in searching for cubature formulae with a minimal number of knots for the square[J]. *Computing*, 1988, **40**(2):139-146.
- [17] Omelyan I P, Solovyan V B. Improved cubature formulae of high degrees of exactness for the square[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, **188**(2):190-204.
- [18] Wang X D, Shi G. Boundary layer solutions induced by displacement boundary conditions of shear deformable beams and accuracy study of several higher-order beam theories[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, **138**(11):1388-1399.
- [19] Ruocco E, Reddy J N. Analytical solutions of reddy, Timoshenko and bernoulli beam models: A comparative analysis[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2023, **99**:104953.
- [20] Hueck U, Wriggers P. A formulation for the 4-node quadrilateral element[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995, **38**(18):3007-3037.
- [21] 杨振宇, 鲍强, 卢子兴. 平面问题中悬臂梁固支边界条件的简化方法[J]. *力学与实践*, 2022, **44**(6):1404-1410. (YANG Zhen-yu, BAO Qiang, LU Zi-xing. A simplified method for fixed boundary conditions of planar cantilever beams[J]. *Mechanics in Engineering*, 2022, **44**(6):1404-1410. (in Chinese))
- [22] Piessens R, Haegemans A. Cubature formulas of degree eleven for symmetric planar regions[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1975, **1**(2):79-83.
- [23] 胡圣荣, 喻菲菲. 关于 COOK 算例的数值解[J]. *广州城市职业学院学报*, 2015, **9**(2):54-57. (HU Sheng-rong, YU Fei-fei. On numerical solution of COOK's problem[J]. *Journal of Guangzhou City Polytechnic*, 2015, **9**(2):54-57. (in Chinese))

## Implementation of sextic Serendipity element Q32

HU Sheng-rong\*, ZHANG Wei, XU Jing-jing, LIU Xin-hong

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

**Abstract:** The high-order Serendipity elements have internal nodes, which is not convenient for grid division and practical use. There are few publications discussing their implementation and actual performance. This paper introduces the shape function of the 32-node sextic element Q32, and discusses two integration schemes of element stiffness matrix: Gaussian integration and complete polynomial integration. The latter has fewer integration points than the former. Taking the transverse bending of a cantilever beam as an example, the results show that the integration scheme for Q32 can be 6×6 (36-point) Gaussian integration or various 11-order complete polynomial integrations. The 25-point symmetrical integration can be used in practice; its accuracy is comparable to that of 6×6 Gaussian integration, but its calculation workload is about 69% of the latter. Q32 can simulate a cubic displacement field quite accurately even if the mesh is seriously distorted.

**Key words:** Serendipity element; sextic element Q32; quadrilateral element; high-order element; complete polynomial integration