

DOI: 10.7511/jslx20230616001

杆系结构拓扑找力分析

张志宏*, 赵 恺

(上海师范大学 建筑工程学院 土木系, 上海 201418)

摘要:首先,对杆系结构多种类型的线性图表示方法进行了讨论。其次,引入关联矩阵显式来组装平衡矩阵,推导出独立于体系具体形状几何的平衡矩阵新形式即关联矩阵,并基于该形式的平衡矩阵提出了拓扑找力分析的概念。最后,通过杆系结构算例,对比不同情况下的平衡矩阵及其零空间,进一步验证了杆系结构多种类型的线性图表示和拓扑找力的正确性与适用性。

关键词:杆系结构;线性图;平衡矩阵;拓扑找力

中图分类号:O189.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1007-4708(2024)06-1124-06

1 引言

结构分析主要针对形状与内力分布的研究,形状又包含了拓扑与几何。通过图论^[1,2]等相关理论可以把结构转化为图或网络,将结构的拓扑与几何信息更清晰地表现出来。早期图论在结构力学中的应用是将弹性结构转换为等代电路^[3,4],这是物理模型之间的转换,然后再将电路转换为网络,最后采用通用的网络分析工具求解,揭示了电路和结构这两种不同的物理系统的拓扑几何模型是相似的。Shai等^[5,6]提出了通过图解决工程问题的通用方法,通过图论的工具找到解决方案,将问题提升到图形表示的抽象数学水平,保证了结构拓扑信息的完整性,有利于实现快速设计。

基于图论与力法的基础,Kaveh^[7,8]提出了适于计算机编程的平衡矩阵构造方法,从拓扑的角度建立与内力相关的平衡矩阵形式;Pellegrino等^[9]基于平衡矩阵的子空间研究,总结了体系的几何判定问题;在此基础上,陈耀等^[10]提出高阶对称结构可动性判定方法;该形式的平衡矩阵适合应用于结构的线性找力分析^[11,12]。由于组成平衡矩阵的基本未知量包括力与形状几何的信息,基于不同的基本未知量,可以将基于矩阵力法的平衡矩阵转换为各种不同的形式。Tran等^[13-16]在研究张拉整体结

构形态问题时,应用了以节点坐标为未知量的平衡矩阵形式和以力密度为未知量的平衡矩阵形式。

值得指出,目前对杆系结构进行图或网络分析的研究很多,但将杆系结构转化为线性图表示并未形成系统的理论;基于平衡矩阵进行的结构分析问题都是在拓扑几何确定的前提下进行研究,不能独立于具体的形状几何。

本文尝试将杆系结构转化为线性图表示,并在已有平衡矩阵形式的基础上,推导出独立于体系具体形状几何的平衡矩阵新形式,进行杆系结构的拓扑找力分析。

2 杆系结构的线性图表示

2.1 杆系结构抽象为线性图的原则

杆系的线性图原则上应真实、自然和简单。

(1)真实—杆系的线性图必须与实际工程结构的拓扑几何关系一致。线性图需要将顶点和边代表的两类对象(构件与结点)之间的联接关系真实完整地抽象出来。

(2)自然—杆系的图对边和顶点的加权应符合自然规律。顶点与边的加权可以是标量,也可以是矢量或张量,矢量或张量加权的实质是将形状几何信息和材料信息等考虑进去,是所研究问题的完整描述,本质上是对图进行能量这一标量加权,即网

收稿日期:2023-06-16;修改稿收到日期:2023-09-10.

基金项目:上海市自然科学基金(13ZR1430500)资助项目.

作者简介:张志宏*(1974-),男,博士,研究员(E-mail:zzh@shnu.edu.cn).

引用本文:张志宏*, 赵 恺. 杆系结构拓扑找力分析[J]. 计算力学学报, 2024, 41(6): 1124-1129.

ZHANG Zhi-hong, ZHAO Kai. Topological force finding analysis of bar structure [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(6): 1124-1129.

络描述的是能量的分布、传递和转化的客观定律。

(3)简单一杆系的线性图数学模型应在不影响问题实质的前提下采用尽量少的顶点和边。

2.2 杆系结构抽象为线性图表示的方法

杆系结构用线性图表示时,可将结构与地球(基础或地面)抽象为一个整体,包括上部结构与下部结构,上部结构包括构件与结点,下部结构包括地球与支座结点。需要注意的是,支座结点既属于上部结构也属于地球,其主要作用是将上部结构的非封闭力流传递到地球并可以提供位移和力的约束。

由于杆系结构的线性图与力学模型非常接近,结点、构件(二力杆、梁柱构件等双边约束构件)可以与图的顶点和边对应,基础或地面可通过添加一个代表地球的顶点或边来表示。如果将构件看作边时,结点则应看作顶点,反之,构件看作点时,结点则应看作边;将地球看作一个顶点时,支座结点则应看作边,反之,将地球看作边时,支座结点则应看作顶点。如此,杆系结构的线性图表示至少存在4种基本类型,列入表1。

表1 杆系结构线性图表示的基本类型
Tab.1 Basic types of linear graphical representations of the framed structure

线性图类型	上部结构		下部结构	
	构件	结点	地球	支座结点
I	边	顶点	顶点	边
II	边	顶点	边	顶点
III	顶点	边	顶点	边
IV	顶点	边	边	顶点

四种基本类型的线性图表示的异同:

(1)对于基本类型 I 和 II,上部结构的线性图表示是一致的,即构件看作边,结点看作顶点。这两种基本类型的不同点源自下部结构的线性图表示,若地球看作顶点时,则支座结点看作边,表示独立的支座反力;若地球看作边时,支座结点看作顶点,可以整体理解为一个两端铰接的单元;需要注意的是,若地球边条数不止一条时,那么支座结点也有多个,可以看作是地球边与顶点形成的树状子图,原则是顶点数比地球边数多1。

(2)对于基本类型 III 和 IV,上部结构的线性图表示与基本类型 I 和 II 相反,即构件看作顶点,结点看作边。将构件看作顶点比较简单,对应每一根构件添加顶点即可。但将结点看作边不能直接替换,因为结点可以是两根构件也可以是三根或多

根构件交叉而成。对于两杆交叉的铰结点,线性图表示为一条边,多杆交叉铰接结点的边表示的是结点树或串联边。此外,基本类型 III 和 IV 两者之间下部结构线性图表示的不同点与前文类型 I 和 II 之间的不同点情况一样。

最后,以二力杆的基本线性图表示为例,如图1所示。因为不考虑支座,二力杆线性图表示 I 和 II 类型相同,III 和 IV 类型相同。其中将构件看作顶点时,结点的作用是在此结点交叉的构件联接起来。

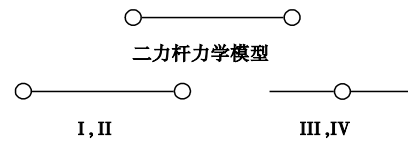


图1 一根二力杆的线性图表示
Fig.1 Linear diagram representation of a two-force bar

3 关联矩阵—平衡矩阵的一种形式

3.1 节点力平衡表示的平衡矩阵

对于由索杆单元构成的空间铰接体系,设体系 m 个节点, n 个单元,对于图3的某个节点 i ,在外载荷作用下的平衡方程为

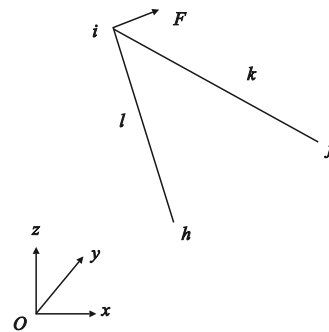


图2 节点杆件
Fig.2 Node and rod connection diagram

$$\begin{cases} \frac{x_i - x_j}{L_k} \beta_k + \frac{x_i - x_h}{L_l} \beta_l = F_{ix} \\ \frac{y_i - y_j}{L_k} \beta_k + \frac{y_i - y_h}{L_l} \beta_l = F_{iy} \\ \frac{z_i - z_j}{L_k} \beta_k + \frac{z_i - z_h}{L_l} \beta_l = F_{iz} \end{cases} \quad (1)$$

式中 L_l 和 L_k 表示杆 l 和 k 的长度, (x_i, x_j, x_h) , (y_i, y_j, y_h) , (z_i, z_j, z_h) 分别为 i, j, h 三点的坐标, β_l, β_k 分别为单元 l, k 的内力,进而对于整体结构体系,可列出 m 个平衡方程,其未知量是 n 个单元的内力,可组装成矩阵形式

$$A\beta = F \quad (2)$$

式中 A 为平衡方程的未知数系数矩阵,称为平衡

矩阵,其元素是体系中各索杆单元在 x, y, z 方向上的节点坐标差与单元长度的比值,即方向余弦; $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1 \cdots \beta_i \cdots\}^T$ 为单元内力矢量; \mathbf{F} 为外荷载列矢量。

3.2 以关联矩阵组装平衡矩阵

若引入关联矩阵显式来组装平衡矩阵 \mathbf{A} ,对于由索杆单元构成的空间铰接体系,若体系有 m 个节点, n 个单元,根据拓扑连接关系定义 \mathbf{C} 为关联矩阵,假定联接单元 k 两端节点为 i 和 j ($i < j$),则关联矩阵 \mathbf{C} 第 k 行的第 i 和第 j 个元素定义为

$$C_{(k,p)} = \begin{cases} 1 & (p=i) \\ -1 & (p=j) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \quad (3)$$

则 $\mathbf{C}\mathbf{X}, \mathbf{C}\mathbf{Y}, \mathbf{C}\mathbf{Z}$ 表示索杆单元在 x, y, z 方向上的节点坐标差矢量或单元的投影长度矢量, $\text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{X}), \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{Y}), \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{Z})$ 表示其对角矩阵形式。 $\mathbf{L} = \{l_1 \cdots l_i \cdots\}^T$ 表示索杆单元的长度矢量, $\text{diag}(\mathbf{L})$ 为其对角矩阵形式。 $\mathbf{C}\mathbf{X}/\mathbf{L}$ 表示方向余弦矢量,记作 $\cos\alpha_x$,同理可得 $\cos\alpha_y, \cos\alpha_z$, $\text{diag}(\cos\alpha_x), \text{diag}(\cos\alpha_y), \text{diag}(\cos\alpha_z)$ 为对角矩阵形式。将拓扑关联矩阵表示的方向余弦代入式(1),得出整体坐标系下 x, y, z 方向的分块平衡矩阵形式

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_x = \mathbf{C}^T \text{diag}(\cos\alpha_x) \\ \mathbf{A}_y = \mathbf{C}^T \text{diag}(\cos\alpha_y) \\ \mathbf{A}_z = \mathbf{C}^T \text{diag}(\cos\alpha_z) \end{cases} \quad (4)$$

因此,可以将整体坐标系下的平衡方程记作

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_x \\ \mathbf{A}_y \\ \mathbf{A}_z \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$ 和 \mathbf{F}_z 分别为沿整体坐标系 x, y, z 方向的外荷载矢量。

3.3 独立于体系具体几何的平衡矩阵新形式

设 $\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}_y, \boldsymbol{\beta}_z$ 为整体坐标系下 x, y, z 方向的等效节点内力,那么

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_x = \text{diag}(\cos\alpha_x)\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}_y = \text{diag}(\cos\alpha_y)\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}_z = \text{diag}(\cos\alpha_z)\boldsymbol{\beta} \end{cases} \quad (6)$$

以 x 方向为例,对式(5)的 $\mathbf{A}_x\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}_x$,保持右端项的外荷载矢量一定,对左端项进行变换可以得到

$$\mathbf{A}_x\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^T \text{diag}(\cos\alpha_x)\boldsymbol{\beta} \quad (7)$$

将式(6)的 $\boldsymbol{\beta}_x = \text{diag}(\cos\alpha_x)\boldsymbol{\beta}$ 代入式(7)可得

$$\mathbf{A}_x\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^T\boldsymbol{\beta}_x \quad (8)$$

y, z 方向,同理可得

$$\mathbf{A}_y\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^T\boldsymbol{\beta}_y \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_z\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^T\boldsymbol{\beta}_z \quad (10)$$

将式(8~10)代入式(5),可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\beta}_x \\ \boldsymbol{\beta}_y \\ \boldsymbol{\beta}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

式中 \mathbf{C}^T 表示整体坐标系下以等效节点力为未知量的平衡矩阵新形式。

平衡矩阵 \mathbf{C}^T 同时也表示关联矩阵的转置,关联矩阵的建立只与体系的拓扑信息有关,故平衡矩阵 \mathbf{C}^T 的研究是独立于体系的具体形状几何的,通过平衡矩阵 \mathbf{C}^T ,将体系的拓扑信息与力的信息联系起来,对于平衡矩阵 \mathbf{C}^T 的求解,可以称作拓扑找力分析。

4 算 例

杆系结构的力学模型如图3所示,基于表1给出该杆系结构4种基本类型的线性图表示如图4所示,根据图4的四种基本类型的线性图表示,给出各类型对应的平衡矩阵 \mathbf{C}^T ,列入表2。

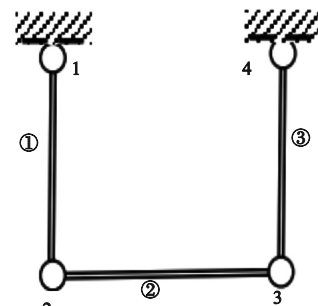


图3 杆系结构的力学模型

Fig. 3 Mechanical model of the bar structure

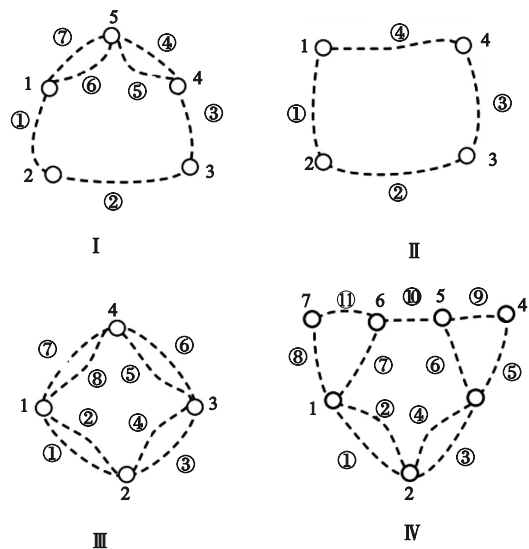


图4 四类基本类型的线性图表示

Fig. 4 Linear graph representation of the four basic types

表2 平衡矩阵 C^T
Tab.2 Equilibrium matrix C^T

线性图	平衡矩阵 C^T
I	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
II	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
III	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
IV	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

结合图4和表2可知,该杆系结构四种基本类型的线性图表示,其中第II种类型的线性图表示,存在最少的回路,仅一个回路,且对应的平衡矩阵 C^T 的形式更简单,能简洁清晰地表示出该杆系结构的拓扑信息,便于拓扑找力分析。

对于图4的第II种类型的线性图表示,若下部结构的地球等代的边数不止一条时,支座结点也有多个,下部结构可以是地球边与支座顶点形成的树状子图,即第II种类型的线性图表示也可有其他样式,如图5的II-1与II-2,并给出II,II-1与II-2线性图表示对应的平衡矩阵 C^T ,列入表3。

结合图4、图5和表3可知,该杆系结构某一种基本类型的线性图表示也有多种样式。线性图表示中存在的回路越少,对应的平衡矩阵 C^T 的形式越简单,越能简洁清晰地表示出该杆系结构的拓扑信息,便于拓扑找力分析。

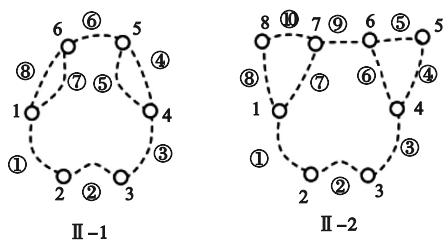


图5 第II种类型的线性图表示的样式
Fig.5 Style of linear graph representation of type II

表3 平衡矩阵 C^T
Tab.3 Equilibrium matrix C^T

线性图	平衡矩阵 C^T
II	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
II-1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
II-2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

最后,基于图4和图5中该杆系结构最简单的线性图表示类型II,也可生成图6所示的杆系结构,即图3与图6是拓扑信息相同的杆系结构。此时,给出两种杆系结构对应的平衡矩阵 A 及其零空间,以及最简单线性图表示类型II对应的平衡矩阵 C^T 及其零空间,列入表4。

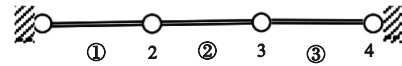


图6 拓扑相同的杆系结构
Fig.6 Topologically identical bar structure

结合图3、图6和表4可知,平衡矩阵 A 的零空间为空,表示图3的杆系结构不存在自应力模式;平衡矩阵 A 的零空间非空,表示图6的杆系结

表4 平衡矩阵 A 与平衡矩阵 C^T 及其零空间
Tab.4 Equilibrium matrix A and equilibrium matrix C^T and their zero spaces

图例	平衡矩阵	列式	零空间
图3	A	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Null
图6	A	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.58 \\ 0.58 \\ 0.58 \end{bmatrix}$
图4(II)	C^T	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

构存在自应力模态;故平衡矩阵 \mathbf{A} 可以用以求解拓扑信息给定的线性找力分析问题。平衡矩阵 \mathbf{C}^T 的零空间非空,表示该拓扑信息条件下,可以生成不同形态的杆系结构,且至少有一种杆系结构存在自应力模态。平衡矩阵 \mathbf{C}^T 的零空间为空,则一定不存在自应力模态。故平衡矩阵 \mathbf{C}^T 仅依靠拓扑信息,便可判断杆系结构的自应力模态存在情况,即杆系结构拓扑找力分析。

5 结 论

本文系统地研究了杆系结构线性图表示的方法,推导了平衡矩阵的新形式,即关联矩阵形式的平衡矩阵 \mathbf{C}^T ,得到结论如下。

(1)杆系结构的线性图表示有多种类型,都可表示其拓扑信息,其中线性图表示存在的回路越少,相应的平衡矩阵 \mathbf{C}^T 形式越简单,越便于拓扑找力分析。

(2)平衡矩阵 \mathbf{A} 可以应用于杆系结构的线性找力分析,平衡矩阵 \mathbf{C}^T 可以应用于杆系结构的拓扑找力分析。

(3)平衡矩阵 \mathbf{C}^T 的零空间非空,则该拓扑几何信息条件下,一定存在具有自应力模态的杆系结构。

参考文献(References):

- [1] Gupta B. Graph theory[J]. *International journal of applied research on information technology and computing*, 2021, **12**(1-3):31-45.
- [2] Pavlopoulos G A ,Secrier M ,Moschopoulos C N ,et al. Using graph theory to analyze biological networks [J]. *BioData Mining*, 2011, **4**:10.
- [3] 哈尔滨船舶工程学院电工教研室. 网络分析导论 [M]. 北京:国防工业出版社,1986. (Electrical Engineering Teaching and Research Office of Harbin Institute of Ship Engineering. *Introduction to Network Analysis* [M]. Beijing: National Defense Industry Press,1986. (in Chinese))
- [4] Kron G. Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1944, **238**(6):399-442.
- [5] Shai O, Preiss K. Graph theory representations of engineering systems and their embedded knowledge[J]. *Artificial Intelligence in Engineering*, 1999, **13**(3): 273-285
- [6] Shai O. Transforming engineering problems through graph representations[J]. *Advanced Engineering Informatics*, 2003, **17**(2):77-93.
- [7] Kaveh A. Applications of Topology and Matroid Theory to the Analysis of Structures[D]. Imperial College, 1974
- [8] Kaveh A. Improved cycle bases for the flexibility analysis of structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1976, **9**(3):267-272.
- [9] Pellegrino S. Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**(21):3025-3035.
- [10] 陈耀,冯健,夏仕洋. 基于群集理论的高阶对称结构可动性判定[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(5):668-674. (CHEN Yao, FENG Jian, XIA Shi-yang. Mobility of highly symmetric structures based on group theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(5):668-674. (in Chinese))
- [11] 张志宏,张明山,董石麟. 弦支穹顶结构动力分析[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(6):646-650. (ZHANG Zhi-hong, ZHANG Ming-shan, DONG Shi-lin. Dynamic analysis of suspend-dome [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, **22**(6):646-650. (in Chinese))
- [12] 张志宏,董石麟. 线性找力分析中的对称性问题[J]. 空间结构, 2020, **26**(1):59-62. (ZHANG Zhi-hong, DONG Shi-lin. Symmetry problem of linear force-finding analysis[J]. *Spatial Structures*, 2020, **26**(1):59-62. (in Chinese))
- [13] Tran H C, Lee J. Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition[J]. *Engineering with Computers*, 2013, **29**(1):71-86.
- [14] Wang Y F, Xu X, Luo Y Z. Form-finding of tensegrity structures via rank minimization of force density matrix [J]. *Engineering Structures*, 2021, **227**:111419.
- [15] Wang Y F, Xu X, Luo Y Z. A unifying framework for form-finding and topology-finding of tensegrity structures [J]. *Computers & Structures*, 2021, **247**: 106486.
- [16] Chen Y, Yan J Y, Feng J, et al. A hybrid symmetry - PSO approach to finding the self-equilibrium configurations of prestressable pin-jointed assemblies [J]. *Acta Mechanica*, 2020, **231**(4):1485-1501.

Topological force finding analysis of bar structure

ZHANG Zhi-hong^{*}, ZHAO Kai

(Department of Civil Engineering, College of Civil Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 201418, China)

Abstract: Firstly, the paper studied various types of linear graph representations of a bar-type structure. Secondly, the incidence matrix is introduced to assemble the equilibrium matrix, and a new form of equilibrium matrix independent of the specific shape geometry of the structure is derived. The concept of topological force finding analysis is proposed based on this form of equilibrium matrix. Finally, the equilibrium matrices and their null spaces in different cases of a bar-type structure are compared. The correctness and applicability of linear graph representation and topological force finding for various types of bar structures are further verified.

Key words: bar structure; linear graphs; equilibrium matrices; topological force finding

~~~~~  
(上接第 1086 页)

## Simulation of complex flow of multi-droplet impingement on a free surface by $\delta$ -SPH method

ZHENG Chun-yao<sup>1,2</sup>, ZHOU Yuan<sup>3</sup>, ZHANG Lin<sup>\*1</sup>

(1. State Key Laboratory of Mesoscience and Engineering, Institute of Process Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190;

2. School of Chemical Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049;

3. Process Simulation & Calculation Center, Petrochemical Research Institute, Beijing 102206)

**Abstract:** Based on the  $\delta$ -SPH method, the multi-droplet impingement on a free surface is simulated and analyzed. First, by adding a density dissipation term and an artificial viscous term in the governing equations, the spurious numerical oscillations in pressure can be removed and the stability of the numerical scheme is ensured. Then, the impact of a single droplet on a free surface is simulated, and the reliability of the  $\delta$ -SPH method is verified by comparison with the results reported in the literature. Finally, two droplets with a vertical/horizontal distribution, four droplet's with a rhombus distribution, which impinge on a free surface, are simulated, and the effects of the droplet vertical/horizontal travel on the impact structure are analyzed. The numerical results show that: the  $\delta$ -SPH method can exactly capture the strong-nonlinearity phenomena such as splashing, large-amplitude sloshing and discontinuous free surface when multi-droplets impinge on a free surface, and a smooth pressure field is also obtained.

**Key words:** meshless method;  $\delta$ -SPH; droplet impact; free surface; complex flow